Universität Wien, SS 2015

Lineare Algebra für PhysikerInnen

Beispiele für Multiple-Choice-Fragen

Punkteschlüssel:

[Typ 1 aus 4] und [Typ 3 aus 4] ... 0.8 Punkte

[Typ 2 aus 4] ... 1 Punkt

Bei der schriftlichen Prüfung: MC-Fragen im Wert von 20 Punkten.

1. [Typ 2 aus 4] Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ genau dann eine Basis von V, wenn
   (a) [true] $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist.
   (b) [false] jedes aus den v_j gebildete $(n-1)$-Tupel von Vektoren linear abhängig ist.
   (c) [true] $L(v_1, \ldots, v_n) = V$ ist.
   (d) [false] es ein $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ gibt mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ und $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = 0$.

2. [Typ 1 aus 4] Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention gilt für $x, y \in \mathbb{R}^3$ (mit dem Standard-Skalarprodukt)
   (a) [false] $\varepsilon_{jkl} x_k y_l = x_j y_j$.
   (b) [true] $\delta_{jk} x_j y_k = \langle x, y \rangle$.
   (c) [false] $\delta_{jk} x_j x_k + \delta_{jk} y_j y_k = \langle x + y, x + y \rangle$.
   (d) [false] $\varepsilon_{jkl} \, (x \times y)_j \, x_k y_l = 0$.

3. [Typ 2 aus 4] Von vier Abbildungen $f, g, h, k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind die folgenden Eigenschaften bekannt. Nur zwei von ihnen können linear sein. Welche?
   (a) [false] $h(0, 0) = (1, -1)$.
   (b) [true] $k(t, -t) = (t, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
   (c) [false] $g(0, y) = (y, 2)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
   (d) [true] $f(3, y) = (y, -2)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

4. [Typ 1 aus 4] Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to V$ der kanonische Basisisomorphismus und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist die Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ definiert durch

   (a) [false] $[f]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$.
   (b) [true] $[f]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}}$.
   (c) [false] $[f]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(f)$.
   (d) [false] $[f]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}(f)$.

5. [Typ 2 aus 4] Eine quadratische Matrix A mit $\det(A) \neq 0$ kann so invertiert werden:

   (a) [false] Man notiert die elementaren Zeilenoperationen, die A in E verwandeln, und wendet diese in umgekehrter Reihenfolge auf E an. Damit erhält man automatisch A^{-1}.
   (b) [true] Man löst das Gleichungssystem $Ax = c$ für einen unbestimmten Vektor c und erhält damit automatisch die Wirkung der Inversen in der Form $c \mapsto x = A^{-1}c$.
   (c) [true] Man notiert die elementaren Zeilenoperationen, die A in E verwandeln, und wendet diese in der gleichen Reihenfolge auf E an. Damit erhält man automatisch A^{-1}.
   (d) [false] Sind a_{jk} die Koeffizienten von A, so sind a_{jk}^{-1} die Koeffizienten von A^{-1}.

6. [Typ 2 aus 4] Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, V^* sein Dualraum und V^{**} sein Bidualraum. Dann gilt:

   (a) [true] V^{**} kann auf natürliche Weise mit V identifiziert werden.
   (b) [true] V^* ist zu V isomorph.
   (c) [false] V^{**} kann auf natürliche Weise mit V^* identifiziert werden.
   (d) [false] V^* kann auf natürliche Weise mit V identifiziert werden.

7. [Typ 2 aus 4] Die Determinante als Funktion $\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ besitzt folgende Eigenschaften:

   (a) [true] $\det$ ist linear in jeder Spalte.
   (b) [false] $\det$ ist invariant unter der Vertauschung zweier Spalten.
   (c) [false] $\det$ ist linear: $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
   (d) [true] Ist $\mathrm{rg}(A) < n$, so ist $\det(A) = 0$.

8. [Typ 1 aus 4] Die Determinante einer 3×3-Matrix kann mit Hilfe des Epsilon-Symbols so berechnet werden (angeschrieben unter Benutzung der Einsteinschen Summenkonvention):

   (a) [false] $\det(A) = \varepsilon_{jkl}\, a_{1j}\, a_{1k}\, a_{1l}$.

   (b) [false] $\det(A) = \varepsilon_{jkl}\, a_{jk}\, a_{lj}\, a_{kl}$.

   (c) [true] $\det(A) = \varepsilon_{jkl}\, a_{1j}\, a_{2k}\, a_{3l}$.

   (d) [false] $\det(A) = \varepsilon_{jkl}\, a_{jj}\, a_{kk}\, a_{ll}$.

9. [Typ 2 aus 4] Welche der Aussagen über Gleichungssysteme vom Typ $Ax = b$ mit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $b \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ sind wahr?

