Universität Wien, SS 2015

Lineare Algebra für PhysikerInnen

Beispiele für Multiple-Choice-Fragen

Punkteschlüssel:

[Typ 1 aus 4] und [Typ 3 aus 4]	...	0.8 Punkte
[Typ 2 aus 4]	...	1 Punkt

Bei der schriftlichen Prüfung: MC-Fragen im Wert von 20 Punkten.

1. [Typ 2 aus 4] Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ genau dann eine Basis von V, wenn
   (a) $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist.
   (b) jedes aus den v_j gebildete $(n-1)$-Tupel von Vektoren linear abhängig ist.
   (c) $L(v_1, \ldots, v_n) = V$ ist.
   (d) es ein $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ gibt mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ und $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = 0$.

2. [Typ 1 aus 4] Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention gilt für $x, y \in \mathbb{R}^3$ (mit dem Standard-Skalarprodukt)
   (a) $\varepsilon_{jkl} x_k y_l = x_j y_j$.
   (b) $\delta_{jk} x_j y_k = \langle x, y \rangle$.
   (c) $\delta_{jk} x_j x_k + \delta_{jk} y_j y_k = \langle x+y, x+y \rangle$.
   (d) $\varepsilon_{jkl} \, (x \times y)_j \, x_k y_l = 0$.

3. [Typ 2 aus 4] Von vier Abbildungen $f, g, h, k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind die folgenden Eigenschaften bekannt. Nur zwei von ihnen können linear sein. Welche?
   (a) $h(0,0) = (1,-1)$.
   (b) $k(t,-t) = (t,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
   (c) $g(0,y) = (y,2)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
   (d) $f(3,y) = (y,-2)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

4. [Typ 1 aus 4] Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to V$ der kanonische Basisisomorphismus und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist die Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ definiert durch

   (a) $[f]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$.
   (b) $[f]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}}$.
   (c) $[f]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(f)$.
   (d) $[f]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}(f)$.

5. [Typ 2 aus 4] Eine quadratische Matrix A mit $\det(A) \neq 0$ kann so invertiert werden:

   (a) Man notiert die elementaren Zeilenoperationen, die A in E verwandeln, und wendet diese in umgekehrter Reihenfolge auf E an. Damit erhält man automatisch A^{-1}.
   (b) Man löst das Gleichungssystem $Ax = c$ für einen unbestimmten Vektor c und erhält damit automatisch die Wirkung der Inversen in der Form $c \mapsto x = A^{-1}c$.
   (c) Man notiert die elementaren Zeilenoperationen, die A in E verwandeln, und wendet diese in der gleichen Reihenfolge auf E an. Damit erhält man automatisch A^{-1}.
   (d) Sind a_{jk} die Koeffizienten von A, so sind a_{jk}^{-1} die Koeffizienten von A^{-1}.

6. [Typ 2 aus 4] Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, V^* sein Dualraum und V^{**} sein Bidualraum. Dann gilt:

   (a) V^{**} kann auf natürliche Weise mit V identifiziert werden.
   (b) V^* ist zu V isomorph.
   (c) V^{**} kann auf natürliche Weise mit V^* identifiziert werden.
   (d) V^* kann auf natürliche Weise mit V identifiziert werden.

7. [Typ 2 aus 4] Die Determinante als Funktion $\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ besitzt folgende Eigenschaften:

   (a) $\det$ ist linear in jeder Spalte.
   (b) $\det$ ist invariant unter der Vertauschung zweier Spalten.
   (c) $\det$ ist linear: $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
   (d) Ist $\operatorname{rg}(A) < n$, so ist $\det(A) = 0$.

8. [Typ 1 aus 4] Die Determinante einer 3×3-Matrix kann mit Hilfe des Epsilon-Symbols

so berechnet werden (angeschrieben unter Benutzung der Einsteinschen Summenkonvention):

(a) $\det(A) = \varepsilon_{jkl}\, a_{1j}\, a_{1k}\, a_{1l}$.

(b) $\det(A) = \varepsilon_{jkl}\, a_{jk}\, a_{lj}\, a_{kl}$.

(c) $\det(A) = \varepsilon_{jkl}\, a_{1j}\, a_{2k}\, a_{3l}$.

(d) $\det(A) = \varepsilon_{jkl}\, a_{jj}\, a_{kk}\, a_{ll}$.

9. [Typ 2 aus 4] Welche der Aussagen über Gleichungssysteme vom Typ $Ax = b$ mit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $b \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ sind wahr?

