universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Die Entwicklung mathematischer Konzeptvorstellungen von rechenbetonten Prozessen zu abstrakten Objekten

Analyse von Aufgaben der Sekundarstufe zum Thema Funktionen

Verfasser

Valentin Parzer

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreuer:	Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Errata

- Seite 15, die Definition komplementärer Vektorräume lautet richtig:

  > DEFINITION: Sei V ein *Vektorraum* über einem *Körper* $\mathbb{K}$ und $W \subset V$ ein *Teilraum*. Ein *Teilraum* $W' \subset V$ heißt *komplementär zu* W oder ein *Komplement für* W, wenn $W + W' = V$ und $W \cap W' = \{0\}$ gilt.

- Seite 42, Abbildung 3.7: Die Abbildungsbeschriftungen „fähige Kinder“ und „weniger fähige Kinder“ müssen vertauscht werden.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile: eine Literaturrecherche, die unterschiedliche Theorien zur Entwicklung mathematischer Konzepte vorstellt, und - basierend darauf - eine Analyse von Aufgaben der Sekundarstufe zum Thema Funktionen.

In Kapitel 2 werden zwei unterschiedliche Sichtweisen illustriert, in denen abstrakte mathematische Konzepte wie Zahlen oder Funktionen betrachtet werden können: die operationelle und die strukturelle Sichtweise. In der operationellen Sichtweise werden Konzepte durch Handlungen, Aktionen und Prozesse erfasst, wogegen diese in der strukturellen Sichtweise als statische abstrakte Objekte begriffen werden. Für das vollständige Verständnis eines Konzeptes sind beide Sichtweisen notwendig.

Kapitel 3 befasst sich sowohl mit historischen als auch mit psychologischen Untersuchungen zur Entwicklung einiger zentraler mathematischer Konzepte. Sowohl historische Fakten zur Entwicklung der Zahlen und der Algebra (Kapitel 3.1) als auch eine Studie zu verwendeten Lösungsstrategien für einfache Additionsaufgaben und Studien zu Problemen beim Verständnis algebraischer Konzepte von Kindern und Jugendlichen (Kapitel 3.2) deuten darauf hin, dass operationelle Konzeptionen den strukturellen vorausgehen. Der Übergang von operationellen zu strukturellen Konzeptionen ist mit vielfältigen Schwierigkeiten verbunden, die manchmal nicht vollständig überwunden werden können.

Schließlich werden zwei Theorien vorgestellt - die Theorie der Reifikation und die APOS-Theorie - welche diese Entwicklung berücksichtigen (Kapitel 3.3).

Im praktischen Teil werden insgesamt 135 Aufgaben aus österreichischen Schulbüchern der Sekundarstufe und 43 Übungsaufgaben zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung zum Thema Funktionen untersucht. Es wird analysiert, welche Aufgaben operationelle Konzeptionen und welche strukturelle Konzeptionen des Funktionsbegriffs fördern.

Dazu wird in Kapitel 5, basierend auf den vorgestellten Theorien, ein hierarchisches Modell mit den Stufen *Direkt gelenkte Aktionen* (operationell), *Selbstgeleitete Prozesse* (operationell) und *Eigenständige Denkobjekte* (strukturell) zur Einteilung der Aufgaben erstellt.

Im ersten Teil der Analyse (Kapitel 6.1) ergibt sich, dass österreichische Schulbücher durch ihren Aufbau eine Entwicklung entsprechend dem erstellten Modell in Grundzügen unterstützen. Allerdings fördern gerade die Themenbereiche *Lineare Funktionen* und *Exponential- und Logarithmusfunktionen*, welche beinahe 40% aller relevanten Aufgaben zum Thema Funktionen enthalten, die Sichtweise *Eigenständiger Denkobjekte* kaum.

Im zweiten Teil (Kapitel 6.2) werden Funktionsaufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* gezielt untersucht und kategorisiert. Dabei ergibt sich, dass vor allem innermathematische Aufgaben die Sichtweise *Eigenständiger Denkobjekte* unterstützen.

Im dritten Teil der Analyse (Kapitel 6.3) ergibt sich, dass Übungsaufgaben zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung, aufgrund kleinschrittig formulierter Arbeitsanweisungen, meist wenig Handlungsspielraum lassen und somit sehr wenige Aufgaben die Sichtweise *Selbstgeleiteter Prozesse* fördern. Hingegen unterstützen im Vergleich zu den Schulbuchaufgaben etwas mehr Aufgaben die Sichtweise *Eigenständiger Denkobjekte*.

Abstract

The thesis consists of two parts: a literary research, which shows different theories for the development of mathematical concepts as well as a practical analysis of function-oriented school exercises of the Austrian secondary education.

Chapter 2 illustrates two different views of abstract mathematical concepts like numbers or functions: the operational and the structural view. The operational view comprehends concepts through operations and processes, while the structural view conceives them as static abstract objects. To fully understand a concept, both views are required.

Chapter 3 deals with both historic and psychologic studies about the development of several central mathematical concepts. Both historic facts about the evolution of numbers and algebra (Chapter 3.1) as well as a study about solution strategies for simple addition exercises, and studies about problems children or adolescents have when trying to understand algebraic concepts suggest that operational conceptions precede the structural ones. The transition from operational to structural conceptions comes with difficulties that sometimes cannot be fully overcome.

Finally, two theories regarding this transition are presented: the theory of reification and the APOS Theory.

The practical part of the thesis analyzes a total of 135 exercises from schoolbooks of the Austrian secondary education, and 43 examination questions from the standardized written school leaving examination. All of the exercises are on the subject of functions. The analysis shows which exercises promote operational conceptions, and which ones promote structural conceptions of mathematical functions.

For this analysis, Chapter 5 creates a hierarchical model based on the previously introduced theories consisting of the stages “directly guided actions” (operational), “self-directed processes” (operational), and “full-fledged thought objects” (structural) for the classifications of the exercises.

The first part of the analysis (Chapter 6.1) shows, that the structure of Austrian schoolbooks generally supports a development according to the presented model. However, the topics “linear functions” and “exponential and logarithmic functions” — which contain about 40% of all relevant function-oriented exercises — hardly support the structural stage of “full-fledged thought objects”.

The second part of the analysis (Chapter 6.2) examines and categorizes function-related exercises corresponding to the stage “full-fledged thought objects”. In doing so, it shows that the stage “full-fledged thought objects” is promoted mostly by innermathematical exercises.

In the third part of the analysis (Chapter 6.3), it appears that exercises for the standardized written school leaving examination leave less radius of operation due to smaller steps in the exercise descriptions. This leads to many exercises not promoting the “self-directed processes” stage. In comparison to the exercises from schoolbooks, however, slightly more exercises promote the “full-fledged thought object” stage.

Danksagung

Trotz meiner kurzen Wien-Aufenthalte und seines vollen Terminkalenders konnte ich mit meinem Betreuer Franz Embacher immer flexibel Diplomarbeitstreffen vereinbaren. Unsere Besprechungen fanden stets in sehr entspannter Atmosphäre statt und ich erhielt von ihm durch viel konstruktive Kritik immer wieder neue Motivation. Dafür möchte ich mich sehr herzlich bedanken.

Meine Eltern haben mich während meiner gesamten Studienzeit unterstützt. Vor allem für die Selbstverständlichkeit, mit der sie das immer getan haben, möchte ich mich bedanken.

Ich danke meiner Tante Efi für das Korrekturlesen dieser Arbeit und vor allem für das Einfügen zahlloser Beistriche.

Zuletzt möchte ich meiner Freundin danken, die maßgeblich dazu beigetragen hat, dass die vergangene Zeit, in der ich meine Diplomarbeit geschrieben habe, auch eine schöne Zeit war.

Inhaltsverzeichnis

I. Theorien zur Entwicklung mathematischer Konzepte
Von rechenbetonten Prozessen zu mathematischen Objekten 11

1. Einleitung 12

2. Prozess-Objekt-Dualität 14
2.1. Mathematische Objekte 14
2.2. Zweideutigkeit mathematischer Symbole 20

3. Entwicklung struktureller Ansätze 27
3.1. Historische Entwicklung mathematischer Konzepte 28
3.1.1. Entwicklung der Zahlen 28
3.1.2. Entwicklung der Algebra 32
3.2. Psychologische Entwicklung mathematischer Konzepte 36
3.2.1. Lösungsstrategien für einfache Additionsaufgaben 37
3.2.2. Schwierigkeiten bei der Entwicklung algebraischer Konzepte 44
3.3. Modelle zur Entwicklung mathematischer Konzepte 51
3.3.1. Theorie der Reifikation 54
3.3.2. APOS-Theorie 57

II. Analyse von Aufgaben der Sekundarstufe zum Thema Funktionen 61

4. Einleitung und Motivation 62

5. Modell zur Einteilung von Funktionsaufgaben 64
5.1. Direkt gelenkte Aktionen 66
5.2. Selbstgeleitete Prozesse 67
5.3. Eigenständige Denkobjekte 69

6. Analyse mathematischer Aufgaben der Sekundarstufe 70
6.1. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs anhand von Schulbuchaufgaben . . 70
6.2. Aufgabenformate zur Stufe *Eigenständige Denkobjekte* 78
6.3. Vergleich mit Übungsaufgaben zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung 82

7. Resümee 92

Teil I.

Theorien zur Entwicklung mathematischer Konzepte

Von rechenbetonten Prozessen zu mathematischen Objekten

1. Einleitung

Es ist nun mehr als 100 Jahre her, dass der bekannte französische Mathematiker Henri Poincaré folgende Frage formulierte:

> One [. . .] fact must astonish us, or rather would astonish us if we were not too much accustomed to it. How does it happen that there are people who do not understand mathematics? If the science invokes only the rules of logic, those accepted by all well-formed minds, [. . .] how does it happen that there are so many people who are entirely impervious to it? (Poincaré 1914, S. 46-47)

Trotz all dem Wissen, das seither von Didaktiker/inne/n und Psycholog/inn/en angesammelt wurde, ist die Frage heute genauso fordernd wie damals. Die besondere Komplexität mathematischer Denkweisen, die allgegenwärtigen, manchmal unüberwindbaren Schwierigkeiten, die von Lernenden empfunden werden, und damit verbundene Misserfolge, die Lehrende oft plagen, scheinbar einfache Konzepte zu vermitteln - all diese Umstände sind unbestritten, ihre Ursachen jedoch noch lange nicht vollständig geklärt. (vgl. Sfard 1991, S. 1)

Die Mathematikdidaktik ist eine sehr junge Wissenschaft. Entscheidende Voraussetzungen für die Entfaltung der Mathematikdidaktik als Forschungsgebiet im deutschsprachigen Raum waren erst im 19. Jahrhundert gegeben, als sich die Mathematik als Schulfach im heutigen Sinn konstituierte. Seit 1870 hatten die frühen Didaktikerinnen und Didaktiker mit dem Magazin „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ („Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminaren und gehobenen Bürgerschulen“) erstmals ein gemeinsames Organ. 1908 wurde länderübergreifend die „Internationale Mathematische Unterrichtskommission“ mit Felix Klein als ihrem ersten Präsidenten gegründet. Zu dieser Zeit hielt Klein auch erstmals seine berühmten Vorlesungen über „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts führten vor allem die Bemühungen um die Elementarmathematik zu ersten Ansätzen einer hochschulmäßigen Institutionalisierung der Mathematikdidaktik. Rudolf Schimmack erhielt 1911 mit Kleins Unterstützung die Lehrberechtigung für das Fach „Didaktik mathematischer Wissenschaften“. Seit 1912 gab es auch einen Dozenten an der Universität in München für dieses neue Fach. In den 60er Jahren erfolgte ein lehrstuhlmäßiger Ausbau der Mathematikdidaktik an pädagogischen Hochschulen. Erst die Integration dieser führte dazu, dass auch an einzelnen Universitäten Lehrstühle und Abteilungen für Mathematikdidaktik entstanden. (Steiner 1978, S. IX-XXIX) In Österreich habilitierte Heinrich Bürger 1980 zum ersten Dozenten für Didaktik der Mathematik. 1991 erhielt er die erste Professur, die ausschließlich diesem Gebiet gewidmet war. (Fischer 1996, S. 9-11)

Die Entwicklung der Mathematikdidaktik bringt mit sich, dass heute wesentlich mehr Ressourcen für die Verbesserung von Mathematikunterricht aufgebracht werden als noch vor 100 Jahren. Dennoch ist die Antwort auf die schlichte Frage, wieso so viele Menschen Mathematik anscheinend einfach nicht verstehen, wieso sie völlig unzugänglich gegenüber Mathematik sind, immer noch schwer fassbar. Möglicherweise erfordert Mathematik eben doch mehr als das strikte Befolgen der Regeln der Logik. Tatsächlich übertrifft die Mathematik in ihrer Unzugänglichkeit sämtliche anderen Wissenschaften. Zwölfjährige Schülerinnen und Schüler, die davon überzeugt sind, dass „Mathematik einfach nichts für sie ist", Studierende, die bereits bei der Wahl ihres Studiums auf die Vermeidung jeglicher Mathematik bedacht sind, Personen des öffentlichen Lebens, die nebenbei erwähnen, dass sie „Mathematik eh nie verstanden haben" - solche und ähnliche Fälle legen die Vermutung nahe, dass irgendetwas ganz Besonderes an mathematischen Denkweisen sein muss, das diese für viele Menschen so schwierig macht.

Um die Quellen dieser vermeintlich überraschenden Schwierigkeiten zu ergründen, muss die grundlegende erkenntnistheoretische[1] Frage nach der Natur mathematischen Wissens gestellt werden. Was ist es, das Mathematik für viele so schwierig macht, das mathematische Denkweisen so grundlegend von denen aller anderen Wissenschaften unterscheidet? Die naheliegende Antwort, nämlich dass Mathematik die abstrakteste aller Wissenschaften ist, hat wenig Erklärungskraft und verschiebt das Problem nur: *Was macht mathematische Abstraktion so besonders und außerordentlich, was zeichnet sie aus, was ist ihre Natur?* (vgl. Sfard 1991, S. 1-2)

Der Versuch, eine konstruktive Antwort auf diese Frage zu finden, ist der Ausgangspunkt des theoretischen Teils dieser Arbeit. Eine Recherche in der aktuellen Fachliteratur wird letztendlich zu erkenntnistheoretischen Modellen zur Entwicklung mathematischer Konzepte führen.

[1] Erkenntnistheorie: Hauptgebiet der Philosophie, das untersucht, *wie* wir zu Wissen bzw. Erkenntnis über uns und die Welt gelangen und welche Bedingungen dafür erfüllt sein müssen (vgl. Rehfus 2003, S. 332)

2. Prozess-Objekt-Dualität

2.1. Mathematische Objekte

Um der Frage weiter nachzugehen und um zu ergründen, wie die Konstruktion von mathematischen Vorstellungen und Ideen stattfindet, wird es nötig sein, je nach Betrachtungswinkel zwischen zwei Ausdrücken zu unterscheiden. Der Begriff „Konzept“ wird immer dann verwendet, wenn eine mathematische Idee in ihrer „offiziellen Form“ gemeint ist, als theoretisches Konstrukt im „Universum des idealen formalen Wissens“. Die Anhäufung aller innerlichen Vorstellungen und Assoziationen, die vom Konzept hervorgerufen werden - das Gegenstück zum Konzept im innerlichen, subjektiven „Universum menschlicher Kenntnisse“ - wird als „Konzeption“ bezeichnet. (Sfard 1991, S. 3)

Betrachtet man die Welt der Mathematik, wie sie sich durch formale Beschreibungen und Repräsentanten zeigt, so erkennt man zumindest sprachlich mehr Gemeinsamkeiten zu anderen Wissenschaften als Unterschiede. Tatsächlich neigen Mathematiker/innen genau wie Physiker/innen oder Biolog/inn/en dazu, über ein genau festgelegtes Universum, das von bestimmten Objekten bevölkert wird, zu sprechen. Diese Objekte haben gewisse Eigenschaften und folgen wohldefinierten Regeln. Während das Universum einer Biologin oder eines Biologen von Tieren, Pflanzen, usw. bevölkert wird, wird das der Mathematikerin oder des Mathematikers von Zahlen, Funktionen, Mengen und dergleichen bewohnt. Während ein Hund gewisse Eigenschaften wie „hat vier Beine“, „hat eine Schnauze“, „kann bellen“, ... besitzt, zeichnet sich eine lineare Funktion durch Eigenschaften wie „hat eine konstante Steigung“, „Graph ist eine Gerade“, „Definitionsbereich sind alle reellen Zahlen“ aus. Sowohl in der Biologie als auch in der Mathematik kann man festlegen, was ein Hund, bzw. was eine lineare Funktion ist. Ausdrucksweisen wie „Es existiert eine Funktion f für die gilt ... “ sind in der Mathematik genauso üblich wie Behauptungen über die Existenz bestimmter subatomarer Teilchen in der Physik. (vgl. ebd., S. 3)

Anders als materielle Objekte sind mathematische Konstrukte jedoch vollständig unerreichbar für unsere Sinne. Lediglich durch unsere Vorstellungskraft werden sie für das innere Auge sichtbar. Selbst wenn der Graph einer Funktion in ein Koordinatensystem gezeichnet wird, oder eine Zahl auf einem Blatt Papier geschrieben wird, handelt es sich dabei lediglich um eine von vielen möglichen Repräsentationen des abstrakten zugrundeliegenden Gebildes, das weder gesehen noch berührt werden kann. Trotzdem behandeln Mathematikerinnen und Mathematiker diese Objekte gänzlich als ob sie real wären, stellen Behauptungen über deren Existenz und Eigenschaften auf, ohne sich weitere Gedanken darüber zu machen. Die Fähigkeit, eine Welt von pseudorealen mathematischen Objekten zu kreieren, in der Mathematik ähnliche Strukturen wie in der realen Welt zu schaffen, scheint eine essentielle Komponente mathematischen Vermögens zu sein. Die

Unfähigkeit, mathematische Gedanken und Ideen als eigenständige Objekte zu betrachten, könnte ein Grund für das Scheitern Vieler sein. (vgl. ebd., S. 3)

Die Sichtweise mathematischer Konzepte als ein Netz von unterschiedlichen, miteinander in Beziehung stehenden Objekten mit wohldefinierten Eigenschaften überwiegt in der Hochschulmathematik, sie wird zukünftig als „strukturelle Konzeption“ bezeichnet. (ebd., S. 4) Anhand der nachfolgenden Definition aus einer Einführungsvorlesung in die lineare Algebra an der Universität Wien soll der Begriff verdeutlicht werden.

> DEFINITION: Sei V ein *Vektorraum* über einem *Körper* $\mathbb{K}$ und $W \subset V$ ein *Teilraum*. Ein *Teilraum* $W' \in V$ heißt *komplementär zu* W oder ein *Komplement für* W, wenn $W + W' = V$ und $W \cap W' = \emptyset$ gilt.