   (a) [false] Es gibt unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$.

   (b) [true] Es gibt eine einzige Lösung $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

   (c) [true] Gilt $\det(A) = 0$ und $b \in \mathrm{Bild}(A)$, so gibt es unendlich viele Lösungen.

   (d) [false] Kennt man den Rang von A, so weiß man, ob es keine, eine oder unendlich viele Lösungen gibt.

10. [Typ 2 aus 4] Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) \mapsto 3\,x_1 + 5\,y_2$

    (a) [true] ist kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

    (b) [true] ist nicht bilinear.

    (c) [false] ist bilinear.

    (d) [false] ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

11. [Typ 2 aus 4] Ist V ein euklidischer Vektorraum und $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ eine Orthonomalbasis von V. Dann gilt

    (a) [false] $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle x, x \rangle\, \psi_j$ für alle $x \in V$.

    (b) [true] $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle \psi_j, x \rangle\, \psi_j$ für alle $x \in V$.

    (c) [false] $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle \psi_j, x \rangle\, x$ für alle $x \in V$.

    (d) [true] $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle \psi_j, \psi_k \rangle \psi_j = \psi_k$.

12. [Typ 1 aus 4] Ist V ein euklidischer Vektorraum, $\mathcal{B} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ eine Orthonomalbasis von V und $x \in V$. Dann ist der j-te Entwicklungskoeffizient von x bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch

    (a) [false] $\|x - \phi_j\|$.
    (b) [true] $\langle \phi_j, x \rangle$.
    (c) [false] $\|x - \phi_j\|^2$.
    (d) [false] $\langle x, x \rangle \, \phi_j$.

13. [Typ 2 aus 4] Sei V ein Vektorraum, $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und λ ein Eigenwert von f. Der Eigenraum von f zum Eigenwert λ ist

    (a) [false] $\mathrm{Bild}\,(f - \lambda \, \mathrm{Id}_V)$.
    (b) [true] $\{u \in V \mid f(u) = \lambda u\}$.
    (c) [false] $\{u \in V \mid f(u) = \lambda u$ und $u \neq 0\}$.
    (d) [true] $\mathrm{Kern}\,(f - \lambda \, \mathrm{Id}_V)$.

14. [Typ 1 aus 4] Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Eine Hauptachsentransformation von f ist

    (a) [false] die Angabe einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V mit der Eigenschaft, dass $[f]_{\mathcal{B}}$ eine orthogonale Matrix ist.
    (b) [false] eine $n \times n$-Diagonalmatrix D mit der Eigenschaft, dass $f \circ D$ diagonalisierbar ist.
    (c) [true] eine orthogonale lineare Abbildung $H : \mathbb{R}^n \to V$ mit der Eigenschaft, dass $H^{-1} \circ f \circ H$ eine Diagonalmatrix ist.
    (d) [false] eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to V$ mit der Eigenschaft, dass $S \circ f \circ S$ eine Diagonalmatrix ist.

15. [Typ 1 aus 4] Von den folgenden Aussagen über lineare Abbildungen in einem unitären Vektorraum ist eine falsch. Welche?

    (a) [false] Jede hermitische Abbildung ist normal.
    (b) [false] Jede normale Abbildung ist diagonalisierbar.
    (c) [true] Jede hermitische Abbildung ist eine Orthogonalprojektion.
    (d) [false] Jede Orthogonalprojektion ist normal.

16. [Typ 2 aus 4] Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k$ die Spektraldarstellung eines normalen linearen Operators $f : V \to V$. Dann gilt:

    (a) [false] $\mathrm{Kern}(P_j) \perp \mathrm{Kern}(P_k)$, sofern $j \neq k$.

    (b) [true] $\mathrm{Bild}(P_j) \subseteq \mathrm{Kern}(P_k)$, sofern $j \neq k$.

    (c) [false] $\mathrm{Kern}(P_j) \subseteq \mathrm{Bild}(P_k)$, sofern $j \neq k$.

    (d) [true] $\mathrm{Bild}(P_j) \perp \mathrm{Bild}(P_k)$, sofern $j \neq k$.

17. [Typ 2 aus 4] Welche der folgenden Aussagen über komplexe quadratische Matrizen sind wahr?

    (a) [true] Jede hermitische Matrix besitzt nur reelle Eigenwerte.

    (b) [false] Jede normale Matrix besitzt nur reelle Eigenwerte.

    (c) [false] Jede antihermitische Matrix besitzt nur reelle Eigenwerte.

    (d) [true] Jede unitäre Matrix besitzt als Eigenwerte nur komplexe Zahlen vom Betrag 1.