Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 12

1. Berechnen Sie die beiden Integrale
$$\int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} dy \, \sin(3\,x - y) \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\pi/2} dy \int_0^\pi dx \, \sin(3\,x - y)$$
getrennt, um zu verifizieren, dass sie gleich sind!

2. Sei A das Rechteck $[0,1] \times [1,2] \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_A x_2 \, e^{x_1 x_2} \, d(x_1, x_2)$.

3. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ das von den Graphen der Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x\,(1-x)$ eingeschlossene Flächenstück. Skizzieren Sie die Situation und berechnen Sie $\displaystyle\int_B (x+y)\, d(x,y)$.

4. Sei C das von der Ellipse in Hauptlage mit Halbachsen a und b eingeschlossene Flächenstück im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt, indem Sie das Gebietsintegral $\int_C d(x,y)$ auf elliptische Koordinaten $\xi = \dfrac{x}{a}$ und $\eta = \dfrac{x}{b}$ transformieren! Die Formel für den Flächeninhalt der Einheitskreisscheibe dürfen Sie als bekannt voraussetzen.

5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie $\displaystyle\int_D x^2\, y \, d(x,y)$
   (i) in kartesischen Koordinaten (zuerst Integral über y von 0 bis $\sqrt{1-x^2}$, danach Integral über x von -1 bis 1; machen Sie auch eine Skizze dazu),
   (ii) in Polarkoordinaten.

6. Berechnen Sie $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ mit folgendem Trick: $I^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) =$ (weiter in Polarkoordinaten).

7. Der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) $\mathbf{X}$ eines Körpers, der den Raumbereich $V \subseteq \mathbb{R}^3$ homogen ausfüllt, ist durch
$$X_j = \frac{\int_V x_j \, d^3x}{\int_V d^3x} \qquad\qquad j = 1,2,3$$
definiert. Wo befindet sich der Schwerpunkt einer Halbkugel?

8. Wo befindet sich der Schwerpunkt eines (geraden) Kegels mit Grundflächenradius R und Höhe h?

   Tipp: Integration in Zylinderkoordinaten.

9. Aus der Transformationsformel für die Integration in Kugelkoordinaten, angeschrieben in der Form
$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3 = r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$
   kann man leicht eine Regel für die Integration über die Sphäre (Kugeloberfläche) mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius r gewinnen[1]: Wird
$$dV = \underbrace{r^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{Höhe}}$$
   interpretiert, so ergibt sich $dA = r^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$ als „Flächenelement" auf der Sphäre. Ist nun B ein Bereich auf der Sphäre, so wird das zugehörige Integral einer Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ durch
$$\int_B f\, dA := r^2 \int_B f(\theta, \varphi)\, \sin(\theta)\, d(\theta, \varphi)$$
   definiert. Für $f(\theta, \varphi) = 1$ ist es gleich dem Flächeninhalt von B.

   (i) Berechnen Sie den Flächeninhalt $F(r)$ der Sphäre mit Radius r.

   (ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch $0 \leq \theta \leq \theta_0$ definierten Kugelsegments der Sphäre um den Ursprung mit Radius r. (Machen Sie auch eine Skizze!)

   (iii) Sei $V(r)$ das Volumen der Kugel mit Radius r. Zeigen Sie, dass $V'(r) = F(r)$ gilt! Ist diese Beziehung ein Zufall? Können wir damit rechnen, dass sie auch in höheren Dimensionen gilt (d.h. für eine „Hyperkugel" im $\mathbb{R}^n$ und ihre „Hyper-Oberfläche")? Gilt sie auch für die entsprechenden Mengen im $\mathbb{R}^2$?

10. Wie weit muss man von einer Kugel entfernt sein, um genau ein Viertel ihrer Oberfläche zu sehen?

[1] Gegen Ende der Vorlesung werden Integrale über Flächen unter allgemeineren Gesichtspunkten diskutiert. Nur gibt es danach keine Übungstermine mehr. Daher dieser kurze Zugang zum Integral über eine Sphäre.