In der Definition werden die mathematischen Ausdrücke Körper, Vektorraum, Teilraum und Komplement bedenkenlos wie Begriffe aus dem Alltag verwendet und zueinander in Beziehung gesetzt: Der Vektorraum *spannt sich über dem* Körper auf, der Teilraum *ist im Körper enthalten*, die beiden Teilräume *müssen gewisse Bedingungen erfüllen*, damit sie als komplementär bezeichnet werden. Um die Definition zu verstehen, muss eine Lernende oder ein Lernender Erfahrung mit den einzelnen Begriffen haben, ihre Eigenschaften und Vertreter kennen. So kann ein inneres Bild entstehen, die Begriffe nehmen in der Vorstellung Gestalt an. Diese internen Objekte (Teilräume) werden miteinander in Verbindung gebracht; besteht eine bestimmte Beziehung, kann diese durch einen Fachbegriff (komplementär) prägnant ausgedrückt werden. Wie leicht das Verständnis der Definition fällt, ist maßgeblich von der Fähigkeit, mit den Begriffen eine Vorstellung zu verbinden, abhängig. Das zeigt auch die folgende abgeänderte Definition:

> DEFINTION: Sei V eine *Tierherde* über einem *zugefrorenen See* und $W \subset V$ ein *Eisbär*. Ein *Eisbär* W' enthalten in V heißt *palenk* zu W oder ein *Palenkat* für W, wenn W und W' dieselbe Augenfarbe, aber unterschiedliches Geschlecht haben.

In dieser Definition wurden die mathematischen Fachbegriffe durch wohlbekannte Alltagsausdrücke wie Tierherde, zugefrorener See und Eisbär ersetzt. Aufgrund sehr konkreter Vorstellungen der Begriffe kann das neue Vokabel schon nach einmaligem Durchlesen problemlos verstanden werden. Ähnlich verhält es sich auch bei erfahrenen Mathematikerinnen und Mathematikern, bei ihnen sind die verwendeten Begriffe bereits als mentale Objekte mit genau definierten Eigenschaften existent. Während aber eine genaue Vorstellung von einem realen Objekt wie einem Eisbär recht einfach zu erlangen ist - man braucht ihn nur einmal zu betrachten - ist die Schöpfung interner mathematischer Objekte wesentlich schwieriger, da diese in unserer realen Welt nicht existent sind. Auf die Frage, wie sich mentale mathematische Objekte entwickeln können, wird in Kapitel 3 näher eingegangen. Falls es Lernenden nicht möglich ist, die Begriffe mit ihren Eigenschaften als Objekte vor dem inneren Auge zu betrachten, so können sie diese auch nicht in Beziehung setzen, und die gesamte Definition wird für sie womöglich wenig Sinn machen.

Die strukturelle Konzeption, in der Hochschule favorisiert, ist nicht die einzig mögliche Sichtweise. Eine nähere Betrachtung von mathematischen Texten und Definitionen zeigt, dass es auch in der modernen Mathematik Definitionen gibt, die einem völlig anderen Ansatz folgen. Eine Funktion kann nicht nur als Menge geordneter Paare, sondern auch als ein wohlbestimmter Rechenprozess oder als Methode, um von einem System in ein anderes zu gelangen, definiert werden (Skemp 1986, S. 231). Symmetrie kann als statische Eigenschaft einer geometrischen Form oder auch als eine Art Abbildung aufgefasst werden. Die Definition einer Funktion als Menge geordneter Paare, bzw. die Symmetrie als statische Eigenschaft eines geometrischen Körpers, forcieren klar die strukturelle Konzeption. Die Definitionen der Funktion als Rechenprozess bzw. als Methode, um von einem System in ein anderes zu gelangen, und der Symmetrie als Transformation, lassen aber eher auf Prozesse, Algorithmen und Aktionen schließen und weniger auf Objekte. Diese völlig andere Konzeption stellt viel stärker die Tätigkeiten und Operationen in den Vordergrund. Sie wird im Folgenden als „operationelle Konzeption" bezeichnet. (Sfard 1991, S. 4)

Folgendes Beispiel stammt aus einem Schulbuch und soll die operationelle Konzeption verdeutlichen.

> BEISPIEL: Zwei zylindrische Tanks mit gleicher Grundfläche werden mit einer Flüssigkeit gefüllt. Im ersten Tank befinden sich zu Beginn 1000l und pro Minute fließen 250l zu. Der zweite Tank ist zu Beginn leer und pro Minute fließen 500l zu. Beantworte rechnerisch und grafisch:
>
> 1. Nach welcher Zeit enthalten beide Tanks gleich viel Flüssigkeit?
> 2. Zu welchen Zeitpunkten unterscheiden sich die beiden Tankinhalte um 125l?
>
> (Malle u. a. 2010a, S. 163)

Die Lösung der ersten Teilaufgabe (nach 4min) ist noch relativ einfach durch Probieren zu erraten. Nachdem in den zweiten Tank pro Minute um 250l mehr fließen als in den ersten und sich die Fülldifferenz der beiden Tanks somit in einer halben Minute um 125l verschiebt, könnte auch die zweite Teilaufgabe durch diese Überlegung beantwortet werden (3,5min bzw. 4,5min). Um die Aufgabenstellung *rechnerisch* zu lösen, müssen aber zwei Füllfunktionen für die beiden Tanks aufgestellt werden.

> MUSTERLÖSUNG:
>
> Aufstellen der Funktionsgleichungen:
>
> $$f(x) = 250x + 1000$$
> $$g(x) = 500x$$
>
> Gleichsetzen der Funktionsgleichungen und anschließende Auflösung der Gleichung nach x liefert die erste Teillösung.
>
> $$\begin{aligned} 250x + 1000 &= 500x && \mid -250x \\ 1000 &= 250x && \mid : 250 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Für die zweite Teillösung müssen 125l zu einer Seite der Gleichung hinzugezählt bzw. abgezogen werden.

$$\begin{aligned} 250x + 1000 + 125 &= 500x && \mid -250x \\ 1125 &= 250x && \mid : 250 \\ x &= 4,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 250x + 1000 - 125 &= 500x && \mid -250x \\ 875 &= 250x && \mid : 250 \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

Die Musterlösung macht deutlich: Funktionsgleichungen müssen anhand der Angaben im Text *aufgestellt* werden, diese müssen *gleichgesetzt* und anschließend *umgeformt* und nach x *aufgelöst* werden. All das sind Tätigkeiten. Natürlich können routinierte Mathematikerinnen und Mathematiker auch in dieser Aufgabe sofort mathematische Objekte wie die Funktionsgleichung ausmachen. Lernende müssen zum Auffinden der Lösung diese Objekte jedoch nicht erkennen, verwenden, oder zu etwas in Beziehung setzen. Es steht das schrittweise Ausführen einer Rechenprozedur im Vordergrund. Schulbuchaufgaben dieser Art betonen die operationelle Konzeption mathematischer Konzepte.

An dieser Stelle soll explizit betont werden, dass die Unterscheidung zwischen strukturellen und operationellen Konzeptionen nicht als Unterscheidung zwischen abstrakten Definitionen an der Hochschule und Rechenbeispielen an der Grundschule oder Sekundarstufe missverstanden werden darf. Ein und dieselbe mathematische Definition kann sowohl strukturell als auch operationell aufgefasst werden, wobei viele Definitionen natürlich klar die strukturelle Konzeption fördern und auch benötigen. Umgekehrt kann beim Lösen jedes Rechenbeispiels sowohl strukturell als auch operationell gedacht werden, wobei viele Rechenbeispiele aufgrund ihres Aufbaus die operationelle Sichtweise hervorheben.

In den vergangenen Jahrzehnten haben eine Vielzahl von Forscherinnen und Forschern untersucht, wie mentale Objekte individuell konstruiert werden und welcher Zusammenhang zu mathematischen Aktionen, Tätigkeiten und Prozessen gegeben ist. Im Folgenden werden einige wichtige Vertreter genannt.

Piagets „reflexive Abstraktion“ beschreibt die Bildung sogenannter „mathematischer Strukturen“ im Verlauf der kognitiven Entwicklung. Diese mathematischen Strukturen sind Objekte der Reflexion seitens der Mathematiker/innen, mit denen sich diese eine Theorie konstruieren. Im Unterschied zur nicht Mathematik-spezifischen „empirischen Abstraktion“, bei der die Gemeinsamkeiten von mehreren (realen) Objekten erkannt werden und zur Bildung neuer Strukturen und Begriffe führen, beginnt die reflexive Abstraktion bei Operationen und Aktionen. Prozesse einer niedrigeren Stufe werden zusammengefasst und generalisiert und so auf einer höheren Ebene neu konstruiert. Es entstehen mathematische Strukturen, die neue Funktionalitäten bieten. Diese sind wiederum Basis für Prozesse höherer Stufe. (Beth und Piaget 1966, S. 186-190)

Dienes folgt gedanklich Piaget und formuliert den Sachverhalt durch eine grammatikalische Metapher: „Prädikate werden Subjekte für andere Prädikate, die ihrerseits wieder Subjekte für weitere Prädikate werden, und der Himmel ist die Grenze in diesem mathematischen Rennen. Menschen, die gut Prädikate zähmen und auf den Stand eines Subjekts reduzieren können, sind gute Mathematiker.“ (Dienes 1965, S. 34)

In seiner Theorie, wie Schülerinnen und Schüler Kompetenzen im Umgang mit mathematischen Symbolen entwickeln, erkennt Hiebert (1988, S. 333-346) eine Abfolge von fünf kognitiven Prozessen. Zuerst müssen mathematische Aktionen und Größen mit bestimmten Symbolen verknüpft werden, danach wird die Fähigkeit gebildet, Operationen mit den Symbolen auszuführen, diese erlangen dadurch Bedeutung. In den nächsten beiden Schritten werden die Symbol-Prozeduren zuerst weiterentwickelt, anschließend wird durch viel Übung Routine erlangt. Schließlich können die bereits entwickelten Symbole verwendet werden, um neuere, abstraktere Symbole zu begründen und mit Bedeutung zu versehen.

Davis (1990) fasst den Übergang von einer Prozedur zu einer Entität wie folgt zusammen:

> When a procedure is first being learned, one experiences it almost one step at a time; the overall patterns and continuity and flow of the entire activity are not perceived. But as the procedure is practiced, the procedure itself becomes an entity - it becomes a *thing*. It, itself, is an input or object of scrutiny. All of the full range of perception, analysis, pattern recognition and other information processing capabilities that can be used on any input data can be brought to bear on this particular procedure. Its similarities to some other procedure can be noted, and also its key points of difference. The procedure, formerly only a thing to be done - a verb - has now become an object of scrutiny and analysis; it is now, in this sense, a noun. (ebd., S. 36-37)

Davis hebt also hervor, dass nach ausreichender Wiederholung und Übung eine Prozedur oft selbst als Ding betrachtet wird. So wird aus einer Prozedur, die ausgeführt werden muss (einem Verb), das Objekt der Untersuchung, welches als Input für weitere Analysen dient (ein Nomen).

Noch konkreter beschäftigt sich Greeno (1983, S. 227) mit der Idee mentaler Objekte. Seine „conceptual entities“ bezeichnen kognitive Objekte, die zur mentalen Beschreibung eines Problems genutzt werden. Sie können als Input für Prozeduren dienen und werden somit klar von Attributen und Relationen unterschieden. Um ihrer Bezeichnung gerecht zu werden, müssen diese konzeptionellen Entitäten permanent in der individuellen mentalen Repräsentation eines Systems existieren. Durch Verwendung unterschiedlicher Entitäten kann ein und derselbe Sachverhalt auf verschiedene Art und Weise dargestellt werden, es ergeben sich unterschiedliche Repräsentationen. Mit der „ontology of a domain“ wird schließlich festgelegt, in welcher Weise bestimmte Begriffe zur Beschreibung eines Bereichs beitragen. Sie besagt, ob Begriffe Entitäten, Attribute oder Relationen bezeichnen bzw. welche Entitäten für die Repräsentation des Systems zur Verfügung stehen.

Harel und Kaput (1991) greifen die Idee von Greeno auf und begründen eine Theorie, wie konzeptionelle Entitäten zur Entwicklung fortgeschrittener mathematischer Konzepte beitragen. Nach ihnen verkörpert die Konstruktion konzeptioneller Entitäten vertikales Wachstum mathematischen Wissens. Damit ist beispielsweise gemeint, dass der Prozess des Zählens zum mentalen Objekt der ganzen Zahlen führt. Das kognitive Objekt der ganzen Zahlen ermöglicht erst den Prozess der Division, welcher im Weiteren zu den rationalen Zahlen führt. Funktionen, ursprünglich als Beziehung zwischen zwei Objekten definiert, werden auf höherem Level selbst als Objekte betrachtet.

Im selben Jahr legt Sfard (1991), der auch die Einleitung dieser Arbeit gefolgt ist, den Grundstein zu ihrer „Theory of Reification". In der Theorie wird zwischen zwei Sichtweisen mathematischer Konzepte unterschieden: der strukturellen und der operationellen. Reifikation bezeichnet den qualitativen Sprung von der prozessorientierten Konzeption zur objekthaften Konzeption. Dieser Wechsel der Sichtweisen ist von Natur aus mit großen Schwierigkeiten verbunden, er könnte der Grund für viele Probleme sein, die von Lernenden empfunden werden. Ihre Theorie wird ausführlicher in Kapitel 3.3 dargestellt.

Unter Berücksichtigung der Entwicklung grundlegender arithmetischer Operationen wie der Addition, untersuchen Gray und Tall (1994b), wie sich lange Rechenprozeduren wie „count-all" (zähle zuerst die eine Menge, dann die andere, füge beide zusammen und zähle sie gemeinsam) schrittweise komprimieren lassen und so zu effektiven „procepts" wie der Addition führen. Ein *Prozept* ist eine Mischung aus drei Komponenten: ein *Prozess*, der ein mathematisches *Objekt* produziert und ein *Symbol*, das entweder den Prozess oder das Objekt repräsentiert. Es wird die Hypothese aufgestellt, dass der Leistungsunterschied zwischen fähigen Schülerinnen und Schülern und weniger fähigen Schülerinnen und Schülern an der Verwendung von effektiven *Prozepten* der einen bzw. aufwendigen Prozeduren der anderen liegen könnte. Siehe dazu auch Kapitel 2.2 und Kapitel 3.3.

In den Jahren 1983-1995 beschäftigen sich Dubinsky und einige Mitarbeiter mit Piagets Idee der reflexiven Abstraktion und entwickeln diese weiter zur „APOS Theory". Das Akronym steht für „Action", „Process", „Object" und „Schema", es stellt ein Rahmenprogramm für die Untersuchung der Entwicklung mathematischer Konzeptionen bei Lernenden dar. Die vier mentalen Strukturen sind als Hierarchie zu verstehen, wobei diese nicht immer eingehalten werden muss. Die Aktion stellt die unterste Stufe dar. Die APOS-Theorie wird hauptsächlich für Forschung an Lernprozessen der Hochschulmathematik eingesetzt. Sie ist das am meisten verwendete Lernmodell für mathematische Konzepte, das sich explizit mit mathematischen Objekten beschäftigt und wird auch heute noch weiterentwickelt. (Arnon u. a. 2014, S. 10-17) Die APOS-Theorie wird ausführlicher in Kapitel 3.3 beschrieben.

Jede dieser Lehr-Lern-Forscherinnen und jeder dieser Lehr-Lern-Forscher arbeitete an einer eigenen Theorie, die Gemeinsamkeiten fallen aber sofort ins Auge. Zwar werden unterschiedliche Begrifflichkeiten eingesetzt, doch jeder der Theorien liegen die beiden bereits vorgestellten Sichtweisen zugrunde: die strukturelle und die operationelle Konzeption.

Erstere bedeutet die Fähigkeit, mathematische Entitäten als Objekte zu behandeln, sie wie reale Dinge zu sehen - als statische Strukturen, die irgendwo in Raum und Zeit existieren. Es bedeutet, imstande zu sein, Ideen auf einen Blick zu erkennen, sie als Ganzes zu handhaben, ohne auf die Details zu achten. Im Gegensatz dazu bedeutet die Interpretation eines Konzeptes als Prozess, es als latente Entität anzusehen, die nur durch

	Prozess	**Objekt**
Piaget (60er)	action(s), operation(s)	mathematical structures
Dienes (60er)	predicate	subject
Davis (80er)	procedure	a thing, an entity, a noun
Greeno (80er)	procedure	conceptual entity
Harel & Kaput (90er)	process	conceptual entity
Sfard (90er)	process	object
Gray & Tall (90er)	procedure	procept
Dubinsky (90er)	action, process	object, schema

Tabelle 2.1.: Verwendete Begriffe für operationelle und strukturelle Konzeptionen von Lehr-Lern-Forscherinnen und Lehr-Lern-Forschern (vgl. Tall u. a. 1999, S. 4)

eine Reihe von Aktionen ins Leben gerufen wird. In dieser Sichtweise werden die Details des Konzeptes betrachtet, es wird Schritt für Schritt abgearbeitet, der Überblick geht verloren. Das tiefere Verständnis der Idee, die Zusammenhänge und die Hintergründe stehen nicht im Vordergrund. (vgl. Sfard 1991, S. 4)

In Tabelle 2.1 werden die verwendeten Begrifflichkeiten der unterschiedlichen Forscherinnen und Forscher chronologisch zusammengefasst. In dieser Arbeit werden die Begriffe „Prozess“ und „Objekt“ für die beiden Sichtweisen favorisiert, in wenigen Fällen kommt es aber vor, dass auch Vokabeln anderer Autorinnen und Autoren verwendet werden.

2.2. Zweideutigkeit mathematischer Symbole

Die Verbindung zwischen mathematischen Konzepten und Prozessen wurde, „sozusagen als das ‚Herz‘ der Mathematik, vor allem in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts intensiv untersucht“ (Schneeberger 2009, S. 138). Viele Lernforscher/innen und Mathematiker/innen sehen die beiden Sichtweisen nebeneinander, betrachten die Vor- und Nachteile der beiden Konzeptionen oder stellen diese gegensätzlich dar. Nach ihnen kann mathematisches Denken zweigeteilt werden, in „operatives“ und „figuratives“ (Piaget 1971, S. 14), in „relationales“ und „instrumentales“ (Skemp 2006), in „algorithmisches“ und „abstraktes“ (Halmos 1985), oder in „prozedurales“ und „konzeptuelles“ (Hiebert und Lefevre 1986, S. 1-22).

