Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 13

1. Schreiben Sie als Kurven mit einer geeigneten Parameterdarstellung an:

   (a) Im $\mathbb{R}^2$ die Ellipse $4\,x^2 + 9\,y^2 = 1$, im Gegenuhrzeigersinn mit Anfangspunkt = Endpunkt = $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ durchlaufen.

   (b) Im $\mathbb{R}^2$ den Polygonzug von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ und weiter nach $(1, 1)$.

   (c) Im $\mathbb{R}^3$ eine Linie auf der Einheitskugel, die spiralförmig vom Nordpol ausgeht, sich in vielen Windungen über die Nordhalbkugel auf den Äquator zubewegt, diesen überquert, sich auf der Südhalbkugel auf den Südpol zubewegt und schließlich in ihm endet (mit anderen Worten: eine Linie, die die Einheitskugel „umspinnt“).

   Tipp: „Denken“ Sie in Kugelkoordinaten!

2. Die Gleichung $x - y = e^{x+y}$ beschreibt eine Linie in der Ebene. Man möchte sie gern plotten, aber die Gleichung kann weder nach x noch nach y durch eine geschlossene Formel aufgelöst werden. Charakterisieren Sie die Linie als Kurve mittels einer geeigneten Parameterdarstellung (in der nur geschlossene Formeln auftreten sollen, die man dann in *GeoGebra* oder *Mathematica* eingeben kann)!

   Probieren Sie zuerst ein bisschen, bevor Sie sich diesen Tipp ansehen:
   Setzen Sie $x + y$ als Parameter t an!

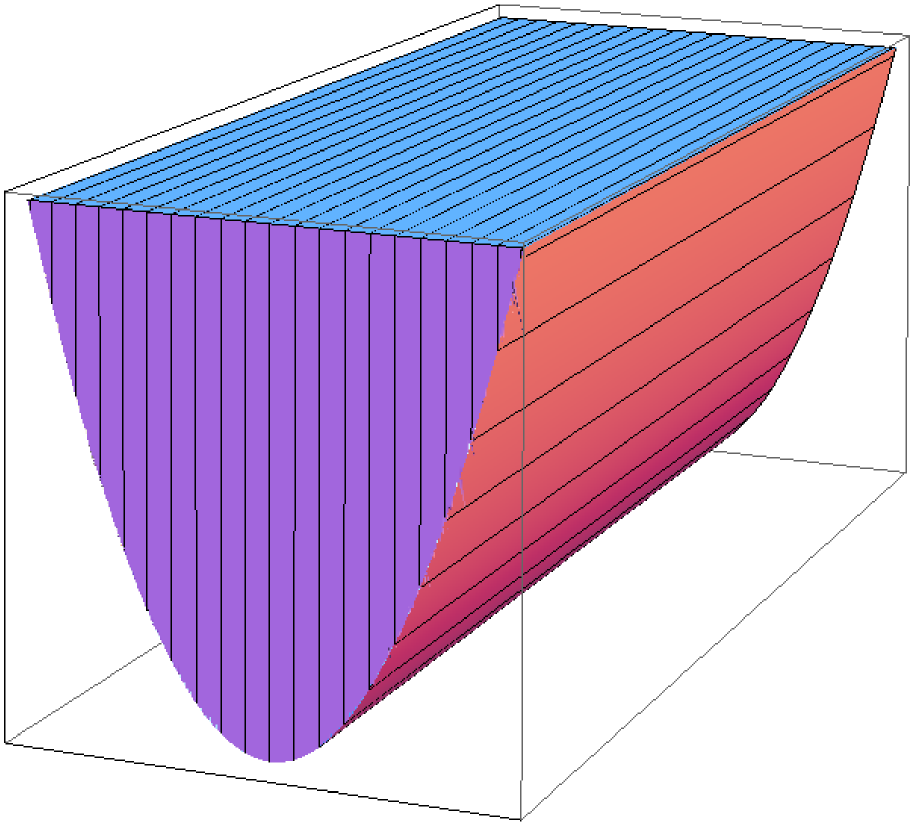
3. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal differenzierbare Kurve. Zeigen Sie: Die Vektoren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ stehen genau dann für alle $t \in [a, b]$ aufeinander normal, wenn der Parameter t (bis auf möglicherweise eine additive Konstante) proportional zur Bogenlänge ist. Wenden Sie diesen Sachverhalt auf folgende Frage an: Wie muss die Bewegung eines Punktteilchens im Raum beschaffen sein, damit der Beschleunigungsvektor stets normal zur Bewegungsrichtung ist?

4. Zeigen Sie, dass sich die Krümmung einer ebenen Kurve nicht ändert, wenn die Kurve um einen beliebigen Winkel gedreht wird! Sei dazu $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine zweimal differenzierbare Kurve, R eine 2×2-Rotationsmatrix und $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ die durch $\widetilde{\mathbf{x}}(t) := R\,\mathbf{x}(t)$ definierte gedrehte Kurve. Zeigen Sie, dass $\kappa(t) = \widetilde{\kappa}(t)$ für alle $t \in (a, b)$.

