Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 5

Da die im Buch verwendete Notation für Darstellungsvektoren und -matrizen handschriftlich etwas sperrig ist, wird die in der Vorlesung vereinbarte alternative Schreibweise: $[v]_B$ statt ${}_Bv$ und $[\varphi]_{C,B}$ statt ${}_CM(\varphi)_B$ benutzt.

1. Gegeben ist die lineare Abbildung $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\tau \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

   (i) Bestimmen Sie den Kern von τ. Ist τ injektiv?
   (ii) Bestimmen Sie das Bild von τ. Ist τ surjektiv?

2. Bestimmen Sie Kern und Bild der durch die Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ definierten linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, indem Sie

   (i) jeweils eine Basis dafür angeben
   (ii) und diese beiden Untervektorräume mit Mitteln des Mathematikunterrichts charakterisieren!

3. Auf dem reellen Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der Menge aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3 wird die Operation des Ableitens betrachtet: $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3,\ D(p) := p'$. Bestimmen Sie Kern und Bild von D.

4. Geben Sie eine lineare Abbildung an, für die Kern und Bild identisch sind! Was passiert, wenn so eine Abbildung zweimal angewandt wird?

   Tipp: Wie muss eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf die Vektoren der Standardbasis wirken, damit ihr Kern und ihr Bild gleich der x_1-Achse sind?

5. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie (und begründen Sie jeweils mit einem Beispiel oder mit einem Gegenargument), welche der folgenden Situationen möglich sind und welche nicht:

   (i) $\dim(V) < \dim(W)$ und φ ist surjektiv.
   (ii) $\dim(V) > \dim(W)$ und φ ist surjektiv.
   (iii) $\dim(V) < \dim(W)$ und φ ist injektiv.
   (iv) $\dim(V) > \dim(W)$ und φ ist injektiv.

6. Auf dem reellen Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Menge aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 wird die Operation des Ableitens betrachtet: $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2,\ D(p) := p'$.

   (i) Geben Sie $[D]_{B,B}$ für die geordnete Basis $B = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ an!

   (ii) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass $[D^2]_{B,B} = [D]_{B,B}{}^2$ und $[D^3]_{B,B} = [D]_{B,B}{}^3$ gilt!

   (iii) Sei q die durch $q(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 7$ gegebene Polynomfunktion. Bestimmen Sie $[q]_B$ und $[q']_B$ und stellen Sie die Beziehung

$$\frac{d}{dx}\left(3\,x^2 - 5\,x + 7\right) = 6\,x - 5$$

   in Matrixform bezüglich der geordneten Basis B dar!

7. Seien $\mathcal{P}_2$, D und B wie in Aufgabe 6. Es wird nun auch eine andere geordnete Basis von $\mathcal{P}_2$ betrachtet: $C = (x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 - x, x \mapsto x^2)$.

   (i) Bestimmen Sie $[D]_{C,C}$.

   (ii) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix S.

   (iii) Verifizieren Sie durch explizite Berechnung mit den Ergebnissen von (i) und (ii), dass $[D]_{C,C} = S^{-1}\,[D]_{B,B}\,S$ gilt!

8. Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$, $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller linearen Abbildungen $V \to W$ werde mit $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet. Weiters sei B eine geordnete Basis von V und C eine geordnete Basis von W.

   (i) Beweisen Sie, dass für beliebige lineare Abbildungen φ und ψ von V nach W und für beliebige $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$[\varphi + \psi]_{C,B} = [\varphi]_{C,B} + [\psi]_{C,B} \qquad \text{und} \qquad [\lambda\,\varphi]_{C,B} = \lambda\,[\varphi]_{C,B}.$$

   Damit ist gezeigt, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathbb{K}^{m \times n},\ \ \Phi(\chi) := [\chi]_{C,B}$$

   linear ist. Ist sie

   (ii) surjektiv?

   (iii) injektiv?

   (iv) bijektiv?