Im Gegensatz dazu kommt in den 90ern die Idee auf, die beiden Konzeptionen als eine Einheit zu betrachten, als „different sides of the same coin“ (Sfard 1991, S. 1). Die Sichtweisen werden in Anlehnung an die Physik als *komplementär* bezeichnet. Wie bei Einheiten auf subatomarer Ebene, die sowohl als Teilchen als auch als Wellen betrachtet werden müssen, um eine vollständige Beschreibung und Erklärung der beobachteten

	Strukturell	**Operationell**
Funktion	Menge geordneter Paare	Rechenprozess *oder* wohldefinierte Methode, um von einem System in ein anderes zu gelangen (Skemp 1986, S. 231)
Symmetrie	Eigenschaft einer geometrischen Form	Abbildung einer geometrischen Form
Natürliche Zahl	Element einer Menge *oder* Klasse aller Mengen mit derselben endlichen Kardinalität	0 oder jede Zahl, die man durch hinzuzählen von 1 zu einer natürlichen Zahl erhält ([das Resultat des] Zählens)
Rationale Zahl	Paare ganzer Zahlen (Element speziell definierter Mengen von Paaren	[das Ergebnis einer] Division ganzer Zahlen
Kreis	Die Linie, die sich durch alle Punkte gleicher Entfernung von einem bestimmten Punkt ergibt	[eine Kurve, die man durch] Rotation eines Zirkels um einen fixen Punkt [erhält]

Tabelle 2.2.: Strukturelle und operationelle Beschreibungen mathematischer Konzepte (Sfard 1991, S. 5)

Phänomene zu liefern, können mathematische Konzepte nur vollständig verstanden werden, wenn sowohl operative als auch strukturelle Konzeptionen präsent sind. Obwohl die beiden Sichtweisen grundverschieden und unvereinbar scheinen, herrscht eine *Dualität* zwischen ihnen. Mathematische Konzepte können sehr oft in beiden Sichtweisen definiert und durchdacht werden, *vollständig* verstanden sind sie aber nur, wenn beide Seiten berücksichtigt werden. Tabelle 2.2 zeigt einige mathematische Konzepte und ihre Darstellungen in den unterschiedlichen Sichtweisen. (vgl. ebd., S. 4-9)

Manche Autorinnen und Autoren verwenden wertende Überlegungen, wenn sie über die verschiedenen Ansätze der Mathematik schreiben. Beispielsweise werden „algorithmische“ und „abstrakte“ Mathematik teilweise wie in einem Wettkampf gegenübergestellt und bewertet. Es scheint Konsens zu sein, dass abstrakte Mathematik die höchste Wertschätzung verdient, die Vorteile, die aus algorithmischen und prozeduralen Auffassungen hervorgehen, sind recht strittig. Provokant formulierte Erklärungen wie „algorithmic way of life is best“ (Maurer 1985) rufen dann verärgerte Reaktion wie „algorithm drives out thought“ (Stein 1987) hervor. Obwohl immer eingeräumt wird, dass algorithmische Mathematik wichtig ist, überwiegt doch die Meinung, dass sie auf irgendeine Weise zweitklassig ist. Die Sichtweise der *Prozess-Objekt-Dualität* entzieht dieser Diskussion jegliche Sinnhaftigkeit. Unabhängig davon, ob der Streitpunkt Anwendungen oder die

Ausbildung betrifft: Sowohl operationelle als auch strukturelle Elemente sind für das vollständige Verständnis eines Konzeptes notwendig. (Sfard 1991, S. 9)

Um die untenstehende Definition aus einer Einführungsvorlesung in die Lineare Algebra zu verstehen, müssen sowohl operationelle als auch strukturelle Konzeptionen berücksichtigt werden.

> DEFINITION: Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine nichtleere Teilmenge $W \subset V$ heißt *Teilraum* oder ein *Unterraum* von V, wenn für alle $w_1, w_2 \in W$ auch $w_1 + w_2 \in W$ und für alle $w \in W$ und $r \in \mathbb{K}$ auch $rw \in W$ gilt. (Aus: Čap 2010, S. 12)

Im ersten Teil der Definition wird festgelegt, welche Art von Objekt ein Teilraum überhaupt ist. Er ist eine Teilmenge eines Vektorraums. Der Vektorraum erschließt sich selbst wieder über das abstrakte Objekt des Körpers. Dieser Teil der Definition handelt von zueinander in Beziehung stehenden Objekten und ist damit ganz klar strukturell. Das entscheidende Kriterium, das überprüft, ob die angesprochene Teilmenge nun wirklich als Teilraum bezeichnet werden darf, ist aber von anderer Natur. Es werden die Vertreter der Teilmenge (w_1, w_2) bzw. die des Körpers (r) durch wohldefinierte Operationen $(+, \cdot)$ miteinander verknüpft. Diese beiden Verknüpfungen $(w_1 + w_2,\ rw)$ müssen für alle Elemente der Teilmenge wieder in der Teilmenge enthalten sein. Auch dieser Teil der Definition ist - wie es eben in der Natur einer statischen Definition liegt - wieder kein Vorgang. Gerade Anfängern fällt dieser, von Čap (ebd.) als operativ bezeichnete Zugang aber oft leichter als andere Definitionen. Mit der entscheidenden Bedingung kann sofort ein Rechenprozess verbunden werden. Um zu überprüfen, ob eine Teilmenge W ein Teilraum von V ist, werden die Elemente $w_1 + w_2$ und rw berechnet. Dieser Rechenvorgang ist dann vermutlich auch eng daran geknüpft, wie die Definition aufgefasst wird. Salopp formuliert, könnte damit verbunden werden: „Ein Teilraum ist eine Teilmenge, für die man $w_1 + w_2$ und rw berechnet und diese dann wieder Elemente der Menge sind“. Das in der Definition zwar statisch formulierte Kriterium ruft operationelle Vorstellungen hervor.

Eine vertiefende Untersuchung mathematischer Symbole macht die Prozess-Objekt-*Dualität* noch viel deutlicher. Mathematische Symbole können sowohl als Prozess, als auch als Produkt des Prozesses aufgefasst werden. Dieser Umstand zeigt sich sehr schön in folgender Episode, die Fields-Medaillen Träger Thurston (1990, S. 847) aus seiner Kindheit schildert:

> I remember as a child, in fifth grade, coming to the amazing (to me) realization that the answer to 134 divided by 29 is 134/29 (and so forth). What a tremendous labor-saving device! To me, ‘134 divided by 29’ meant a certain tedious chore, while 134/29 was an object with no implicit work. I went excitedly to my father to explain my major discovery. He told me that of course this is so, a/b and a divided by b are just synonyms. To him it was just a small variation in notation.

Nur eine kleine Variation in der Symbolik entscheidet also, ob mit 134/29 eine Prozedur, die Rechenanweisung „dividiere 134 durch 29“ gemeint ist, oder ob der Ausdruck auf ein konkretes mathematisches Objekt, auf das Ergebnis der Prozedur verweist. Diese Mehrdeutigkeit ist in der Mathematik kein Einzelfall, meist wird sogar ein und dieselbe Symbolik für beide Sichtweisen verwendet.

Wird der Ausdruck $3(x+5)+1$ betrachtet, so sind je nach Sichtweise völlig unterschiedliche Interpretationen möglich. In bestimmten Situationen wird man den Ausdruck als *Rechenprozess* interpretieren. $3(x+5)+1$ beschreibt dann eine Abfolge von Rechenschritten: Addiere 5 zu der unbekannten Zahl, multipliziere das Ergebnis mit 3 und addiere 1. In einem anderen Umfeld wird man den Ausdruck $3(x+5)+1$ als bestimmte Zahl interpretieren. Er ist das *Produkt einer Rechnung* und nicht die Rechnung selbst. Selbst wenn das Produkt nicht bestimmt werden kann, da der Wert von x nicht bekannt ist, wird trotzdem einfach eine Zahl bezeichnet und es wird erwartet, dass sich der gesamte Ausdruck auch wie eine verhält. In einem anderen Kontext kann $3(x+5)+1$ als anderes Ding gesehen werden: Als Funktion - als *Zuordnung*, die jede Zahl x in eine andere überführt. Nun repräsentiert der Ausdruck überhaupt keinen bestimmten Wert. Vielmehr beschreibt er eine Änderung. Es gibt aber noch einen viel einfacheren Weg, wie man $3(x+5)+1$ sehen kann: Als *Zeichenkette*, als Folge von Symbolen, die nichts Bestimmtes darstellen. Auch wenn der Ausdruck in dieser Sichtweise keine Bedeutung hat, kann er immer noch nach gewissen Regeln manipuliert und mit anderen Ausdrücken kombiniert werden. (Sfard und Linchevski 1994, S. 191-192)

Abhängig von der Aufgabenstellung sind zur Lösung eines Problems unterschiedliche Interpretationen eines algebraischen Ausdruckes notwendig. Ist eine Lernende oder ein Lernender nur zur letzten Sichtweise fähig, haben die Symbole für ihn also keine bestimmte Bedeutung, so wird er in vielen Fällen nicht in der Lage sein, die richtigen Schritte zur Lösung einzuleiten. Unabhängig von der eigentlichen Fragestellung, wird er einfach den Weg gehen, zu dem er konditioniert wurde; nur selten wird das zur richtigen Lösung führen und die Aufgabe beantworten. Es ist also von großer Bedeutung, dass Lernende unterschiedliche Sichtweisen und Interpretationsmöglichkeiten mathematischer Ausdrücke entwickeln.

Im obigen Beispiel kann die Formel $3(x+5)+1$ als Rechenprozess, Zahl oder Funktion aufgefasst werden. Die erste Sichtweise ist operationell, die anderen beiden sind strukturell. Was in diesem Beispiel beobachtet werden konnte - mathematische Symbole die als Prozess und als Objekt interpretiert werden können - durchzieht die gesamte Mathematik:

- Das Symbol $5+4$ repräsentiert sowohl den Prozess der Addition mittels Zählen der Elemente als auch das Konzept der Summe. Dabei weist $5+4$ unmittelbar auf die Zahl 9 hin, ein Rechenprozess wird nicht mehr ausgeführt; $5+4$ *ist einfach* 9.

- Das Symbol 4×3 steht sowohl für den Prozess der wiederholten Addition, „addiere vier Dreier“, bzw. „addiere drei Vierer“, als auch für das fertige Produkt 12. Dabei ist 4×3 bereits direkt mit dem Ergebnis 12 verknüpft, es wird keine Rechnung durchgeführt; $4 \cdot 3$ *ist einfach* 12.

- Das Symbol 3/4 steht sowohl für den Prozess der Division als auch für den Bruch als eigenständiges Denkobjekt.

- Das Symbol +4 steht sowohl für den Prozess „addiere vier“, als auch für das Objekt der positiven ganzen Zahl +4. Ursprünglich verwendeten viele Lehrende sogar unterschiedliche Notationen wie $^{+}4$ für die positive ganze Zahl und +4 für die Operation.

- Das Symbol -7 steht sowohl für den Prozess „subtrahiere sieben“, als auch für das Objekt der negativen Zahl -7. Wieder wurde diese ursprünglich mit $^{-}7$ bezeichnet.

- Das algebraische Symbol $3(x + 5) + 1$ steht sowohl für den Prozess „addiere fünf zu x, multipliziere das Ergebnis mit 3 und addiere 1“, als auch für die (unbekannte) Zahl die sich dahinter verbirgt.

- Das Symbol $\sin\alpha$ steht sowohl für das trigonometrische Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck, als auch für das Ergebnis dieser Division, z.B. für einen Winkel α von 30 Grad den Wert 0,5735764 (Schneeberger 2009, S. 141).

- Die Funktion $f(x) = x^2 - 3$ kann einerseits verwendet werden, um bestimmte Werte für x einzusetzen und Funktionswerte zu berechnen. Andererseits kann die Funktion als Ganzes, als die Menge aller Paare, betrachtet und auch ihr Graph gezeichnet werden.

- Eine periodische Dezimalzahl wie $0,\overline{9}$ kann sowohl als unendlicher Prozess des „Aufschreibens“ von Neunern betrachtet werden, als auch als Grenzwert, als Ergebnis dieses Prozesses, als die Zahl 1 gesehen werden.

- Die Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ repräsentiert sowohl den Prozess der Annäherung an einen Grenzwert, als auch das Produkt des Grenzprozesses, den Grenzwert.

  (vgl. Gray und Tall 1994b, S. 120; sie verwenden den Ausdruck „Konzept“ für strukturelle Ansätze)

Diese Zweideutigkeit mathematischer Symbolik ist gerade für Anfänger sicherlich verwirrend. Gleichzeitig, so sind sich Lernforscherinnen und Lernforscher einig (Sfard und Linchevski 1994, S. 192; Gray und Tall 1994b, S. 120), liegt aber auch die große Stärke der Mathematik genau in diesem Dualismus. Die Fähigkeit, Symbole flexibel auszulegen, indem ein fließender Wechsel zwischen der operationellen und der strukturellen Konzeption erfolgt, ist der Grundstein erfolgreichen mathematischen Denkens. Anstatt wissentlich zwischen dem Prozess und dem Objekt zu unterscheiden und damit die Lage der Prozess-Objekt-Dualität zu meistern, denken fähige Mathematikerinnen und Mathematiker doppeldeutig über mathematische Prozesse und ihre Produkte, sie unterscheiden diese nicht einmal bewusst und verwenden dementsprechend auch ein und dasselbe Symbol dafür. Die Angelegenheit wird dadurch vereinfacht - aus der kognitiv anspruchsvollen Prozess-Objekt-Dualität wird die Annehmlichkeit der geschriebenen Prozess-Produkt-Mehrdeutigkeit. (Gray und Tall 1994b, S. 120-121)

Diese gleichzeitige Verwendung von zwei Konzeptionen in einem Symbol hat durchaus ihre Berechtigung. Wie in der wirklichen Welt entstehen in der Mathematik durch Tätigkeiten und Arbeitsschritte Produkte in der Form von Entitäten, die wie echte permanente Objekte behandelt werden. Anders als in der realen Welt sind in der Mathematik die Prozesse, welche die Objekte hervorbringen, auch danach oft von substanzieller Bedeutung. Damit Lernende einen Ausdruck wie $3(x+5)+1$ als Funktion - also strukturell - betrachten können, müssen sie diesen zuvor operationell verwendet haben (zur Entwicklung struktureller Ansätze siehe Kapitel 3). Sie haben lange Zeit z. B. bestimmte Werte in die Funktion eingesetzt. Nach und nach wurde die Funktion aber nicht mehr an einzelnen Stellen ausgewertet betrachtet, sondern die Zuordnung im Gesamten betrachtet, die Abbildung wurde so zum eigentlichen Objekt der Betrachtung. Eine Lernende oder ein Lernender, der diese strukturelle Sichtweise erlangt hat, und vielleicht gerade Eigenschaften der Funktion untersucht oder verschiedene Funktionen miteinander verknüpft, wird diese aber durchaus auch an unterschiedlichen Punkten auswerten. Er greift damit wieder auf die Prozesse zurück, welche die Funktion „erschaffen“ haben. Dies unterscheidet mathematische Objekte grundsätzlich von den meisten Objekten der realen Welt. Fertigt sich eine Tischlerin oder ein Tischler einen Tisch an, so ist der Herstellungsprozess ab der Fertigstellung für die tägliche Verwendung des Tisches nicht mehr von Bedeutung. Niemand käme deshalb auch nur auf den Gedanken, den Vorgang der Erzeugung und das Produkt mit demselben Begriff zu bezeichnen. (vgl. Sfard und Linchevski 1994, S. 193-194)

Gray und Tall (1994b, S. 121) haben, diesen Umstand berücksichtigend, ein eigenes Vokabel eingeführt, welches die Verbundenheit von Prozess und Konzept betont (sie verwenden den Ausdruck „Konzept statt „Objekt“). Ein „procept“ ist eine Mischung aus Prozess und Konzept, die von einem mathematischen Symbol repräsentiert wird. Um der kognitiven Realität gerecht zu werden, wird von ihnen eine exaktere Definition vorgeschlagen:

Ein „elementary procept“ ist eine Mischung aus drei Komponenten: einem *Prozess*, der ein mathematisches *Objekt* produziert, und einem *Symbol*, welches entweder den Prozess oder das Objekt repräsentiert. (ebd., S. 121)

Nach dieser Definition kann ein Symbol wie $2+3$ entweder den Prozess der Addition zweier Zahlen oder das Konzept der Summe hervorrufen. (ebd., S. 121)

In der Mathematik kann ein und dasselbe Symbol nicht nur zweideutig interpretiert werden, sondern ein und dasselbe Objekt kann auch durch unterschiedliche Symbole dargestellt werden. Die Definition wird dementsprechend erweitert: Ein „procept“ besteht aus einer Sammlung von elementaren *Prozepten*, die auf dasselbe Objekt verweisen. (ebd., S. 121)

Im Sinne dieser Definition kann wie über das *Prozept* 6 gesprochen werden. Es enthält den Prozess des Zählens bis 6 und eine Sammlung von anderen Repräsentationen wie $3+3$, $4+2$, $2+4$, $2\cdot 3$, $8-2$, und so weiter. (ebd., S. 121)

In den letzten beiden Kapiteln wurden der operationelle und der strukturelle Ansatz ausgiebig erläutert. Auch die Notwendigkeit beider Ansätze wurde betont. Bisher wurde aber ausgespart, wie sich die unterschiedlichen Ansätze bei Lernenden entwickeln. Die strukturelle Konzeption, die Fähigkeit, mathematische Objekte vor dem inneren Auge zu sehen, ist sehr abstrakt und das Erlangen dementsprechend mühsam. Trotz all der Aufmerksamkeit, die diesem Ansatz gewährt wird, sollte die operationelle Konzeption nicht vergessen werden. Ein fundierter Einblick in die Prozesse, denen mathematische Konzepte zugrunde liegen, ein bestimmter Grad der Beherrschung dieser Prozesse, sollte eher als *Basis zum Verständnis* der Konzepte denn als bloße *Methode zur Berechnung von Ergebnissen* betrachtet werden. (vgl. Sfard 1991, S. 9-10) Im folgenden Kapitel wird die historische und psychologische Entwicklung der beiden Konzeptionen untersucht.

3. Entwicklung struktureller Ansätze

In dieser Arbeit wurden zwei unterschiedliche Sichtweisen mathematischer Konzepte vorgestellt: die strukturelle und die operationelle Konzeption. Die strukturelle Konzeption ist die abstraktere. In den vorangehenden Kapiteln hat einiges darauf hingedeutet, dass ihr die operationelle Konzeption vorausgeht. Dementsprechend ist auch die Lehre aufgebaut: Von einer Vielzahl von Rechenprozessen, zu denen man in der Grundschule regelrecht konditioniert wird (addieren, subtrahieren, Einmaleins, ...), geht es in die Sekundarstufe. Dort steht das Lösen konkreter mathematischer Aufgaben und somit Rechenprozesse immer noch im Vordergrund, auf das Erlernen bestimmter Konzepte und deren Eigenschaften wird aber bereits Wert gelegt (z.B. lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Vektoren, ...). Wer zu diesem Zeitpunkt noch nicht genug hat und Mathematik als Studium wählt, wird nun fast ausschließlich die Eigenschaften mathematischer Strukturen und die Zusammenhänge zwischen ihnen untersuchen. Vereinzelte Beispiele werden höchstens zum besseren Verständnis dieser eingesetzt.

Dies ist nur eine Tendenz. Von der Interpretation, dass in der Grundschule nur prozesshaft gedacht wird und in der Hochschule nur objekthaft, wird ausdrücklich abgeraten. Schließlich gibt es bereits in der Grundschule Konzepte wie die natürlichen Zahlen, auf die Operationen angewandt werden, die als Rechenobjekte für die vielen Aufgaben dienen. Umgekehrt gibt es auch in der Hochschule Definitionen, welche operative Aspekte sehr stark in den Vordergrund rücken. Es scheint vielmehr, dass sowohl in der historischen als auch in der psychologischen Entwicklung jedes einzelnen mathematischen Konzepts (ganze Zahlen, rationale Zahlen, Funktionen, ...) strukturelle Ansätze eine höhere Stufe der Konzeptbildung darstellen.

