Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 9

1. Ein harmonischer Oszillator (man kann dabei an ein nicht allzu stark ausgelenktes Pendel denken) wird durch eine Differentialgleichung vom Typ $y''(t) = -k\,y(t)$ beschrieben, wobei die Konstante $k > 0$ charakterisiert, wie stark der Oszillator an die Gleichgewichtslage $y = 0$ gebunden ist. Werden zwei solche Oszillatoren (mit Auslenkungen y_1 und y_2) durch eine elastische Kraft aneinander gekoppelt, so wird das Gesamtsystem durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} {y_1}''(t) &= -k\,y_1(t) + w\,\big(y_2(t) - y_1(t)\big) \\ {y_2}''(t) &= -k\,y_2(t) - w\,\big(y_2(t) - y_1(t)\big) \end{aligned}$$

beschrieben. Dabei charakterisiert die Konstante $w \geq 0$ die Stärke der Kopplung. Fasst man die Auslenkungen der beiden Oszillatoren zu einem zeitabhängigen Vektor $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ zusammen, so kann das obige Differentialgleichungssystem in Matrixform als $\mathbf{y}''(t) = -\mathbf{A}\mathbf{y}(t)$ geschrieben werden.

   (i) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}$.

   (ii) Argumentieren Sie, dass $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist!

   (iii) Die Oszillatoren führen eine „Eigenschwingung" aus, wenn $\mathbf{y}(t) = f(t)\,\mathbf{u}$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $\mathbf{u}$ ein (zeitunabhängiger) Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist. Bestimmen $\mathbf{y}(t)$ für alle Eigenschwingungen! Sie können dabei die Tatsache benutzen, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $g''(t) = -c\,g(t)$ für $c > 0$ durch $g(t) = a\,\sin(\sqrt{c}\,t) + b\,\cos(\sqrt{c}\,t)$ mit frei wählbaren Konstanten a und b gegeben ist.

   (iv) Stellen Sie sich die Oszillatoren als zwei nebeneinander hängende Pendel vor (y_1 und y_2 sind dann ihre Auslenkwinkel), die mit einer elastischen Feder miteinander verbunden sind. Die Feder ist entspannt, wenn die Auslenkwinkel gleich sind, d.h. wenn $y_1 = y_2$ ist. Wie sehen dann die Eigenschwingungen aus, wenn man ihnen zuschaut?

2. Bei einer bestimmten Tierart haben die Weibchen einen ein- bis zweijährigen Reproduktionszyklus. Ein Weibchen, das weniger als ein Jahr alt ist, wird „nulljährig" genannt. Ein Anteil von $\frac{5}{16}$ aller nulljährigen Weibchen stirbt am Ende des Jahres, die anderen sind im darauffolgenden Jahr „einjährig". Ein nulljähriges Weibchen bekommt im Mittel $\frac{3}{5}$ Nachkommen, ein einjähriges bekommt im Mittel $\frac{4}{5}$ Nachkommen. Noch ältere Weibchen bekommen keine Nachkommen mehr. Wir nummerieren die Jahre mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Wird die Anzahl der nulljährigen Weibchen im Jahr k mit $z_0(k)$ bezeichnet und die Anzahl der einjährigen Weibchen mit $z_1(k)$, so genügt die Populationsentwicklung dem Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} z_0(k+1) &= \frac{3}{5}\, z_0(k) + \frac{4}{5}\, z_1(k) \\ z_1(k+1) &= \frac{11}{16}\, z_0(k) \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Ermitteln Sie die Lösung dieses Systems zu vorgegebenen Anfangswerten $z_0(0)$ und $z_1(0)$ mit folgender Methode:

(i) Fassen Sie $z_0(k)$ und $z_1(k)$ zu einem Vektor $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^2$ zusammen und schreiben Sie das obige Differenzengleichungssystem in Matrixform $\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{B}\,\mathbf{z}(k)$ an! Die Lösung des Problems kann nun formal als $\mathbf{z}(k) = \mathbf{B}^k\,\mathbf{z}(0)$ geschrieben werden.