5. Ein (punktförmig angenommenes) Fahrzeug fährt geradeaus, dann in eine Kurve und danach wieder geradeaus. Zur Zeit t befindet es sich am Ort $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$. Wie bekannt, ist $\dot{\mathbf{x}}(t)$ die (vektorielle) Momentangeschwindigkeit und $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ die (vektorielle) Momentanbeschleunigung zur Zeit t. Die dritte Ableitung $\dddot{\mathbf{x}}(t)$ heißt „Ruck“ (englisch *jerk*). Warum? Wieso spielt diese Größe beim Straßen- und Schienenbau eine Rolle?

   Siehe dazu auch https://www.amazon.com/dp/B07KW7XFX1.

6. Berechnen Sie die Evolute der Normparabel $y = x^2$ und skizzieren Sie sie! Mit dem Ergebnis diskutieren Sie die Stabilität eines homogenen Körpers, dessen Querschnitt die Form einer bei $y = a$ abgeschnittenen Normparabel hat:



Wie muss a gewählt werden, damit die in der Abbildung gezeigte Gleichgewichtslage stabil ist? (Vgl. Buch S. 957.)

7. Für eine differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ein „Vektorfeld") definiert man das „vektorielle Kurvenintegral" durch

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} := \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)\, dt.$$

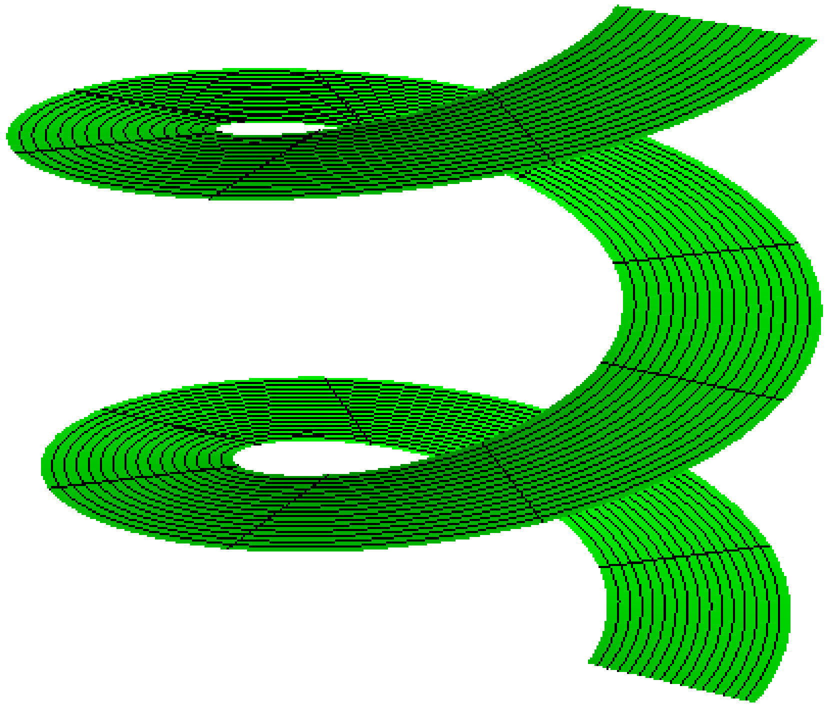
Nun kommt jemand auf die Idee, dieselbe Kurve anders zu parametrisieren: $\widetilde{\mathbf{x}}(\tau) := \mathbf{x}(t(\tau))$ für eine differenzierbare Funktion $[c, d] \to [a, b]$, $\tau \mapsto t(\tau)$ mit $dt/d\tau > 0$. Zeigen Sie, dass der Wert des vektoriellen Kurvenintegrals in beiden Fällen der gleiche ist!

8. Zeigen Sie: Für eine differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hängt das vektorielle Kurvenintegral

$$\int_\gamma (\mathbf{grad}\,\phi) \cdot \mathbf{ds}$$

nur vom Anfangspunkt und vom Endpunkt von γ ab. Geben Sie eine Formel für dieses Integral an!

9. Geben sie mittels Parameterdarstellung eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ an, die so aussieht:



10. Sei $\mathbb{R}^2 \supseteq G \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Fäche im Raum. Argumentieren Sie heuristisch (d.h. durch intuitive Überlegungen), dass ihr Flächeninhalt durch
$$\int_G \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| d(u,v)$$
gegeben ist!

    Tipp: Fassen Sie $d_u\mathbf{x} := \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\,du$ und $d_v\mathbf{x} := \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\,dv$ als „infinitesimal kurze" Vektoren tangential zur Fläche auf, die ein „infinitesimal kleines" Parallelogramm aufspannen, das der Teilmenge $[u, u+du] \times [v, v+dv]$ des Parameterbereichs G entspricht! Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms und „summieren" Sie die Inhalte aller dieser „infinitesimalen" Flächeninhalte auf!