Es drängt sich die Frage auf, ob es in der Natur der Mathematik liegt, dass operationelle Ansätze den strukturellen vorausgehen (vgl. ebd.). Wäre es nicht natürlicher und sinnvoller, zuerst die Objekte und Strukturen kennenzulernen, mit denen man arbeitet und erst dann die detaillierten Arbeitsschritte, die mit ihnen und an ihnen durchgeführt werden?

Tatsächlich gab es in den 1960er Jahren den Zeitraum der „New Math“, in dem der Mathematikunterricht vor allem in Amerika grundlegend umgestellt wurde. Bereits in der Grundschule wurden Elemente der Mengenlehre unterrichtet, mathematische Strukturen und Zusammenhänge standen bereits sehr früh im Vordergrund. Die Reform hatte allerdings nur mäßigen Erfolg. Simmons (1987, S. 33) beschreibt die „New Math“ als „ill-fated educational experiment“, bei dem der Formalismus über den Inhalt gestellt wurde - zum Nachteil beider. Besonders schlimm war der Schaden im Bereich der Algebra, wo es mehr und mehr Schülerinnen und Schüler gab, die bereits das Kommutativgesetz kannten, aber das Einmaleins nicht beherrschten. Mittlerweile wurden die Reformen der New Math größtenteils wieder aufgehoben.

In diesem zentralen Kapitel der Diplomarbeit wird die *Entwicklung* mathematischer Konzepte untersucht. Dabei wird sowohl eine historische als auch eine psychologische Perspektive geboten. Erstere zeigt, wie einige der zentralsten Konzepte in der Geschichte der Mathematik entstanden sind. Letztere untersucht mithilfe unterschiedlicher Studien die individuelle Entwicklung arithmetischer und algebraischer Konzepte bei Kindern und Jugendlichen. Beide Perspektiven werden Belege dafür liefern, dass operationelle Konzeptionen den strukturellen im Allgemeinen vorausgehen. Schließlich werden Modelle unterschiedlicher Autorinnen und Autoren vorgestellt, die diesen Umstand berücksichtigen.

Es soll noch erwähnt werden, dass, auch wenn die vorgeschlagenen Modelle die Erarbeitung großer Teile der Mathematik naturgemäß wiederzugeben scheinen, bestimmte Fälle existieren, für die sie nicht gelten. Beispielsweise können geometrische Ideen, für die statische graphische Repräsentationen am natürlichsten erscheinen, strukturell erfasst werden, noch bevor die prozedurale Sichtweise erreicht wird. (Sfard 1991, S. 10)

3.1. Historische Entwicklung mathematischer Konzepte

Es wird nun ein knapper Überblick über die lange und turbulente Geschichte einiger der zentralsten Konzepte der Mathematik gegeben. Er basiert auf unterschiedlichen historischen Analysen, die von Sfard (1991, 1992, 1994, 1995) im Laufe der Jahre durchgeführt wurden. Es werden vor allem Fakten und Ereignisse hervorgehoben, die für den Standpunkt dieser Arbeit relevant sind.

3.1.1. Entwicklung der Zahlen

Die Analyse beginnt mit dem Konzept der *Zahl*. Für lange Zeit war die Bedeutung dieses Begriffes beschränkt auf das, was heute als „natürliche Zahl" bekannt ist. Die natürlichen Zahlen entspringen dem Prozess des Zählens. Erst wenn dieser Prozess ausreichend beherrscht wird, kann ein permanenter Zahlbegriff entwickelt werden (siehe dazu Kapitel 3.2.1). (vgl. ebd., S. 11)

Allerdings wurden die natürlichen Zahlen - und damit die Bedeutung des Ausdruckes *Zahl* - im Verlauf der letzten 3000 Jahre mehrmals generalisiert. Lange Zeit wurden bestimmte Manipulationen mit bekannten Zahltypen durchgeführt, bevor ein abstraktes Produkt aus diesen Prozessen entwickelt wurde, welches als neue Art des mathematischen Objekts akzeptiert wurde. (vgl. ebd., S. 11)

Beispielsweise wurde das Verhältnis zwischen zwei natürlichen Zahlen ursprünglich als kurze Beschreibung eines Messprozesses betrachtet und nicht als eigenständige rationale Zahl. Diese ursprüngliche Interpretation wird auch oft bei Lernenden vorgefunden (siehe dazu Kapitel 2.2).

Überhaupt wurde der Begriff „Zahl" lange Zeit nur in Verbindung mit Messprozessen verwendet. Die pythagoräische Erkenntnis inkommensurabler Größen, also bestimmter Längen, die nicht als ganzzahlige Vielfache derselben Einheit messbar waren, wurde mit Erstaunen und Fassungslosigkeit begrüßt. Das Verhältnis solcher Längen ist folglich nicht als rationale Zahl darstellbar und somit *irrational*. Die inkommensurablen Längen, die von den Pythagoräern entdeckt wurden, waren die Seite und die Diagonale des Einheitsquadrates. Die Legende besagt, dass der erste Pythagoräer, der dieses Resultat bekannt machte, im Meer ertränkt wurde (Heath 1921, S. 65). Wahr oder nicht, jedenfalls führte die Erkenntnis zu einem Bruch zwischen den Theorien der Zahl und des Raums, der bis zum 19. Jahrhundert nicht überwunden werden konnte. Die Pythagoräer konnten die $\sqrt{2}$ nicht als Zahl akzeptieren, aber niemand konnte leugnen, dass es die Diagonale des Einheitsquadrates war. Anstatt die $\sqrt{2}$ als Zahl zu akzeptieren, wurden infolgedessen konsequenterweise geometrische Größen von Zahlen getrennt, nur bei rationalen Ergebnissen wurden die geometrischen Überlegungen mit Zahlen in Verbindung gebracht. Erst als Dedekind die Techniken der Griechen im 19. Jahrhundert neu durchdachte und realisierte, dass diese doch eine arithmetische Interpretation irrationaler Größen bereitstellten, konnte der Konflikt zwischen Arithmetik und Geometrie geschlichtet werden. (Stillwell 2010, S. 11-13)

Fast 2500 Jahre traten irrationale Werte also in Messprozessen auf, bevor es gelang, diese als statische Objekte von den Prozessen zu trennen und anzuerkennen, dass die Länge jedes beliebigen Segments eine Zahl repräsentiert. Letztlich wurde die Menge der Zahlen wieder erweitert, um positive irrationale Zahlen gemeinsam mit natürlichen Zahlen und Bruchzahlen zu enthalten. (Sfard 1991, S. 12)

Diese erweiterte Menge machte wieder neue Arten von Rechenprozessen möglich, die schließlich wieder zu neuen Zahlkonzepten führten. Der italienische Mathematiker Gerolamo Cardano veröffentlichte bereits 1545 Methoden zur Lösung von Gleichungen des dritten und vierten Grades (siehe Cardano 1968). Er subtrahierte dazu Bruchzahlen von kleineren und berechnete sogar Wurzeln aus (heute sogenannten) negativen Zahlen. Obwohl diese Algorithmen weitverbreitet waren, weigerten sich die Mathematiker, deren Nebenprodukte zu akzeptieren und bezeichneten diese als „absurd“ oder „imaginär“. Die Bezeichnung „negative Zahl“ und das Symbol $\sqrt{-1}$ waren ursprünglich lediglich als Kürzel für bestimmte *bedeutungslose* numerische Operationen gedacht. Erst nachdem sich die Mathematiker an diese seltsamen, aber nützlichen Berechnungen gewöhnt hatten, konnten aus ihnen mathematische Objekte entspringen. (Sfard 1991, S. 12)

Um die operationellen Ursprünge der negativen und komplexen Zahlen zu verdeutlichen, ist folgende Passage des Logikers und Philosophen P.E. Jourdain (1879-1919) sehr aufschlussreich:

> Let $a - b$ be c. To get c from a, we carry out the operation of taking away b. *This operation, which is the fulfilment of the order: "Subtract b," is a "negative number."* Mathematicians call it a "number" and denote it by "$-b$" simply because of analogy: the same rules for calculation hold for "negative numbers" and "positive numbers." (Jourdain 1913, S. 34)

Jourdains Erklärungen zeigen eine tiefe Kluft in der Entwicklung zwischen seinen Konzeptionen der natürlichen und der negativen Zahlen. Während erstere bereits als reelle, tatsächliche Objekte aufgefasst werden, deren operationeller Ursprung bereits vollständig vergessen wurde, werden letztere immer noch mit Prozessen identifiziert und können nur mittels Konventionen als statische Entitäten behandelt werden. (Sfard 1991, S. 12)

Es ist nicht verwunderlich, dass Jourdain auch die komplexen Zahlen rein operationell sieht: „The truth is that 'i' is not uninterpretable. It represents an operation just as the negative numbers do, but is of a different kind." (Jourdain 1913, S. 38) Auch die imaginären Zahlen werden von Jourdain also lediglich als Operation und nicht als eigenständiges Objekt interpretiert.

Die Entwicklung der Zahlen zeigt sich als zyklischer Prozess, in dem bei der Entstehung jeder neuen Art von Zahlen ähnliche Abläufe beobachtet werden können. Das Schema wird in Abbildung 3.1 dargestellt, jeder Schritt besteht aus drei Phasen:

1. Die *prekonzeptuelle Phase*, in der Operationen auf bereits bekannte Zahlen ausgeführt werden (im Fall der natürlichen Zahlen auf konkrete Objekte). In dieser Phase werden die Routinemanipulationen nur als Prozesse und als nichts anderes betrachtet.

2. Eine lange Periode des *vorwiegend operationellen Ansatzes*. Eine neue Art der Zahl entwickelt sich aus bekannten, oft verwendeten Prozessen. Der gerade eingeführte Name der neuen Zahl verweist auf Operationen, man wehrt sich gegen die Sicht eines tatsächlichen mathematischen Objektes.

3. Die *strukturelle Phase*, in der der neue Zahlentyp als vollwertiges mathematisches Objekt akzeptiert wird. Von jetzt an können neue Prozesse auf diese neue Zahl angewandt werden, der Zyklus wiederholt sich.

(Sfard 1991, S. 14)

Zusammenfassend kann man sagen, dass sich die Geschichte der Zahlen als langwieriger Vorgang zeigt, bei dem Operationen und Aktionen, die auf bereits akzeptierte Zahlobjekte angewandt werden, schließlich wieder zu neuen Zahlentypen „reified", also „verdinglicht" werden. (ebd., S. 14) Diese Abfolge - Operationen auf Objekte, die sich letztendlich zu eigenständigen Denkobjekten entwickeln - kann auch bei der Entwicklung anderer Teilbereiche der Mathematik beobachtet werden.

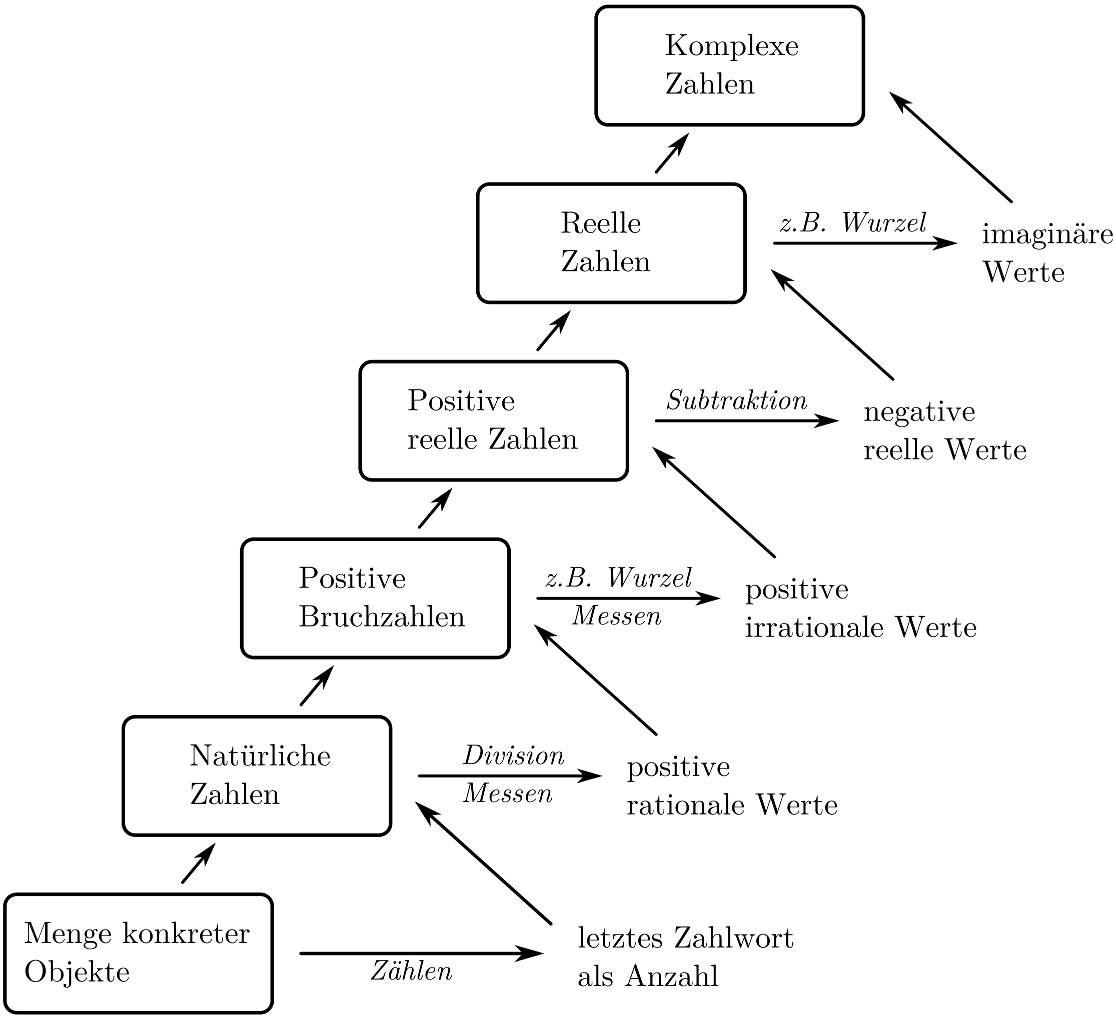


Abbildung 3.1.: Historische Entwicklung des Konzepts der Zahlen (vgl. Sfard 1991, S. 13)

3.1.2. Entwicklung der Algebra

Bei der Entwicklung unterschiedlicher Zahlkonzepte konnte beobachtet werden, wie einer prekonzeptuellen Phase ein vorwiegend operationeller Ansatz folgte, welcher schließlich zur strukturellen Phase führte. Es soll nun die historische Entwicklung der Algebra untersucht werden, welche das beobachtete Muster bestätigen wird.

Algebra beginnt dort, wo der erste Versuch gestartet wird, eine unbekannte Zahl zu finden. Beispielsweise wurden auf eine gesuchte Zahl einige arithmetische Operationen angewandt, nur das Ergebnis ist bekannt. Algebraische Vorgehensweisen ermöglichen es, die gesuchte Zahl zu bestimmen. Dafür wird aber nicht notwendigerweise algebraische Symbolik verwendet. Das zeigt auch die folgende historische Aufgabe, die auf einer Steintafel gefunden wurde. (vgl. Sfard und Linchevski 1994, S. 196)

Aufgabenstellung:	Finde die Seite des Quadrates, für das gilt, dass die Fläche minus die Seitenlänge gleich 14,30 ist.
Lösung:	Nimm die Hälfte von 1, also 0;30, multipliziere 0;30 mit 0;30, das ergibt 0;15. Addiere das zu 14,30 um 14,30;15 zu erhalten. Das ist das Quadrat von 29;30. Addiere nun 0;30 zu 29;30, das Resultat ist 30, die Seitenlänge des Quadrates.

Tabelle 3.1.: Rechenaufgabe Babylonien, 2000 v. Chr., die Zahlen sind zur Basis 60 dargestellt; z. B.: $(14, 30; 15)_{60} = (14 \cdot 60 + 30 + 15 \cdot 60^{-1})_{10} = (870, 25)_{10}$ (Boyer 1968, S. 34)

Der von den Babyloniern beschriebene Lösungsalgorithmus ist äquivalent zur heute wohlbekannten Lösungsformel $x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$ für quadratische Gleichungen der Form $x^2 - px = q$. In diesem Beispiel ist $p = 1$ und $q = 14, 30$. (vgl. Boyer 1968, S. 34)

Mathematische Symbole fehlen in der rhetorischen Darstellungsweise der Babylonier allerdings völlig, dadurch liegt der Fokus auf arithmetischen Umformungen. Die einzigen mathematischen Objekte sind die Zahlen, mit denen operiert wird. Diese „rhetorische Algebra" wird von der frühesten Zeit an bis ins 16. Jahrhundert praktiziert. Auch Schulkinder lösen Textaufgaben erst rein operationell durch die rhetorische Methode, bevor ein algebraisch-symbolischer Zugang eingeführt wird. Solange die algebraischen Ideen allerdings nur durch Worte ausgedrückt werden, fehlt schon in der Notation jeglicher Hinweis auf algebraische Objekte, ein struktureller Zugang ist nicht möglich. Die Einführung von mathematischen Symbolen ist der erste Schritt in eine Richtung, in der algebraische Konzepte in objekthafter Art und Weise gedacht werden können. (vgl. Sfard und Linchevski 1994, S. 196-197)

Bis zur Einführung einer Notation mit Symbolen war der Fortschritt in der Algebra langsam und stockend: Bereits die Babylonier lösten 2000 v. Chr. ähnliche algebraische Probleme wie die Perser 800 n. Chr. Bis ins 16. Jahrhundert, also für mehrere Jahrtausende, änderten sich weder der generelle Charakter der Bemühungen noch die verwendeten Methoden. Die Entwicklung zeigte sich eher durch eine graduelle Zunahme der Komplexität der untersuchten Rechenaufgaben. (vgl. Sfard 1995, S. 20)

Gegen Ende des 16. Jahrhunderts erreichte die Algebra jedoch eine so hohe Vielfalt, dass eine Komprimierung dringend erforderlich war. François Viète (1540-1603) verwendete als erster algebraische Notationen mit Buchstaben auf die Weise, auf der unser heutiger Gebrauch zu großen Teilen beruht. Buchstaben wurden für algebraische Probleme zwar schon lange vor Viète eingesetzt (z. B. Diophantus ca. 250 n. Chr.), allerdings repräsentierten diese immer nur die gesuchten unbekannten Größen. Viète hingegen verwendete seine algebraischen Symbole als Variable im wörtlichen Sinne. Er verwendete Konsonanten für gegebene Zahlen, also Zahlen, die als bekannt angenommen werden konnten und Vokale für die Variablen, die unbestimmt waren (Boyer 1968, S. 335). Dank dieser neuen Konvention (und Sichtweise!), konnten ganze Familien von Problemen (Gleichungen) mit einem knapp formulierten Algorithmus behandelt werden. Die Einführung dieser Notation war ein großer Schritt der Generalisierung der Algebra und somit der erste Schritt hin zu strukturellen Konzeptionen. Dies war Viète auch bewusst, er bezeichnete die Arithmetik als die Wissenschaft der konkreten Zahlen (*logica numerosa*) und im Unterschied dazu seine Art der Algebra als Wissenschaft der Arten (*logica speciosa*) bzw. als Wissenschaft über Typen von Dingen und nicht über die Dinge selbst. Viètes Einführung kann als Geburtsstunde des Konzeptes der Variable betrachtet werden. (vgl. Sfard 1995, S. 23-24)

Entwickelte sich die Algebra zuvor noch stockend, so führte diese neue Notation nun zu einer rasenden Weiterentwicklung. In unseren Augen scheint die Einführung der Variable als beliebige Zahl so offensichtlich und simpel, dass wir dazu geneigt sind uns zu wundern, wieso die großen Denker der Vergangenheit nicht schon viel früher auf diese Idee kamen. Immerhin wurden bereits in der Antike Buchstaben in der Mathematik verwendet. Realisiert man aber, dass diese unbestimmten Größen funktionales Denken aufzwingen - sie erfordern die Fähigkeit, gleichzeitig an ganze Familien von Zahlen zu denken und nicht mehr wie in der Arithmetik nur an eine Zahl - so ist diese späte Entwicklung schon weniger überraschend. (vgl. ebd., S. 25) Auch die indisch-arabischen Ziffern, welche die Entwicklung der Algebra sicherlich begünstigten, wurden in Europa erst im 13. Jahrhundert verbreitet.