(ii) Nun stehen zwei Verfahren zur Wahl. Variante 1: Sie diagonalisieren die Matrix $\mathbf{B}$, um $\mathbf{B}^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ explizit zu berechnen. Variante 2: Sie schreiben $\mathbf{z}(0)$ als Linearkombination der Eigenvektoren, um $\mathbf{B}^k\,\mathbf{z}(0)$ zu berechnen, *ohne* zuvor $\mathbf{B}^k$ berechnet zu haben. Wählen Sie eine der beiden Varianten und ermitteln Sie die gesuchte Lösung!

(iii) Untersuchen Sie das Langzeitverhalten (d.h. das Verhalten für $k \to \infty$) der Lösung! Wie wird sich das Verhältnis der Anzahl der nulljährigen Weibchen zur Anzahl der einjährigen Weibchen einpendeln?

Für die nötigen Matrizenoperationen, die man im Prinzip auch auf dem Papier ausführen kann, können Sie bei Bedarf ein CAS verwenden.

3. Matrizen $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ werden in die Basis von Aufgabe 1 des Übungsblatts 4 entwickelt:

$$A = a\,\mathbf{E_2} + c_1\,\sigma_\mathbf{1} + c_2\,\sigma_\mathbf{2} + c_3\,\sigma_\mathbf{3}$$

mit $a, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$.

(i) Wie sind die Entwicklungskoeffizienten a, c_1, c_2, c_3 zu wählen, damit die Spur von A gleich 1 ist?

(ii) Wie sind die Entwicklungskoeffizienten a, c_1, c_2, c_3 zu wählen, damit A hermitesch ist?

(iii) Wie sind die Entwicklungskoeffizienten a, c_1, c_2, c_3 zu wählen, damit A hermitesch ist und alle Eigenwerte ≥ 0 sind? (Eine solche Matrix nennt man *semipositiv definit.*)

(iv) Eine Matrix, die (i) und (iii) erfüllt, wird eine (2×2-)*Dichtematrix* genannt. Geben Sie die Menge aller (a, c_1, c_2, c_3) an, für die A eine Dichtematrix ist! Wie lässt sich diese Menge geometrisch leicht darstellen/vorstellen?

4. Transformieren Sie die Quadrik

$$4\,{x_1}^2 + 2\,x_1\,x_2 + 4\,{x_2}^2 + 2\,x_1 + 7\,x_2 + 1 = 0$$

durch eine Drehung und eine Verschiebung auf Koordinaten, in denen offensichtlich ist, um welche Art von Punktmenge es sich handelt!

5. Wie sieht der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ aus? Skizzieren Sie ihn (ohne Technologie) und erklären Sie, warum er so aussieht, wie er aussieht!

6. Bestimmen Sie (ohne Technologie) die Höhenlinien der folgenden Funktionen und machen sie jeweils eine Skizze!

   (i) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = 2\,x_1 - 3\,x_2$.

   (ii) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x_1, x_2) = \exp\left({x_1}^2 - x_2\right)$.

7. Bei der Untersuchung einer reellwertigen Funktion f in zwei Variablen können Polarkoordinaten gute Dienste leisten. Anstelle von f betrachtet man dann die Funktion $\widetilde{f} = f \circ p$ mit $p : (r, \varphi) \mapsto (r\,\cos(\varphi), r\,\sin(\varphi))$, wobei gegebenenfalls Einschränkungen der Definitionsbereiche von f und p zu berücksichtigen sind. Betrachten Sie die (auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten) Funktionen

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{{x_1}^2 - {x_2}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2} & \text{wenn } (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\right)}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}} & \text{wenn } (x_1, x_2) \neq 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (i) Rechnen Sie sie in Polarkoordinaten um und schließen Sie daraus (zunächst ohne Technologie-Hilfe), wie ihre Graphen aussehen!

   (ii) Erstellen Sie mit einem Computerprogramm Ihrer Wahl 3D-Graphiken, die die Graphen dieser Funktionen zeigen!

8. Seien $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\omega > 0$ fix vorgegeben. Die Variable t stelle die Zeit dar. Für jeden Zeitpunkt $t \in \mathbf{R}$ wird die Funktion

$$\Phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \Phi_t(\mathbf{x}) := \sin\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega\,t\right)$$

   betrachtet. Der Ausdruck $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega\,t$ wird als „Phase“ bezeichnet. Wie sehen die Flächen konstanter Phase aus und wie ändern sie sich im Laufe der Zeit?