(a) Es gibt unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$.

(b) Es gibt eine einzige Lösung $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

(c) Gilt $\det(A) = 0$ und $b \in \mathrm{Bild}(A)$, so gibt es unendlich viele Lösungen.

(d) Kennt man den Rang von A, so weiß man, ob es keine, eine oder unendlich viele Lösungen gibt.

10. [Typ 2 aus 4] Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \mapsto 3\,x_1 + 5\,y_2$

(a) ist kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

(b) ist nicht bilinear.

(c) ist bilinear.

(d) ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

11. [Typ 2 aus 4] Ist V ein euklidischer Vektorraum und $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ eine Orthonomalbasis von V. Dann gilt

(a) $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x\rangle\, \psi_j$ für alle $x \in V$.

(b) $x = \sum_{j=1}^{n} \langle \psi_j, x\rangle\, \psi_j$ für alle $x \in V$.

(c) $x = \sum_{j=1}^{n} \langle \psi_j, x\rangle\, x$ für alle $x \in V$.

(d) $\sum_{j=1}^{n} \langle \psi_j, \psi_k\rangle \psi_j = \psi_k$.

12. [Typ 1 aus 4] Ist V ein euklidischer Vektorraum, $\mathcal{B} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ eine Orthonomalbasis von V und $x \in V$. Dann ist der j-te Entwicklungskoeffizient von x bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch

    (a) $\|x - \phi_j\|$.
    (b) $\langle \phi_j, x \rangle$.
    (c) $\|x - \phi_j\|^2$.
    (d) $\langle x, x \rangle \, \phi_j$.

13. [Typ 2 aus 4] Sei V ein Vektorraum, $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und λ ein Eigenwert von f. Der Eigenraum von f zum Eigenwert λ ist

    (a) $\mathrm{Bild}\,(f - \lambda \, \mathrm{Id}_V)$.
    (b) $\{u \in V \mid f(u) = \lambda u\}$.
    (c) $\{u \in V \mid f(u) = \lambda u$ und $u \neq 0\}$.
    (d) $\mathrm{Kern}\,(f - \lambda \, \mathrm{Id}_V)$.

14. [Typ 1 aus 4] Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Eine Hauptachsentransformation von f ist

    (a) die Angabe einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V mit der Eigenschaft, dass $[f]_{\mathcal{B}}$ eine orthogonale Matrix ist.
    (b) eine $n \times n$-Diagonalmatrix D mit der Eigenschaft, dass $f \circ D$ diagonalisierbar ist.
    (c) eine orthogonale lineare Abbildung $H : \mathbb{R}^n \to V$ mit der Eigenschaft, dass $H^{-1} \circ f \circ H$ eine Diagonalmatrix ist.
    (d) eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to V$ mit der Eigenschaft, dass $S \circ f \circ S$ eine Diagonalmatrix ist.

15. [Typ 1 aus 4] Von den folgenden Aussagen über lineare Abbildungen in einem unitären Vektorraum ist eine falsch. Welche?

    (a) Jede hermitische Abbildung ist normal.
    (b) Jede normale Abbildung ist diagonalisierbar.
    (c) Jede hermitische Abbildung ist eine Orthogonalprojektion.
    (d) Jede Orthogonalprojektion ist normal.

16. [Typ 2 aus 4] Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k$ die Spektraldarstellung eines normalen linearen Operators $f : V \to V$. Dann gilt:

   (a) $\mathrm{Kern}(P_j) \perp \mathrm{Kern}(P_k)$, sofern $j \neq k$.

   (b) $\mathrm{Bild}(P_j) \subseteq \mathrm{Kern}(P_k)$, sofern $j \neq k$.

   (c) $\mathrm{Kern}(P_j) \subseteq \mathrm{Bild}(P_k)$, sofern $j \neq k$.

   (d) $\mathrm{Bild}(P_j) \perp \mathrm{Bild}(P_k)$, sofern $j \neq k$.

17. [Typ 2 aus 4] Welche der folgenden Aussagen über komplexe quadratische Matrizen sind wahr?

   (a) Jede hermitische Matrix besitzt nur reelle Eigenwerte.

   (b) Jede normale Matrix besitzt nur reelle Eigenwerte.

   (c) Jede antihermitische Matrix besitzt nur reelle Eigenwerte.

   (d) Jede unitäre Matrix besitzt als Eigenwerte nur komplexe Zahlen vom Betrag 1.