Demnach erfordert die Trennung von gegebenen Unbekannten und unbestimmten Variablen auch eine scharfe Trennung der Perspektiven. Während die Unbekannte nur ein Verweis auf eine Zahl ist, stellt die Variable ein neues mathematisches Konzept dar. Eine strukturelle Sichtweise der neuartigen Symbolketten ist erforderlich. (ebd., S. 24-25)

Nachdem sich die neue algebraische Schreibweise verbreitete und algebraische Formeln als Art Objekte akzeptiert wurden, entwickelten sich schnell formale algebraische Rechenmethoden. Diese legten beispielsweise fest, nach welchen Regeln Gleichungen umgeformt werden dürfen. Die algebraischen Ausdrücke dienten also nun wieder als Input für neue Operationen und Algorithmen. Dies stellt einen drastischen Unterschied zur rhetorischen Algebra dar, in der die Objekte, mit denen operiert wurde, Zahlen waren. (vgl. Sfard und Linchevski 1994, S. 200)

Die Mathematiker standen nun vor der Aufgabe, die neu eingeführte algebraische Symbolik und das damit verbundene Konzept der Variable auf eine logische Basis zu stellen. Es stellte sich als schwierig heraus, eine exakte mathematische Definition zu finden. In einem ersten Versuch wurde ein algebraischer Ausdruck von Jean Bernoulli 1718 als „a quantity composed in any manner whatever of [a] variable and constant“ definiert und als Funktion bezeichnet (Sfard 1991, S. 14). Ein algebraischer Ausdruck stellt also eine Größe dar, die in beliebiger Art und Weise aus Variablen und Konstanten zusammengesetzt ist. Diese Definition erntete aufgrund ihrer Unschärfe viel Kritik, auch war der vorkommende Begriff „Variable“ sehr umstritten. Eine Größe, die nicht statisch ist, die mit der Zeit variieren kann, passte nicht in das exakte und starre Gerüst der Mathematik. Euler unternahm 1755 einen neuen Versuch und definierte: „A quantity should be called a function only if it depends on another quantity in such a way that if the latter is changed, the former undergoes change itself.“ (Sfard 1992, S. 63) In diesem explizit operationellen Zugang wird eine Funktion als eine abhängige Größe definiert, die sich ändert, sobald die andere Größe geändert wird. Erst mit der heute weitgehend akzeptierten Definition einer Funktion als Menge geordneter Paare von Bourbaki im frühen 20. Jahrhundert konnte sie als statisches Konstrukt verstanden werden. (vgl. ebd., S. 63-64)

Nach dieser vollständigen Objektivierung der von Viète eingeführten Symbolik konnte das Spiel von neuem beginnen. Algebraische Ausdrücke wurden systematisch untersucht und konnten nun als Basis für neue, komplexere mathematische Prozesse dienen.

Bis ins 19. Jahrhundert wurde Algebra als Disziplin betrachtet, die in allgemeiner Art und Weise arithmetische Prozeduren ausdrückte. Diese Sichtweise minderte jedoch den Anwendungsbereich der Algebra. Beispielsweise musste für den Ausdruck $\sqrt{a-b}$ die Einschränkung $a > b$ getroffen werden. Nachdem der Fokus aber nun verstärkt auf die algebraischen Ausdrücke selbst verschoben wurde, wurden diese Beschränkungen mehr und mehr aufgehoben. Eine Gruppe Britischer Formalisten (A. de Morgan, G. Peacock und D.F. Gregory) schlug vor, die Algebra von ihrer ursprünglichen Interpretation zu befreien. Algebraische Formeln sollten als eigenständige Dinge betrachtet werden, die keiner weiteren Interpretation (z. B. durch die Arithmetik) bedürfen. Dies war der erste Schritt in Richtung der abstrakten Algebra. (Sfard und Linchevski 1994, S. 201-202)

Angeregt durch die neue Sichtweise der Formalisten entstanden im 19. und 20. Jahrhundert im Rahmen der Gruppentheorie wieder neue abstrakte Objekte einer höheren Stufe wie beispielsweise Gruppen, Ringe, Ideale oder Körper. (vgl. ebd., S. 202)

Die Geschichte der Algebra zeigt ein ähnliches Muster wie die Entwicklung der Zahlen. Arithmetische Umkehroperationen auf unbekannte Zahlen führen zu einer abstrakten Schreibweise dieser Prozesse. Es beginnen langwierige Versuche, diese neu eingeführten Symbolketten zu objektivieren und so in das Konstrukt der Mathematik zu integrieren. Schließlich werden die Zeichenketten als Funktionen interpretiert und es wird eine rein strukturelle Definition gefunden. Der Fokus verschiebt sich, die volle Aufmerksamkeit gilt den formalen Umformungen. Auf die Zahlen, die einst mit den Symbolen verbunden wurden, wird keine Rücksicht mehr genommen. Diese Vorgehensweise stellt den Beginn der abstrakten Algebra dar und ist Basis für abstraktere mathematische Objekte einer höheren Ebene wie beispielsweise Gruppen oder Ringe. Dieses Entwicklungsmuster wird in Abbildung 3.2 nochmals verdeutlicht.

Tabelle 3.2 gibt einen Überblick über die wichtigsten historischen Phasen und Ereignisse in der Entwicklung der Algebra.

Zeittafel

Jahr	Ereignis
ca. 20. Jhdt. v. Chr. - 16. Jhdt. n. Chr.	rhetorische Algebra (keine algebraische Symbolik)
ca. 2000 v. Chr.	Funde auf Steintafeln belegen rhetorische Algebra der Babylonier
ca. 250 n. Chr.	Der griechische Mathematiker Diophantus von Alexandria verwendet Zeichenketten für Rechnungen mit unbekannten Zahlen, die Buchstaben werden allerdings nicht als Variable interpretiert
825 n. Chr.	Al-Khwarizmis Werk „Über das Rechnen mit indischen Ziffern“ zeigt die rhetorische Algebra der Perser, welche der Babylonischen sehr ähnlich ist
16. Jhdt.	François Viète verwendet in seinen Werken eine algebraische Notation mit Buchstaben, Geburtsstunde der Algebra mit Symbolen, Interpretation als Variable
1755	Leonhard Euler definiert die Funktion operationell als abhängige Größe
ab 1830	britische Formalisten (de Morgan, Peacock, Gregory) trennen algebraische Formeln von früheren (arithmetischen) Interpretationen
frühes 20. Jhdt.	Die Funktion wird mithilfe der Mengenlehre strukturell als Menge geordneter Paare definiert
19. und 20. Jahrhundert	Theorien über Gruppen, Ringe, Körper, ...

Tabelle 3.2.: Wichtige historische Phasen und Ereignisse in der Entwicklung der Algebra

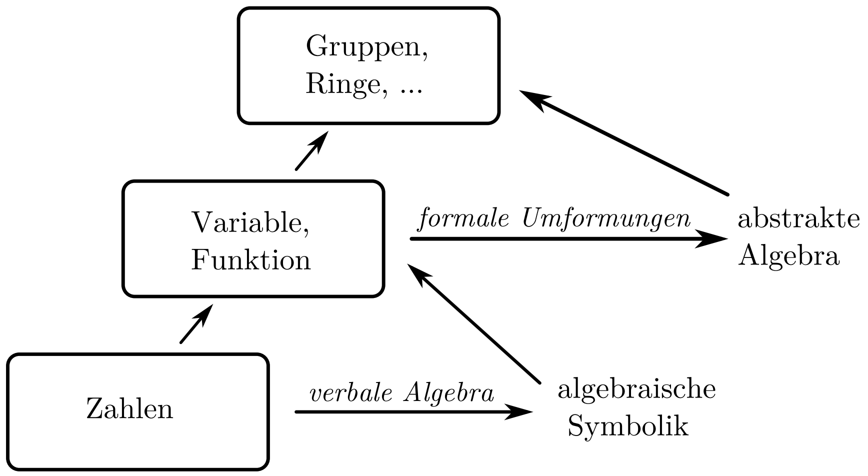


Abbildung 3.2.: Muster der historischen Entwicklung algebraischer Konzepte

3.2. Psychologische Entwicklung mathematischer Konzepte

Im letzten Kapitel wurde die geschichtliche Entwicklung bestimmter Teilbereiche der Mathematik beleuchtet. Diese hat sich als langwieriger Prozess gezeigt, in dem genutzte Operationen und Methoden immer wieder in abstrakte Objekte verpackt wurden. Dabei stellte gerade dieser Schritt der „Verdinglichung“ für die Mathematiker der jeweiligen Zeit eine große Hürde dar, die oft jahrhundertelang bestand.

Auch Schülerinnen und Schüler müssen in ihrem individuellen Lernprozess immer wieder gewisse Hürden überwinden. Die Lehre folgt im Groben dem Schema der historischen Entwicklung: In den meisten Teilbereichen der Mathematik müssen Lernende erst lange Zeit konkrete Rechnungen durchführen, bevor die strukturellen Zusammenhänge aufgezeigt werden. Obwohl historische Entwicklungen natürlich nicht eins zu eins auf psychologische Lernprozesse umgelegt werden können, ist es doch naheliegend, dass genau dieser Bruch von tätigkeitsorientierten Rechenmethoden zu abstrakten Objekten mit Schwierigkeiten verbunden ist. Das nachfolgende Kapitel wird aufzeigen, dass die Problematik noch weitreichender ist: Der Graben zwischen operationellem und strukturellem Denken ist manchmal so breit, dass viele Lernende den Sprung darüber nicht schaffen. Anstatt aus miteinander in Verbindung stehenden Rechenprozessen eine übersichtliche Struktur zu schaffen und diese schließlich in ein einziges Objekt einzufassen, welches die Basis für weitere Operationen darstellt, werden von manchen Lernenden sehr komplexe Prozessketten gebildet. Ein Fortschreiten im Stoff bedeutet früher oder später jedoch die Behandlung von mathematischen Objekten höherer Ebenen. Besteht zu diesem Zeitpunkt noch keine strukturelle Basis, so ist es nicht mehr möglich, diese neuen Objekte auszubilden. Die Prozessketten werden derart kompliziert, dass sie kaum mehr handhabbar sind. Das Gefühl des „Verständnisses“ bleibt aus.

Das folgende Kapitel befasst sich mit zwei Studien, welche die psychologische Entwicklung mathematischer Konzepte bei Schülerinnen und Schülern untersuchen. Die erste Studie beschäftigt sich mit den Lernprozessen der Addition und Subtraktion bei Grundschülern und wurde von Gray und Tall (1994b) durchgeführt. Die zweite Studie untersucht Knackpunkte beim Erlernen der Algebra in der Sekundarstufe und wurde von Sfard und Linchevski (1994) durchgeführt.

3.2.1. Lösungsstrategien für einfache Additionsaufgaben

Dieses Kapitel widmet sich einer von Gray und Tall (1994b) durchgeführten Studie und hebt für den Standpunkt dieser Arbeit wichtige Ergebnisse hervor. Die Studie untersucht die unterschiedlichen Herangehensweisen beim Erlernen der Addition und Subtraktion von Grundschülerinnen und Grundschülern. Hier wird nur die Addition behandelt. Bevor Teile der Studie im Detail geschildert werden, kommt aber noch ein kurzer Einschub zur Entwicklung des Zahlbegriffs.

Um den Prozess der Addition überhaupt erst durchführen zu können, werden abstrakte Objekte benötigt - die natürlichen Zahlen. Kinder müssen erst einen permanenten Zahlbegriff entwickeln, bevor sie addieren lernen können. Es wird nun ein Phänomen geschildert, das bei Kleinkindern, die zählen lernen, beobachtet werden kann. Im folgenden Dialog wurde ein Kind (4 oder 5 Jahre alt) dazu angehalten, die Anzahl von Groschenstücken und Bonbons zu bestimmen:

> „Siehst du, ich kaufe dir Bonbons. Ich lege hier meine Groschen hin (7 in einer Reihe). Gib mir ebenso viele Bonbons, wie Groschen daliegen. - (Er zählt) *1,2, 3 . . . 7.* - Und Groschen? - *1,2,3 . . . 7.* - Sehr gut. Und wie viele Bonbons (wieder unter der Hand versteckt) hast du mir gegeben? - . . . - Wie viele Bonbons hast du mir für einen Groschen gegeben? - *Einen.* - Sehr gut. Und für zwei Groschen? - *Zwei.* - Sehr gut. Und für drei Groschen? - *Drei.* - Sehr gut. Und wie viele Groschen liegen da? - *1,2,3 . . . 7.* - Sehr gut. Und wie viele Bonbons hast du mir gegeben? Wie viele Bonbons sind hier? (Man deckt sie einen Augenblick auf und bedeckt sie dann wieder.) - *1,2,3,4,5.*“ (Piaget und Szeminska 1975, S. 85)

Das Kind hat sieben Groschen und eine Schale mit vielen Bonbons vor sich liegen. Nach der ersten Aufforderung tauscht es Stück für Stück die sieben Groschen gegen Bonbons und gibt die Bonbons dem Untersuchenden. Dieser Vorgang wird von lautem Zählen begleitet. Auf die Frage, wie viele Groschen daliegen, antwortet das Kind mit wiederholtem Zählen der Groschen. Die Hand mit den Bonbons wird geschlossen und das Kind gefragt, wie viele Bonbons es hergegeben hat. Auf die Frage kann keine Antwort gegeben werden. Allerdings weiß es, dass es für ein Bonbon einen Groschen, für zwei Bonbons zwei Groschen und für drei Bonbons drei Groschen hergegeben hat. Auf die wiederholte Frage, wie viele Groschen das Kind vor sich liegen hat, antwortet es mit einem erneuten Zählprozess. Nun wird das Kind wieder gefragt, wie viele Bonbons es hergegeben hat, die Hand wird kurz geöffnet, dann wieder geschlossen. Wieder antwortet das Kind mit einem (unvollständigen) Zählprozess.

Das untersuchte Kind befindet sich in einer Phase, in der es die Zahlbegriffe „eins“, „zwei“, „drei“, usw., . . . zu vorliegenden Objekten bereits eins-zu-eins zuordnet, allerdings auf die Frage „Wie viele Objekte sind das?“ nicht mit einem Zahlwort antworten kann. Immer wenn gefragt wird, wiederholt das Kind lediglich die Zählprozedur. Befinden sich die Objekte nicht im unmittelbaren Sichtfeld, so kann die Frage überhaupt nicht beantwortet werden. Dieses Phänomen zeigt sehr deutlich die operationellen Wurzeln der natürlichen Zahlen: Für das Kind wird mit dem Zahlwort nicht *das abstrakte Produkt des Zählprozesses* bezeichnet, sondern *der Prozess selbst* (Sfard 1991, S. 11). Dieser kann nur an konkreten Objekten durchgeführt werden.

Die vorangehende Episode hat erkenntlich gemacht, dass die Sichtweise des permanenten Objektes auch bei natürlichen Zahlen erst entwickelt werden muss und nicht selbstverständlich ist. Die Ausprägung des Zahlbegriffs bei angehenden Grundschülerinnen und Grundschülern beeinflusst auch die Vorgehensweisen beim Addieren. Es werden nun einige Aspekte einer Studie von Gray und Tall (1994b), welche diese Vorgehensweisen untersucht, dargestellt.

Für die Studie wurden Kinder zwischen 7 und 12 Jahren aus zwei leistungsheterogenen englischen Schulen interviewt, um ihre Methoden bei simplen Arithmetik-Aufgaben festzustellen. Dazu wurden die Lehrpersonen gegen Ende des Schuljahres - nachdem sie sechs Monate Zeit hatten, um ihre Schülerinnen und Schüler gut kennenzulernen - gebeten, die Kinder in drei Gruppen einzuteilen: überdurchschnittlich (Bezeichnung im Folgenden: fähige Schülerinnen und Schüler), durchschnittlich und unterdurchschnittlich (Bezeichnung im Folgenden: weniger fähige Schülerinnen und Schüler) - gemäß ihrer Leistungen in Arithmetik. Aus jeder Gruppe wurden zwei für die Gruppe repräsentative Kinder ausgewählt. Aus jeder der Schulen wurden für jeden der sechs Jahrgänge also sechs Kinder ausgewählt, insgesamt also 72 Kinder. Das ergibt zwölf Kinder aus jedem Jahrgang, welche in drei Gruppen mit jeweils vier Kindern gemäß den Angaben der Lehrperson bezüglich ihrer Leistungen in Arithmetik aufgeteilt wurden. Im Folgenden werden die Gruppen der zwölf Kinder gleichen Alters einfach mit ihrem Alter bezeichnet. 7+ bezeichnet also die jüngste Gruppe und 12+ die älteste Gruppe. (ebd., S. 126)

Jeder Schülerin und jedem Schüler wurden Additionsaufgaben aus drei unterschiedlichen Kategorien gestellt:

- A: Addition einstelliger Zahlen mit einer Summe unter 10 (z. B.: $6 + 3$, $3 + 5$)
- B: Addition einer einstelligen Zahl zu einer Zahl zwischen 11 und 20 mit einer Summe von 20 oder weniger (z.B.: $18 + 2$, $13 + 5$)
- C: Addition von zwei einstelligen Zahlen mit einer Summe zwischen 11 und 20 (z. B.: $4 + 7$, $9 + 8$)

  (ebd., S. 126)

Die Aufgaben wurden den Schülerinnen und Schülern sowohl mündlich als auch schriftlich präsentiert. Anschauungsmaterial (Cuisenaire-Stäbchen, Unifix Block, ...) war vorhanden und durfte bei Bedarf eingesetzt werden. (Gray 1991, S. 559)

Dabei wurde beobachtet, mit welchen Lösungsstrategien die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben bearbeiteten und ob die Aufgaben richtig gelöst wurden. Es wurde zwischen den Methoden „Count-all“, „Count-on“, „Known facts“ und „Derived facts“ unterschieden.

