Universität Wien, WS 2019/20

Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

Übungstermin 3

1. Zeigen Sie, dass die Menge aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form
$$x \mapsto a\,\sin(x+b) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$
(ausgestattet mit den für Funktionen üblichen Operationen „Summe“ und „Multiplikation mit einer Zahl“) ein reeller Vektorraum ist und geben Sie eine Basis für ihn an!

   Tipp: Benutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus einer Summe!

2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Man nennt dann Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ zueinander äquivalent (Schreibweise $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$), wenn ihre Differenz in U liegt. Formal wird also definiert:
$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \;:\Leftrightarrow\; \mathbf{u} - \mathbf{v} \in U.$$
   (i) Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gilt:

      1.) $\mathbf{u} \sim \mathbf{u}$.
      2.) Aus $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ folgt $\mathbf{v} \sim \mathbf{u}$.
      3.) Aus $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ und $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ folgt $\mathbf{u} \sim \mathbf{w}$.

      Anmerkung: Damit ist gezeigt, dass $\sim$ eine *Äquivalenzrelation* ist. Die *Äquivalenzklasse* eines Vektors $\mathbf{v} \in V$, d.h. die Menge aller zu $\mathbf{v}$ äquivalenten Vektoren, ist genau der affine Teilraum $\mathbf{v} + U$.

   (ii) Wie ist $\sim$ für den Fall ($V = \mathbb{R}^3$, $U = z$-Achse) geometrisch zu deuten?

3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Weiters seien T_1 und T_2 affine Teilräume von V mit Richtung U. Wählt man $\mathbf{v_1} \in T_1$ und $\mathbf{v_2} \in T_2$, so kann man versuchen, mittels
$$(\mathbf{v_1} + U) + (\mathbf{v_2} + U) := (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) + U$$
affine Teilräume zu addieren.

   (i) Zeigen Sie, dass diese Summenbildung von den gewählten Vektoren $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ (den *Repräsentanten* von T_1 und T_2) nicht abhängt!
   (ii) Für den Fall ($V = \mathbb{R}^2$, $U =$ Gerade durch den Ursprung) machen Sie eine Skizze, die diese Unabhängigkeit von den Repräsentanten geometrisch illustriert!

4. Berechnen Sie die folgenden Produkte von Matrizen:
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad (-2\;\; 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} (2\;\; -1)$$

5. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ihre Potenzen $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ und $\mathbf{A}^4$! Geben Sie ganz allgemein $\mathbf{A}^r$ für $r \in \mathbb{N}$ an[1]! Was folgt daraus für die Potenzen der Matrix $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

6. Lesen Sie im Buch ab Seite 512 nach, was der *Rang* einer Matrix ist und bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

auf dem Papier!
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Nachrechnen der Beziehung $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{E_3}$

(i) auf dem Papier,
(ii) mit Hilfe des Computeralgebra-Systems *Mathematica* oder mit *WolframAlpha*,
(iii) mit Hilfe des Computeralgebra-Systems von *GeoGebra*.

(Informieren Sie sich bei Bedarf selbst über die Syntax dieser Programme für die Eingabe und Multiplikation von Matrizen!)

8. Beweisen Sie die Regel $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ für das Transponieren von Produkten von Matrizen!

9. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\mathbf{S}_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Zeigen, Sie dass $\mathbf{S}_\alpha\mathbf{S}_\beta = \mathbf{S}_{\alpha+\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

10. Welche der folgenden Matrizen sind (i) symmetrisch, (ii) antisymmetrisch[2], (iii) orthogonal?

$$\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, wobei $\mathbf{G}$ eine orthogonale 2×2-Matrix ist.

---

[1] Im Buch wird die Konvention $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ verwendet (siehe Seite 31).

[2] Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *antisymmetrisch*, wenn $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.