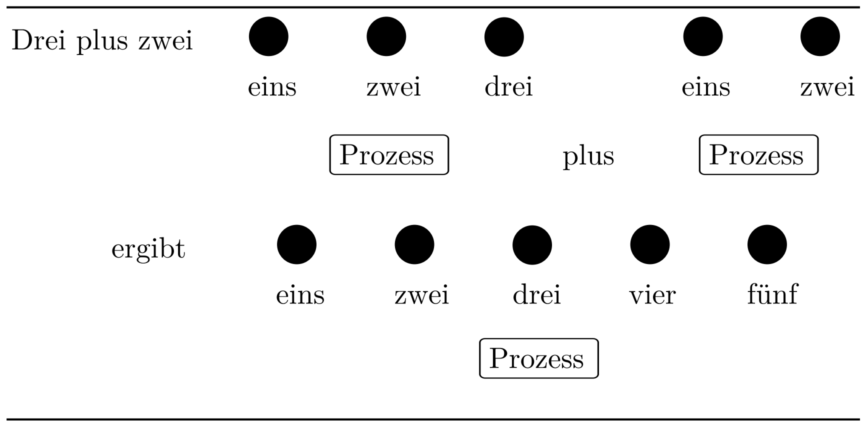


Abbildung 3.3.: Alle Abzählen (vgl. Gray und Tall 1994b, S. 123)

Die Methoden werden zukünftig mit *Alle Abzählen*, *Weiterzählen*, *Bekannte Tatsachen* und *Abgeleitete Tatsachen* übersetzt. Die einzelnen Methoden sollen nun kurz vorgestellt werden.

Bei der Methode *Alle Abzählen* wird zuerst die erste Menge gezählt, dann die zweite Menge und dann die Gesamtheit. *Alle Abzählen* ist damit ein rein operationeller Ansatz aus drei Prozessen: Zähle die erste Menge, zähle die zweite Menge, kombiniere dann beide Mengen zu einer einzelnen und zähle alle Objekte (Gray und Tall 1994b, S. 123). Erinnert man sich an die anfangs beschriebene Untersuchung von Piaget zum Zahlbegriff, so liegt die Vermutung nahe, dass Kinder, die diese Methode wählen, noch überhaupt keinen permanenten Zahlbegriff entwickelt haben. Eine Addition ist für sie nicht eine Operation zwischen zwei kognitiven Objekten, die ein drittes Objekt zutage fördert, sondern lediglich eine Ausführung von drei Prozeduren an konkreten Objekten (oder vorgestellten konkreten Objekten) hintereinander. Abbildung 3.3 soll diese Lösungsstrategie verdeutlichen.

Die Strategie des *Weiterzählens* ist schon fortgeschrittener als die des *Alle Abzählens*. Die erste Zahl wird als Anfangswert verwendet, von diesem wird weitergezählt. Diese Methode ist sehr anspruchsvoll, es muss doppelt gezählt werden. $3 + 2$ wird gelöst, indem man „vier, fünf“ sagt, während gleichzeitig im Hinterkopf behalten werden muss, dass genau zwei Zahlen weitergezählt wird. In dieser Lösungsstrategie wird die erste Zahl als Objekt aufgefasst, auf das der Weiterzähl-Prozess angewandt wird. Gray und Tall (ebd.) sehen diese Strategie als Schlüsselposition für den Übergang zwischen prozessorientiertem Denken und konzeptorientiertem Denken im Bereich der Addition. Durch den aufwändigen kognitiven Prozess (doppeltes Zählen) kann es sein, dass gerade am Anfang der Prozess deutlich im Vordergrund steht und nicht das resultierende Ergebnis. Erst wenn der Prozess gut beherrscht wird und etwas in den Hintergrund rückt, so die Vermutung, wird der Fokus auf die Summanden und deren Ergebnis verschoben. Diese können dann als zusammengehörig verknüpft werden und es werden bekannte Tatsachen geschaffen. (vgl. ebd., S. 124). Abbildung 3.4 soll diese Lösungsstrategie verdeutlichen.

Wurden bereits sehr viele Additionsaufgaben gelöst, so stellen bestimmte Rechnungen nur mehr *bekannte Tatsachen* dar. Die Lernende oder der Lernende ***weiß*** einfach, dass

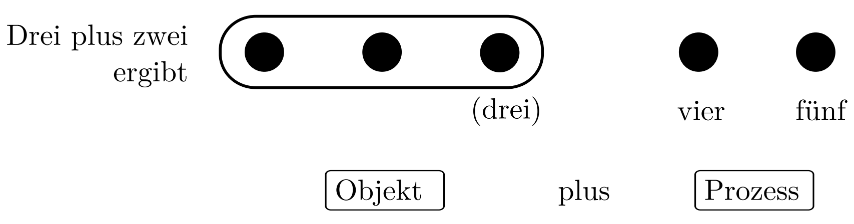


Abbildung 3.4.: Weiterzählen (vgl. Gray und Tall 1994b, S. 124)

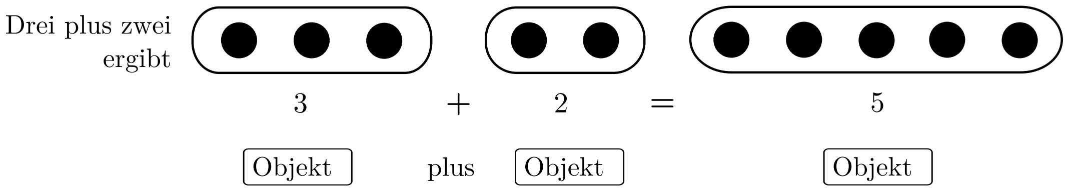


Abbildung 3.5.: Bekannte Tatsachen (vgl. Gray und Tall 1994b, S. 124)

$3+2$ fünf ergibt. Damit diese Stufe erreicht werden kann, ist es jedoch notwendig, dass bei vorhergehenden Rechenaufgaben sowohl die beiden Summanden als auch das Ergebnis als permanente Strukturen im Kopf behalten werden können. Dazu ist, wie bereits erwähnt, eine gewisse Automatisierung von Zählprozessen notwendig. (vgl. Gray und Tall 1994b, S. 124) Abbildung 3.5 soll diese Lösungsstrategie verdeutlichen.

Entwickeln Lernende ein Verständnis für unser Zahlensystem, so können aus bekannten Tatsachen sehr schnell weitere *Tatsachen abgeleitet* werden. Die Lösung der Aufgabe $16 + 3$ kann beispielsweise aus dem Wissen, dass $6 + 3 = 9$ ist, direkt abgeleitet werden. Ein weiteres Beispiel ist, dass $6 + 7$ sehr oft gelöst wird, indem vom (bereits auswendig gemerkten) Ergebnis der bereits bekannten Teilaufgaben $6+6$ oder $7+7$ eins dazugezählt bzw. abgezogen wird (vgl. Gaidoschik 2012, S. 11). Beim Lösen werden Aufgaben flexibel in Bestandteile aus bekannten Tatsachen zerlegt, diese werden genutzt und die Teile anschließend wieder zu einer Lösung der ursprünglichen Aufgabe zusammengefügt. Diesem Vorgehen liegt eine *prozepthafte* Denkweise (siehe Kapitel 2.2) zugrunde, objekthafte und prozesshafte Sichtweisen werden flexibel kombiniert. (Gray und Tall 1994b, S. 125) Abbildung 3.6 soll diese Lösungsstrategie verdeutlichen.

Eine Studie, welche sich sehr ausführlich mit der Entwicklung unterschiedlicher Lösungsstrategien für additive Grundaufgaben beschäftigt, und auch Arten, wie *Tatsachen abgeleitet* werden können, unterscheidet, wurde von Gaidoschik (2010, S. 361-528) in seiner Dissertation veröffentlicht. Eine weitere Veröffentlichung von Gaidoschik (2012) beschäftigt sich explizit mit *Abgeleiteten Tatsachen* zum Lösen von Aufgaben mit Zehnerübergang.

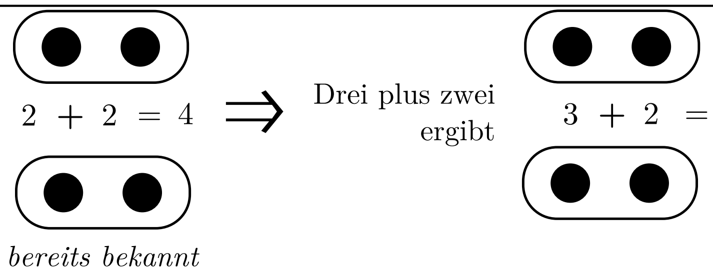


Abbildung 3.6.: Abgeleitete Tatsachen

Es wurden vier Methoden, die von Schülerinnen und Schülern zur Lösung von Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 verwendet werden, vorgestellt: *Alle Abzählen*, *Weiterzählen*, *Bekannte Tatsachen* und *Abgeleitete Tatsachen*. Die Technik *Alle Abzählen* ist rein prozesshaft, ihre Verwendung deutet darauf hin, dass ein permanenter Zahlbegriff nicht, beziehungsweise sehr schwach ausgebildet ist. Für die Methode *Weiterzählen* muss ein permanenter Zahlbegriff vorhanden sein, allerdings ist zu vermuten, dass der aufwändige Prozess gerade am Anfang im Vordergrund steht und so die Beziehungen zwischen den Zahlobjekten nicht registriert werden. Das *Weiterzählen* führt zur Vorgehensweise *Bekannte Tatsachen*, welche lediglich bekannte Beziehungen zwischen den Zahlen verwendet und somit völlig frei von Zählprozessen ist. *Abgeleitete Tatsachen* erfordern einen flexiblen Umgang mit der operationellen und der strukturellen Sichtweise.

Diagramm 3.7 zeigt die von überdurchschnittlich und unterdurchschnittlich fähigen Schülerinnen und Schülern verwendeten Methoden zu einer Reihe von Additionsproblemen. Es wird nach unterschiedlichen Altersgruppen und unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden der Probleme unterteilt. Vergleicht man den Einsatz der Methoden, so ist besonders auffallend, dass quer durch alle Altersgruppen und Schwierigkeitsgrade der Aufgaben, die fähigen Schülerinnen und Schüler die Methoden *Bekannte Tatsachen* und *Abgeleitete Tatsachen* weitaus häufiger verwendeten als die weniger fähigen. Umgekehrt verwendeten die weniger fähigen Schülerinnen und Schüler weitaus öfter prozedurale Methoden wie *Alle Abzählen* oder *Weiterzählen* als die fähigen. Bei den jüngsten der weniger fähigen Kinder führten die prozeduralen Methoden bei Aufgaben der Schwierigkeitsgrade B und C auch oft zu Fehlern. Lediglich einer der weniger fähigen Schüler wandte die Methode der *Abgeleiteten Tatsachen* in Kategorie A an. (Gray und Tall 1994b, S. 126-127)

Die Zahlkombinationen der Kategorie B waren aus Teilen von Zahlen zusammengestellt, die bereits zuvor in Aufgaben der Kategorie A behandelt wurden. Trotzdem konnte vor allem bei den Kindern unter 10+ ein starker Kontrast zwischen den fähigen und den weniger fähigen Schülerinnen und Schülern beobachtet werden.

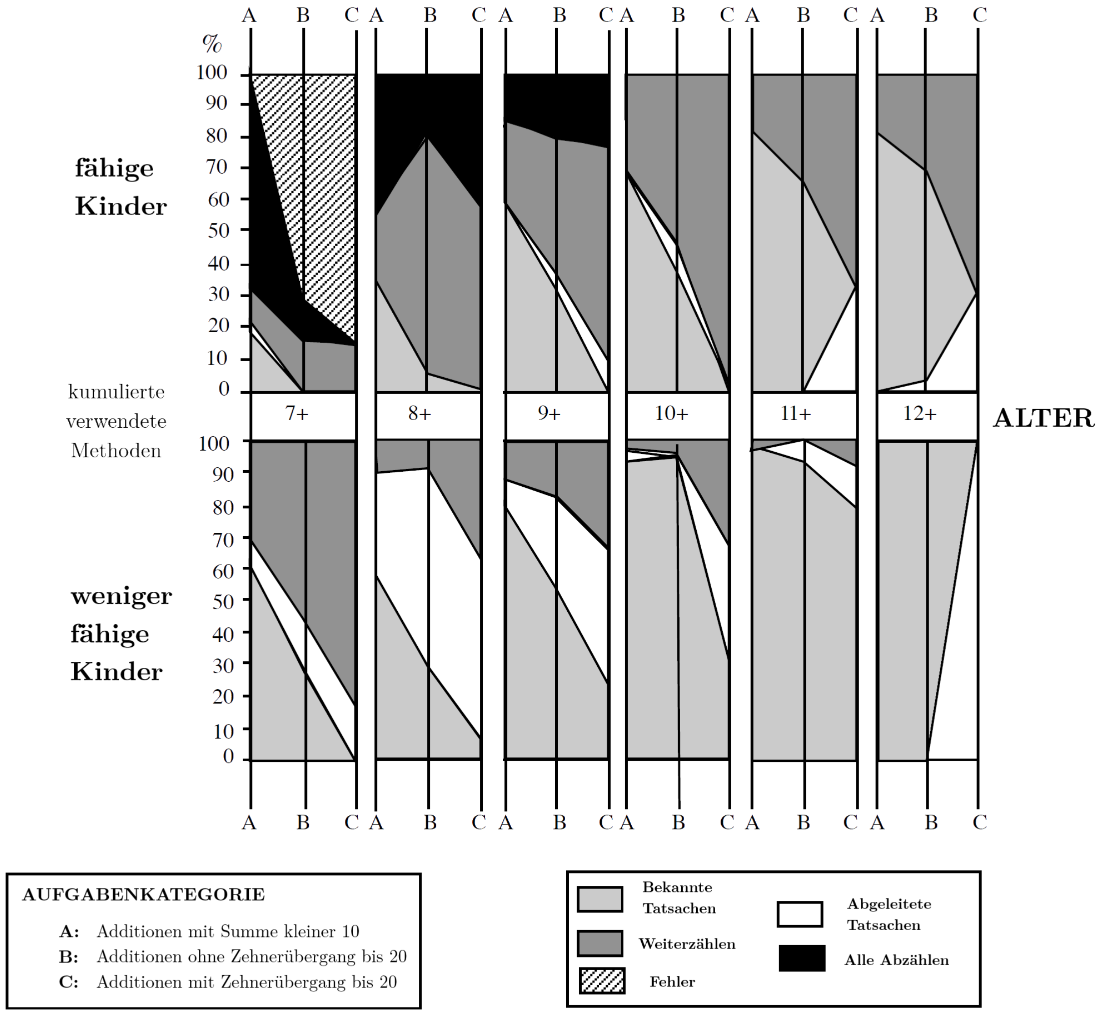


Abbildung 3.7.: Verwendete Methoden zur Lösung von Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 (Gray und Tall 1994a, S. 12)

Die fähigen Schülerinnen und Schüler machten sich entweder

- die bereits bekannte Kategorie A Kombination zunutze, um eine Teillösung für die Kategorie B Aufgabe zu erhalten und addierten 10 dazu, oder
- leiteten die Teillösung für die Kategorie B Aufgabe anderweitig ab und addierten 10 dazu.

  (Gray und Tall 1994b, S. 126-127)

Wurde beispielsweise eine fähige Schülerin oder ein fähiger Schüler mit der Aufgabe $15 + 4$ konfrontiert, so wurde diese gelöst, indem die Schülerin oder der Schüler entweder

- einfach wusste, dass $5 + 4$ gleich 9 ist (Ergebnis aus zuvor gestellter Aufgabe der Kategorie A) und dann 10 zu 9 addierte, oder
- die Schülerin oder der Schüler z.B. aus $5 \cdot 2 = 10$ ableitete, dass $5 + 4$ gleich 9 ist und zu diesem Ergebnis dann 10 addierte.

  (ebd., S. 126-127)

Obwohl auch die weniger fähigen Kinder die relevante Kategorie A Antwort gewusst haben könnten, verwendeten sie prozedurale Methoden, um die Kategorie B Aufgabe zu lösen. (ebd., S. 126-127)

Auch bei der hier nicht vorgestellten Subtraktion zeigt sich dasselbe Muster: Die weniger fähigen Schülerinnen und Schüler verwendeten prozesshafte Zählstrategien, während die fähigen Schülerinnen und Schüler ihr bereits bekanntes Wissen flexibel einsetzten, Aufgaben in bekannte Teilaufgaben zerlegten und die Lösungen wieder zusammensetzten. Dadurch ergibt sich nach Gray und Tall (1994a, S. 17) der „proceptual divide“: Während die Prozeduren der weniger Begabten immer aufwändiger werden, gelingt es den Begabten immer besser, neue Fakten durch das Ableiten von Tatsachen zu produzieren und so die kognitive Belastung noch weiter zu reduzieren.

Fähige Schülerinnen und Schüler handhaben also nicht etwa weit größere Datenmengen, sondern das Umgekehrte ist der Fall. Während die weniger fähigen Schülerinnen und Schüler Methoden verwenden, die für kleine Zahlen noch gut funktionieren, beharren sie auch für große Zahlen auf denselben und müssen lange, kognitiv anspruchsvolle Rechenprozesse durchführen. Die fähigen Schülerinnen und Schüler hingegen können durch das flexible Generieren neuer Fakten die bekannten Tatsachen immer weiter reduzieren - der kognitive Aufwand wird für sie immer geringer. (vgl. ebd., S. 17-18) Diese Verzweigung der Strategien ist nach Gray und Tall (ebd., S. 18) einer der signifikantesten Faktoren, der zwischen Erfolg und Misserfolg entscheidet.

Auch der sehr erfolgreiche Mathematiker Thurston (1990, S. 847) meint Ähnliches, wenn er hervorhebt, dass Mathematik „amazingly compressible“ ist: Man müht sich lange Zeit ab und führt einen gewissen Prozess Schritt für Schritt mit unterschiedlichen Herangehensweisen durch. In dem Moment, in dem man diesen aber wirklich verstanden hat, ändert sich die Perspektive und man sieht ihn als Ganzes, es findet eine enorme mentale Kompression statt. Der Prozess wird als einzelnes mathematisches Objekt betrachtet.

Dieses kann beiseite gelegt werden und kurzerhand als Ganzes wieder abgerufen werden, oder Schritt für Schritt in einem anderen Prozess eingesetzt werden. Den Einblick, der durch die Kompression erlangt wird, bezeichnet Thurston (1990, S. 847) als „one of the real joys of mathematics“. Findet diese Kompression - wie bei schwachen Schülerinnen und Schülern beobachtet - allerdings überhaupt nicht statt, so ist ein ständiges Ansteigen der Beanspruchung zu erwarten, bis diese irgendwann zu viel wird.

Dies würde auch erklären, wieso Expertinnen und Experten Mathematik oft als einfaches Gebiet betrachten, und Probleme von Anfängerinnen und Anfängern manchmal gar nicht verstehen können. Sie arbeiten eben mit sehr effektiven Methoden, welche sie kognitiv entlasten, während Anfängerinnen und Anfänger oder weniger fähige Schülerinnen und Schüler mit sehr aufwändigen Prozessen umgehen müssen. Sie betreiben eine schwierigere Art der Mathematik. (vgl. Gray und Tall 1994b, S. 137)

Gray und Tall (ebd., S. 135) übertragen die Ergebnisse ihrer Studie auch auf andere Teilgebiete der Mathematik, sie gehen davon aus, dass die Verkapselung von Prozessen in *Prozepte* in verschiedenen Abschnitten der Mathematik auftritt: Wiederholtes Zählen führt zur Addition, die wiederholte Addition führt zur Multiplikation usw. Die weniger fähigen Kinder, die sich lediglich auf Prozesse fixieren, können Probleme einer höheren Stufe nur lösen, indem sie aufeinanderfolgende Prozesse koordinieren. Die fähigeren, *prozeptuell* denkenden Kinder erledigen eine leichtere Aufgabe. Die Zeichenketten der Summe oder Multiplikation repräsentieren wieder eine Zahl. Es müssen immer nur Operationen auf einzelne Objekte angewandt werden. (vgl. ebd., S. 135) Die geistige Beanspruchung steigt mit einem Fortschreiten im Stoff nicht an.

Als weitere Teilbereiche der Mathematik, für die aufgrund der Neuinterpretation bereits durchgeführter Studien ähnliche Phänomene vermutet werden, werden von Gray und Tall (ebd., S. 137-138) algebraische Ausdrücke, das Konzept der Funktion und Grenzwerte genannt.

3.2.2. Schwierigkeiten bei der Entwicklung algebraischer Konzepte

Dieses Kapitel widmet sich einer von Sfard und Linchevski (1994) durchgeführten Untersuchung zur Entwicklung algebraischer Sichtweisen. Es liefert keine vollständige Beschreibung der Studie. Für diese Arbeit wichtige Aspekte werden hervorgehoben.

Eine der grundlegenden Annahmen der Studie ist, dass die psychologische Entwicklung in groben Zügen der historischen Entwicklung folgt (siehe Kapitel 3.1.2). Die Entwicklung erfolgt also von der rhetorischen Algebra (ohne Symbolsprache) über die Algebra des fixen Wertes (das Symbol steht für eine bestimmte, aber unbekannte Zahl) zur funktionalen Algebra (das Symbol steht als variable Größe, in die eingesetzt werden kann). Dabei untersucht die Studie zwei Knackpunkte, die einen Konzeptwechsel erfordern: Den Übergang von der rhetorischen Algebra zur Algebra des festen Wertes und den Übergang von der Algebra des festen Wertes zur funktionalen Algebra.

Im Rahmen der Studie wurden Interviews mit drei Gruppen von Kindern durchgeführt. Inhaltlich konzentrierten sich die Interviews auf Gleichungen und Ungleichungen. Die Gruppen setzten sich wie folgt zusammen:

Gruppe 1: Sechs Jugendliche der siebten Schulstufe (Alter 12-13) mit durchschnittlichen und leicht überdurchschnittlichen Fähigkeiten, die bereits mit algebraischen Ausdrücken vertraut waren, jedoch nicht mit dem Konzept der Gleichung;

Gruppe 2: Vier Jugendliche der neunten Schulstufe (Alter 14-15) mit überdurchschnittlichen Fähigkeiten, die sich mit linearen und quadratischen Gleichungen bereits gut ausgekannt haben sollten und bereits mit dem allgemeinen Funktionsbegriff und linearen Funktionen vertraut waren;

Gruppe 3: Vier Jugendliche der zehnten Schulstufe (Alter 15-16) mit überdurchschnittlichen Fähigkeiten, die eine lange Erfahrung mit Schulalgebra in Kontexten wie der analytischen Geometrie und Analysis hatten (die funktionale Herangehensweise sollte also wohl vertraut sein).

(ebd., S. 206)

Neben direkten Interviews fand auch noch eine andere Art der Befragung statt. Nachdem Kindern der Gruppe 1 erklärt wurde, wie lineare Gleichungen der Form $ax + b = cx + d$ gelöst werden, wurde jedes Kind dazu angehalten, dies einem Gleichaltrigen zu erklären, für den das Thema der Gleichungen noch völlig neu war. Auf diese Weise sollte eine andere Perspektive auf die Denkweise der Kinder erlangt werden. Zusätzlich zu den Interviews wurden frühere Untersuchungen im Rahmen Sfards „theory of reification“ neu interpretiert. (ebd., S. 205-206)

Übergang zur Algebra des festen Wertes

Die rhetorische Algebra hat ihren Fokus auf numerischen Umformungen und ist der Arithmetik noch sehr nahe. Eine Symbolik für algebraische Ausdrücke ist nicht vorhanden, der Zugang ist rein operationell (siehe Kapitel 3.1.2). Es wird untersucht, wie sich der Übergang von dieser operationellen Algebra auf die strukturelle Algebra des festen Wertes durch das Verhalten der Schülerinnen und Schüler ausdrückt. Es scheint sich die Annahme zu bestätigen, dass operationelle Konzeptionen den strukturellen vorausgehen: Selbst ohne direkte Intervention einer Lehrperson wurden algebraische Ausdrücke von den Schülerinnen und Schülern zunächst als rechenbetonte Prozesse interpretiert. Dieser Umstand soll an den folgenden Beispielen illustriert werden. Dabei zeigt oft schon die Wortwahl der Schülerinnen und Schüler deren operationelle Sichtweise auf. (vgl. ebd., S. 206-207)

Das folgende Fragment eines Dialoges zwischen der Interviewenden (I) und dem Kind Ayala (A) aus Gruppe 1 deutet aufgrund der Wortwahl auf die aus der Arithmetik kommenden operationellen Ursprünge der algebraischen Formeln hin. Ayala versuchte zu erklären, wie ihre Freundin Irit eine Gleichung löste. (vgl. ebd., S. 207)

I: How did Irit go from here [$15x = 8x + 35$] to here [$7x = 35$]?

A: She subtracted an exercise, 8 times x, and she subtracted it also from the other side of the equation.

I: What do you mean when you say 'exercise' ?

A: 8 times x is an exercise, it is something you must do. She takes off this exercise. It's like when you have $1 + 2 + 4 = 3 + 4$. Then you can take off 3, and then at the other side you take off 'one plus two'.

I: $1 + 2$ is an exercise and 3 is not an exercise?

A: 3 is a number, it's a result of an exercise. This [points to $1 + 2$] is the exercise: and $8x$ is an exercise and $15x$ is an exercise. We subtract the same exercise from both sides so that what is left is the same.

(Sfard und Linchevski 1994, S. 207)

Ayalas Aussagen deuten darauf hin, dass sie irgendwo auf dem Weg zwischen der operationellen und der strukturellen Sichtweise ist: Sie manipuliert algebraische Ausdrücke, wie wenn diese Objekte wären. Die Sprache deutet aber noch stark auf eine operationelle Konzeption hin. (ebd., S. 207)

Die Überzeugung, dass ein Ausdruck wie $8x$ nichts weiter als ein Prozess ist, der ausgeführt werden muss, könnte auch ein Grund für das Problem sein, das Schülerinnen und Schüler mit Gleichungen haben, bei denen das „Ergebnis" der Gleichung nicht als Zahl auf einer Seite steht. Bei der „British national survey" mit 15-Jährigen konnte ein großer Leistungsunterschied bei folgenden beiden, scheinbar nicht allzu verschiedenen Aufgaben ausgemacht werden. „What is x if $2x + 7 = 45$" und „If $A = L \cdot B$ tells us how to work out A, what formula tells us how to work out L?" (Bell 1992, zit. n. Sfard 1994). Die Erfolgsquoten bei den beiden Aufgaben waren 73% bzw. 39%. Dieser Unterschied könnte dadurch erklärt werden, dass beim zweiten Problem die Buchstaben die Rolle von Parametern hatten und $L = A/B$ damit als Formel und nicht als Zahl interpretiert werden musste. Für diejenigen, für die eine algebraische Formel lediglich einen Prozess darstellte, konnte die Angabe nicht sinnvoll interpretiert und somit nicht gelöst werden. (vgl. ebd., S. 207-208)

Die operationelle Interpretation von Gleichungen zeigt sich auch schon am Verständnis des Gleichheitszeichens. Das Zeichen wird häufig als Aufforderung, etwas zu tun, interpretiert und nicht als Symbol für eine statische Relation (Kieran 1981). Der Ausdruck auf der linken Seite ist ein Prozess, während der Ausdruck auf der rechten Seite ein Ergebnis sein muss. Diese Sichtweise scheint direkt aus der Arithmetik zu kommen, wo sehr viele Aufgaben auf diese Weise berechnet werden müssen. Dies ist auch dieselbe Art, wie das „="-Zeichen am Taschenrechner verwendet wird, es dient als „ausführen" Kommando. Wenn das Gleichheitszeichen allerdings auf diese Weise interpretiert wird, verliert es grundlegende Charakteristiken einer Äquivalenzrelation. Es ist dann weder symmetrisch noch transitiv. Genau diese beiden Eigenschaften werden von Schülerinnen und Schülern auch häufig verletzt. (vgl. Sfard und Linchevski 1994, S. 208) Eine Aufgabe wie, „Wie viele Murmeln hast du, wenn du 3 mal 4 Murmeln gewinnst und 5 mal zwei Murmeln gewinnst“, wird oft folgendermaßen geschrieben:

$3 \cdot 4 = 12 + 5 \times 2 = 12 + 10 = 22$ (ebd., S. 208-209)

Ein überraschendes Problem einer Schülerin der Gruppe 1 ist auch auf die von der Arithmetik geprägte operationelle Interpretation des Gleichheitszeichens zurückzuführen: Die Schülerin hatte gerade die Gleichung $7x + 157 = 248$ erfolgreich gelöst, war bei der nächsten Aufgabe $112 = 12x + 47$ jedoch ratlos (ebd., S. 209).

Die Schülerinnen und Schüler der Gruppe 1 waren vor der Untersuchung mit Gleichungen noch nicht vertraut gewesen, es kann ihnen nicht vorgeworfen werden, dass ihnen Eigenschaften des Gleichheitszeichens wie die Transitivität und die Symmetrie in der Anwendung nicht klar waren. Allerdings zeigt sich sehr deutlich, dass Schülerinnen und Schüler in ihrem Anfangsstadium *intuitiv* operationelle Interpretationen der Algebra wählen. (vgl. ebd., S. 209)

Sfard und Linchevski (ebd., S. 209) fassen die obigen Beobachtungen sehr deutlich zusammen. Die operationelle Sichtweise ist in der Algebra elementar, die strukturelle Sichtweise entwickelt sich nicht sofort. Die Idee der Prozess-Objekt-Dualität ist von Natur aus mit Schwierigkeiten verbunden. Es kann nicht erwartet werden, dass diese problemlos überwunden werden.

Übergang zur funktionalen Algebra

Der Punkt, an dem der Übergang von der Algebra eines festen Wertes zur funktionalen Algebra stattfindet, ist schwer auszumachen. Das liegt hauptsächlich daran, dass in unseren heutigen Lehrplänen der funktionale Ansatz bereits am Beginn der Algebra steht. Im Lehrplan der AHS-Unterstufe wird bereits in der 1. Klasse das Arbeiten mit Formeln gefordert:

> **1.2 Arbeiten mit Variablen**
>
> ...
>
> - insbesondere Formeln bzw. Gleichungen aufstellen,
>
> ...
>
> - Formeln anwenden und interpretieren können.
>
> (*Lehrplan AHS Unterstufe Mathematik* 2000, S. 5)

Die Variable wird zwar beispielsweise im Schulbuch „Das ist Mathematik 1“ (Reichel, Humenberger, Litschauer, Groß und Aue 2011, S. 83) als eine ganz bestimmte unbekannte Zahl eingeführt, jedoch wird bereits in dieser Einführung darauf hingewiesen, dass Variablen auch für beliebige Zahlen stehen können. In einigen Aufgaben der ersten Klasse soll auch bereits in Formeln eingesetzt werden (ebd., S. 87). Die unbekannten Buchstaben werden also bereits in der ersten Klasse - getreu ihrem Namen - auch als Variablen behandelt. Der Funktionsbegriff wird offiziell erst in der 4. Klasse erarbeitet (*Lehrplan AHS Unterstufe Mathematik* 2000, S. 7). Mit dem zugrundeliegenden Konzept des variablen Symbols, in das eingesetzt werden kann, werden die Schülerinnen und Schüler aber bereits ab dem Beginn der Algebra konfrontiert. In diesem Sinne kann also nicht wirklich von einem Übergang gesprochen werden. Auch in anderen Ländern scheint die Vorgehensweise eine ähnliche zu sein. (vgl. Sfard und Linchevski 1994, S. 212-213)

Sfard und Linchevski (ebd., S. 213) lassen in ihrem Artikel anklingen, dass es im Hinblick auf die historische Entwicklung der Algebra (siehe Kapitel 3.1.2) vielleicht sinnvoller wäre, den funktionalen Aspekt anfangs noch auszusparen. Auch würde das eher der mehrfach beobachteten natürlichen Entwicklung - von operationellem zu strukturellem - entsprechen.

In der Studie wurde die frühe Behandlung des funktionalen Aspekts in der Schule berücksichtigt. Zum Lösen vieler Schulbuchaufgaben genügt es aber trotzdem, die Variable lediglich als unbekannte Zahl zu interpretieren (z.B. Lösen von eindeutig lösbaren Gleichungssystemen). Deshalb wurden von den Durchführenden für die Interviews gezielt drei Aufgaben ausgewählt, bei denen der funktionale Ansatz unverzichtbar oder zumindest von Vorteil war. Es wurden eine quadratische Ungleichung, ein System von Gleichungen mit unendlicher Lösungsmenge und ein System von Gleichungen mit freiem Parameter ausgewählt. Dies waren absichtlich Aufgaben, wofür die Schülerinnen und Schüler möglicherweise noch keine Lösungstechnik gelernt hatten. Dadurch wurde gehofft, dass die algebraischen Konzeptionen der Schülerinnen und Schüler zum Vorschein kommen würden, und diese nicht von mechanischen Lösungsmethoden überlagert würden. Theoretisch waren alle Schülerinnen und Schüler mit dem notwendigen Wissen ausgestattet, um die Aufgaben zu lösen. Die Frage war nur, ob die funktionalen Konzeptionen so präsent waren, damit die Aufgaben überhaupt richtig interpretiert werden konnten. (vgl. ebd., S. 214)

Alle drei Aufgaben wurden mit Schülerinnen und Schülern der Gruppe 2 und 3 durchgeführt und führten zu ähnlichen Schlussfolgerungen bezüglich ihrer Konzeptionen. In dieser Arbeit wird stellvertretend nur das erste Problem, die quadratische Ungleichung, vorgestellt.

Die Aufgabenstellung war folgende:

$$Solve : x^2 + x + 1 > 0$$

Diese wurde gewählt, da zur Lösung ein fortgeschrittenes strukturelles Verständnis erfordert wird. Für das Verständnis und auch zur Lösung einer Gleichung würde die Interpretation des Symbols x als unbekannte Zahl genügen. Jede Seite der Gleichung könnte einfach als *konkretes Produkt* aus Operationen auf diese Unbekannte aufgefasst werden. Eine Ungleichung erfordert, dass linke und rechte Seite für *unterschiedliche Werte* des Symbols x geprüft und verglichen werden. In der Ungleichung spielen die Buchstaben also die Rolle einer Variable und die linke und rechte Seite sind von dieser Variable abhängige Funktionen. Auch kann das „>"-Symbol nicht wie das „="-Zeichen als Aufforderung, etwas zu tun, interpretiert werden. (ebd., S. 214)

Die obige Aufgabe könnte sehr effizient gelöst werden, indem der linke Teil der Ungleichung „$x^2 + x + 1$“ als Funktion interpretiert wird und überprüft wird, für welche Werte von x sich die Funktionswerte oberhalb der x-Achse befinden. Obwohl alle Schülerinnen und Schüler, denen die Aufgabe vorgelegt wurde, bereits Erfahrung im Zeichnen von Parabeln hatten, schaffte es keine Einzige und kein Einziger, die Aufgabe zu lösen. (vgl. ebd., S. 214) Der folgende Dialog zwischen der Interviewenden und dem (überdurchschnittlich begabten) Schüler Alon (15) ist recht typisch für den Verlauf der Gespräche:

(1) I: [Pointing to the inequality] What is it? What do we call such a thing?

(2) A: Quadratic equation.

(3) I: Equation?

(4) A: No, inequality.

(5) I: What do we look for when we solve it?

(6) A: We try to find out what the left-hand side is equal to.

(7) I: What do you mean?

(8) A: We check how much greater than zero it is and whether it really is greater than zero.

(9) I: Could you be more precise? What are you looking for? What do you want to get and to write down in the end?

(10) A: That $x^2 + x + 1$ ... I want to find x^2 and x ... then I can substitute and check whether it is true, this equation ... this inequality.

(11) I: Say it again. What are you looking for? Chairs, pens, tables?

(12) A: A number.

(13) I: A certain number?

(14) A: Yes, one number.

(15) I: The special number that ... what?

(16) A: That I can substitute and find a solution.

(17) I: What do you mean by ‘find the solution’?

(18) A: Solution, it means that the inequality is true.

(ebd., S. 215)

Aus den Aussagen (6) und (8) Alons erkennt man sehr deutlich, dass er den Buchstaben x als festen Wert, der gefunden werden muss, betrachtet. Die Aussagen (10), (12), (14) und (16) zeigen auch, dass x für ihn nur ein Codename für eine bestimmte konkrete Zahl ist. Alon befindet sich also noch in der Phase, in der er Symbole als unbekannte feste Werte betrachtet. Mit diesem Ansatz konnte die Aufgabe aber nicht gelöst werden. Alon verfiel in alte Routinen, mit denen er hoffte, zu einer Lösung zu gelangen, auch wenn er die Angabe offensichtlich nicht verstand. (vgl. Sfard und Linchevski 1994, S. 215)

(19) I: Do you know how to do what you want to do?

(20) A: Maybe... [writes $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1})/2$]. I have here the square root of -3. There is no solution.

(21) I: So?

(22) A: So this [points to the inequality] is not true.

(23) I: What do you mean?

(24) A: That whatever I substitute, it will be less than zero, or maybe zero, but it won't be more than zero.

(ebd., S. 215)

Alon war nicht fähig, die Aufgabe funktional zu betrachten, wodurch er sie sinnvoll interpretieren hätte können. Stattdessen verfiel er in mechanische Handlungen, die er nicht hinterfragte. Das Auftreten einer Wurzel aus einer negativen Zahl war für ihn ein Zeichen, dass die Ungleichung keine Lösung haben sollte (während in Wirklichkeit jede reelle Zahl die Ungleichung erfüllt). Die Antwort wurde automatisch gegeben, es wurde kein Versuch gestartet, diese innerhalb der Aufgabenstellung zu deuten. Obwohl der funktionale Ansatz durchaus bekannt war, wurde er zum Lösen der Ungleichung von keiner Schülerin und keinem Schüler angewandt. (vgl. ebd., S. 220)

Dies ist auch die Folgerung, die Sfard und Linchevski (ebd., S. 220) aus dem zweiten Teil der Untersuchung (also den drei Aufgaben) ziehen: Die funktionale Perspektive war nicht notwendigerweise außerhalb des Sortiments der verfügbaren Ansätze der Schülerinnen und Schüler. Das Problem lag bei der Anpassungsfähigkeit: Der funktionale Ansatz war nicht immer zugänglich, selbst wenn er unverzichtbar war, wurde er nicht spontan eingesetzt.

Die Ergebnisse dieser Studie deuten klar in eine Richtung: Strukturelle Ansätze folgen den operationellen. Die Entwicklung flexibel einsetzbarer struktureller Ansätze ist anscheinend sehr schwierig und nicht immer erfolgreich.

Die abstrakten Objekte werden aber früher oder später benötigt, um immer komplexer werdende Prozesse in kleine überschaubare Einheiten zu unterteilen. Die Objekte dienen als Wegpunkte, um sich in den umfangreichen Handlungsketten zurechtzufinden, sie verhindern, dass unser Arbeitsgedächtnis überlastet wird. Ab einer gewissen Stufe der Wissensbildung kann eine weitere Entwicklung durch fehlende strukturelle Ansätze behindert werden. Das Anwachsen von Informationen führt zur Sättigung alter Schemata, diese werden undurchdringlich für jegliche Bereicherung. Werden keine neuen Strukturen ausgebildet, mit denen das neue Wissen organisiert werden kann, so kommt es häufig zu Problemen und Verständnisschwierigkeiten. (vgl. Sfard 1991, S. 28-29)

Die vorgestellte Studie wurde 1994 in Israel durchgeführt, was natürlich vor allem für den zweiten Teil die Frage aufdrängt, ob dieser für unser gegenwärtiges Schulsystem überhaupt aussagekräftig ist. Anders formuliert: Könnte man bei österreichischen Schülerinnen und Schülern 2014 ähnliche Probleme bezüglich der funktionalen Sichtweise feststellen?

Ein Kernunterschied zwischen den Lehrplänen in Israel 1994 und in Österreich 2014 ist, dass in Israel lineare Ungleichungen bereits in der siebten Schulstufe eingeführt werden, in Österreich erst in der 10. Schulstufe. In Österreich werden dann auch sofort quadratische Ungleichungen behandelt. Das Zeitfenster, in dem die Schülerinnen und Schüler zwar Erfahrung mit linearen Ungleichungen haben, auf quadratische Ungleichungen aber noch nicht vorbereitet sind, wäre also sehr kurz. In Israel wurden Ungleichungen stark an Gleichungen angelehnt, auch in Österreich ist das der Fall. Die Ungleichungen werden in einem Schulbuch über ihre Rechenregeln eingeführt. Es wird hervorgehoben, dass der einzige wesentliche Unterschied zum Rechnen mit Gleichungen ist, dass eine Multiplikation mit einer negativen Zahl zu einem Umdrehen des Ungleichheitszeichens führt (vgl. Malle u. a. 2010b, S. 34-35). Der eigentliche Kern, nämlich dass *alle* Werte für x gesucht werden, sodass die linke Seite größer als die rechte Seite ist (oder umgekehrt), wird nicht erwähnt.

Auch wenn sich die Lehrpläne unterscheiden, ist es wohl nicht unwahrscheinlich, dass man auch bei österreichischen Schülerinnen und Schülern auf ähnliche Konzeptschwierigkeiten stoßen wird. Eine dementsprechende Untersuchung in Österreich wäre sicher sehr aufschlussreich.

3.3. Modelle zur Entwicklung mathematischer Konzepte

Anhand einer Literaturrecherche wurden in dieser Arbeit zwei unterschiedliche Sichtweisen für mathematische Konzepte erarbeitet: die strukturelle Sichtweise und die operationelle Sichtweise. Auch wurde die Dualität zwischen diesen Konzeptionen diskutiert, beide Konzeptionen müssen präsent sein und ein flexibles Hin- und Herschalten ist für mathematischen Erfolg ausschlaggebend. Mittels historischer Überlegungen und unterschiedlicher Studien wurde verdeutlicht, dass operationelle Konzeptionen den strukturellen im Allgemeinen vorausgehen. Sowohl der „Theory of Reification“ als auch der Idee des „Procepts“, sowie der „APOS Theory“ liegen die beiden vorgestellten Sichtweisen zugrunde. Tabelle 3.3 stellt einen Überblick über die Theorien her.

Im folgenden Kapitel werden die Kernpunkte der „Theory of Reification“ und der „APOS Theory“ kurz und übersichtlich zusammengefasst. Sie stellen die theoretische Grundlage für den praktischen Teil dieser Diplomarbeit dar.

Die Idee des „Procepts“ greift Tall (2013) in seiner Theorie „Three Worlds of Mathematics“ in seinem aktuell erschienenem Buch wieder auf. Diese wird hier aber nicht näher erläutert.

	Theory of Reification „Theorie der Reifikation“	**Procept Theory** „Prozept Theorie“	**APOS Theory** „APOS-Theorie“
Begründer	Anna Sfard	David Tall	Ed Dubinsky
Ausgangs-punkt	Sfard (1991)	Gray und Tall (1994b)	Dubinsky (1984)
Aktuellste Veröffentli-chung	Sfard (2008)	Tall (2013)	Arnon u. a. (2014)
Stufen	Process (before interiorization)	Procedure	Action
	Process (interiorized)	Multi-Procedure	Process
	Process (condensed)	Equivalent procedures as a single Process	Totality (Aufnahme in Theorie noch ungewiss)
	Object (reified)	Procept	Object (encapsulated)
			Schema

Tabelle 3.3.: Überblick und Gegenüberstellung der „Theory of Reification“, „Procept Theory“ und „APOS Theory“ (vgl. Tall 2013, S. 64)

Gegenüberstellungen von Theorien unterschiedlicher Autorinnen und Autoren, in denen verschiedene Teilbereiche der Theorien einander zugeordnet werden (wie die in Tabelle 3.3), sind sicherlich immer etwas problematisch. Es ist wohl selten der Fall, dass eindeutige Zuordnungen zwischen verwendeten Begrifflichkeiten zweier ähnlicher Theorien getroffen werden können. Schließlich entwächst jede Theorie einem bestimmten Kontext und hat ihre eigene Entstehungsgeschichte. Die Gedanken, die eine Autorin oder ein Autor mit einem gewissen Begriff seiner Theorie verbindet, werden immer von denen einer anderen Autorin oder eines anderen Autors abweichen. Genau deswegen ist eine Gegenüberstellung aber auch wichtig: Erst dadurch kann eine gemeinsame Basis zur Forschung geschaffen werden. Es kann gewährleistet werden, dass möglichst über dasselbe gesprochen wird und im besten Fall kann vielleicht sogar eine vereinheitlichte Theorie entstehen.

Die Gegenüberstellung in Tabelle 3.3 weicht von dem zugrundeliegenden Vergleich (Tall 2013) stark ab. Dort wurden die Zuordnungen

- *Action* (APOS) $\leftrightarrow$ *Process: Interiorized* (Theorie der Reifikation) und
- *Process* (APOS) $\leftrightarrow$ *Process: Condensed* (Theorie der Reifikation)

getroffen. Vergleicht man die Ideen von Sfard (1991) und Arnon u. a. (2014), so erkennt man, dass diese Zuordnungen nur schlecht zutreffen.

Sfard (1991, S. 18) schreibt:

> The term "interiorization" is used here in much the same sense which was given to it by Piaget [Piaget 1971, S. 14]: we would say that a process has been interiorized if it "can be carried out through [mental] representations", and in order to be considered, analyzed and compared it needs no longer to be actually performed.

Im aktuellen Buch zur APOS-Theorie wird die Stufe des *Process* wie folgt beschrieben (Arnon u. a. 2014, S. 20):

> [The Process stage] is characterized by an ability to imagine carrying out the steps without necessarily having to perform each one explicitly and by being able to skip steps, as well as reverse them. Interiorization is the mechanism that makes this mental shift possible.

Sowohl in der APOS-Theorie als auch in der Theorie der Reifikation wird der Begriff *interiorization* im Sinne von Piaget verwendet, in der APOS-Theorie führt *interiorization* zur Stufe des *Process*. Deshalb treffen die Zuordnungen

- *Action* (APOS) $\leftrightarrow$ *Process: Before interiorization* (Theorie der Reifikation) und
- *Process* (APOS) $\leftrightarrow$ *Process: Interiorized* (Theorie der Reifikation)

besser zu. Die Stufe *Process: Condensed* (Theorie der Reifikation) kann am ehesten der neuen, noch umstrittenen Stufe *Totality* der APOS-Theorie zugeordnet werden. Sowohl Sfard (1991, S. 19) als auch Arnon u. a. (2014, S. 137-150) erwähnen als wichtiges Kriterium für das Erreichen der jeweiligen Stufe, die Fähigkeit, den Prozess als Ganzes zu betrachten.

Die im zweiten Teil dieser Arbeit beschriebene Schulbuchanalyse berücksichtigt sowohl die APOS-Theorie als auch die Theorie der Reifikation. Eine möglichst zutreffende Gegenüberstellung ist deshalb von großer Bedeutung.

3.3.1. Theorie der Reifikation

Anna Sfard veröffentlicht 1991 ihren Artikel „On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin", welcher sich intensiv mit dem Übergang zwischen Prozessen und Objekten beschäftigt und ihre Theorie der Reifikation begründet. In den darauffolgenden Jahren wird der Artikel Grundlage für viele weiterführende Arbeiten von Sfard (1992, 1994, 1995) und anderen Autorinnen und Autoren. Auch in aktuellen Veröffentlichungen wird der Artikel vielfach zitiert (siehe dazu beispielsweise „Citations per Year" des Artikels beim Springer Verlag). Für den theoretischen Teil dieser Arbeit war der Artikel richtungsweisend und stellt die wichtigste Quelle dar.

Sfard (1991) hebt hervor, dass mathematische Konzepte auf zwei grundlegend unterschiedliche Arten aufgefasst werden können: strukturell - als Objekte, und operationell - als Prozesse (siehe dazu Kapitel 2.1). Obwohl diese beiden Sichtweisen unvereinbar scheinen, sind sie komplementär, es herrscht eine Dualität zwischen ihnen (siehe dazu Kapitel 2.2). Prozesse des Lernens und des Problemlösens beruhen auf einem verzwickten Wechselspiel zwischen den beiden Sichtweisen ein und desselben Konzepts. (ebd., S. 1)

Anhand historischer und psychologischer Analysen wird ein Übergang von Rechenoperationen zu abstrakten Objekten in drei Schritten festgestellt: „interiorization" (Verinnerlichung), „condensation" (Verdichtung) und „reification" (Verdinglichung oder Reifikation). (ebd., S. 1)

In der Phase der *Verinnerlichung* macht sich die Lernende oder der Lernende mit den Prozessen vertraut, die schlussendlich zu einem neuen Konzept führen (beispielsweise führt der Prozess des Zählens zu den natürlichen Zahlen, die Subtraktion führt zu den negativen Zahlen, algebraische Manipulationen führen zu Funktionen). Diese Prozesse sind Operationen, die auf Objekte einer niedrigeren Stufe angewandt werden. Allmählich sammelt die Lernende oder der Lernende Erfahrung im Ausführen dieser Prozesse. Im Sinne von Piaget (1971, S. 14) ist ein Prozess verinnerlicht, sobald er in der Vorstellung ausgeführt werden kann und nicht mehr wirklich durchgeführt werden muss. Dies geschieht im Allgemeinen, sobald die Lernende oder der Lernende eine hohe Fertigkeit im Umgang mit den jeweiligen Prozessen entwickelt. (Sfard 1991, S. 18-19)

Im Fall der negativen Zahlen kann Verinnerlichung erkannt werden, wenn die Lernende oder der Lernende geübt in der Ausführung von Subtraktionen wird. Im Fall der Funktion ist Verinnerlichung erkennbar, wenn die Idee der Variable erlernt wird und die Fähigkeit in eine Formel einzusetzen, um Werte für die Abhängige zu finden, entwickelt wird. (ebd., S. 18-19)

Die Phase der *Kondensation* ist eine Periode des „Zusammenquetschens" langer Sequenzen von Operationen in handlichere Einheiten. In diesem Abschnitt gelingt es einer Lernenden oder einem Lernenden mehr und mehr, den Prozess als Ganzes zu betrachten ohne den Drang zu verspüren, ins Detail zu gehen. Der Prozess wird nun als Input-Output-Prozedur betrachtet, die einzelnen Operationen geraten in den Hintergrund. Dies ist der Punkt, an dem ein neues Konzept „offiziell" geboren wird. Jede Schwierigkeit, den Output des zugrundeliegenden Prozesses auszudrücken (beispielsweise das Subtrahieren einer größeren Zahl von einer kleineren, wenn nur natürliche Zahlen bekannt sind) führt zur Idee einer neuen mathematischen Entität. Dank der Kondensation fällt das Kombinieren von Prozessen mit anderen Prozessen, das Vergleichen von Prozessen und das Generalisieren wesentlich leichter. Ein Fortschritt in der Kondensation macht sich auch bemerkbar, wenn der Wechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungsweisen eines Konzeptes leichter fällt. (ebd., S. 19)

Im Fall der negativen Zahlen kann Kondensation erkannt werden, sobald Lernende imstande sind, arithmetische Operationen wie die Addition oder die Multiplikation darauf anzuwenden. Beim Konzept der Funktion ist die Kondensation umso weiter fortgeschritten, umso mehr Lernende die Zuordnung als Ganzes verwenden können, ohne auf einzelne Werte zu achten. (ebd., S. 19)

Die Phase der Kondensation hält an, solange die neuen Entitäten noch eng mit bestimmten Prozessen verbunden werden. Erst wenn eine Person imstande ist, ein bestimmtes Konzept als voll entwickeltes Objekt aufzufassen, wurde das Konzept verdinglicht. (ebd., S. 19)

Verdinglichung (oder auch Reifikation) ist demnach ein ontologischer[1] Wechsel - die plötzliche Fähigkeit, etwas Bekanntes in völlig neuem Licht zu betrachten. Während die Verinnerlichung und die Kondensation graduelle quantitative Veränderungen sind, ist die Verdinglichung ein instantaner „Quantensprung“: Ein Prozess festigt sich in ein Objekt, in eine statische Struktur. Dieses neue Objekt wird schnell von den ursprünglichen Prozessen getrennt und erhält seine Bedeutung aus der Tatsache, dass es ein Angehöriger einer bestimmten Kategorie ist. Eine Lernende oder ein Lernender kann nun allgemeine Eigenschaften einer solchen Kategorie und Beziehungen zwischen ihren Vertretern untersuchen. Das neue Objekt kann als Input für weitere Prozesse dienen. Nun ist der Punkt erreicht, an dem die Verinnerlichung von Konzepten einer höheren Stufe beginnen kann. (ebd., S. 19-20)

Im Fall der negativen Zahlen ist es der Lernenden oder dem Lernenden nun möglich, diese als Teilmenge des Ringes der ganzen Zahlen zu betrachten (ohne notwendigerweise die formale Definition eines Ringes zu kennen). Der Begriff der Funktion kann als verdinglicht betrachtet werden, wenn die Lernende oder der Lernende die Fertigkeit entwickelt, Gleichungen zu lösen, in denen die Unbekannten Funktionen sind (Differential- und Funktionsgleichungen, Gleichungen mit Parametern) und wenn sie oder er erkennt, dass Berechenbarkeit kein notwendiges Kriterium für die Mengen geordneter Paare ist, welche als Funktionen aufgefasst werden sollen. (ebd., S. 20)

Gerade in der englischsprachigen Literatur scheint der Diskurs über den Übergang zwischen strukturellen und operationellen Konzeptionen und den damit verbundenen Problemen wieder aktueller zu werden. Beispielsweise wird in der populären APOS-Theorie genau dieser Übergang gerade aktiv diskutiert (siehe dazu Kapitel 3.3.2). Auch Tall (2013) veröffentlichte gerade ein Buch, das seine Theorie „Three worlds of mathematics“ enthält, welche sich unter anderem mit diesem Übergang auseinandersetzt. Sfard selbst hat sich in ihren Studien mittlerweile allerdings recht weit von ihrer ursprünglichen

[1] Ontologie: Lehre vom Seienden als solchem (Prechtl und Burkard 1999)

Theorie entfernt. Wohl hauptsächlich durch den Einfluss der Vygotsky-Tradition[2] hat sie ihre Ansätze so stark weiterentwickelt, dass man ihren Ursprung heute kaum noch erkennen kann (Schneeberger 2009, S. 146). In ihren neueren Veröffentlichungen liegt der Fokus nicht mehr auf Prozessen und Objekten, stattdessen betrachtet Sfard (2012) Mathematik nun als Diskurs und untersucht, wie sich dieser Diskurs entwickelt. Es wird zwischen zwei Arten, wie sich Diskurse entwickeln können, unterschieden: die „object-level“-Entwicklung (der Diskurs über bekannte Objekte, dadurch wird hauptsächlich Wissen angesammelt) und „meta-level“-Entwicklung (der Diskurs über den Diskurs, dadurch gewinnt der Diskurs an Komplexität, seine Regeln können sich ändern). Denken wird als Kommunikation mit sich selbst definiert, ein mathematisches Objekt wird nun als „discursive construct“ betrachtet. Die Einführung solcher mathematischer Objekte (als „discursive construct“) ist oft das Wesentlichste für die „meta-level“-Entwicklung eines Diskurses, erst durch sie entsteht die wichtige Kompression eines Diskurses. (ebd., S. 1-4)

Es scheint, dass auch den aktuellen Veröffentlichungen Sfards ihre „alten“ Ideen zugrunde liegen, allerdings nun von dem völlig anderen Standpunkt der Mathematik als Diskurs. Diese Weiterentwicklung des Standpunkts ist auch nachvollziehbar: Festzustellen, ob eine Lernende oder ein Lernender ein bestimmtes Konzept operationell oder strukturell auffasst, ist sehr heikel und kann wohl nur schwer an einzelnen mathematischen Leistungen und an der Fähigkeit, bestimmte mit diesem Konzept verbundene Aufgaben zu lösen, festgemacht werden. Viel sinnvoller, um die verbundenen Vorstellungen zu erfassen, scheinen sprachliche Untersuchungen: Wie spricht die Lernende oder der Lernende über das Konzept, welche Vokabeln verwendet er, usw. Nun kommt aber der (meiner Meinung nach) springende Punkt: Statt nun aufgrund des beobachteten Diskursverhaltens auf vermeintlich für das Diskursverhalten verantwortliche, aber *nicht direkt beobachtbare* Ansichten (strukturell, operationell) zu schließen, wird Mathematik einfach als Diskurs definiert. Mathematik ist nicht mehr und nicht weniger als eine Ansammlung bestimmter Schlüsselwörter (drei, Dreieck, Menge, Funktion, ...), die auf bestimmte Art verwendet werden, einzigartiger visueller Vermittler (Ziffern, algebraische Symbole, Graphen, ...), charakteristischer Routinen, die festlegen, wie mathematische Tätigkeiten durchgeführt werden, und von der mathematischen Gemeinde bestätigter Erzählungen (Sätze, Definitionen, Rechenregeln, ...) (ebd., S. 2). Das mathematische Objekt ist ein „discursive construct“, ein Netz aus allen im Diskurs auftretenden Realisationen, jede davon kann als Vorbote dienen, um das Objekt des Diskurses entstehen zu lassen (vgl. Sfard 2008, S. 164-165; vgl. Sfard 2012, S. 4). Gemachte Beobachtungen in der Kommunikation von Lernenden entsprechen direkt einem bestimmten Teil des Modells, es müssen daraus keine Schlüsse mehr auf hypothetische dahinterliegende Konzepte gemacht werden.

Der Standpunkt der Mathematik als Diskurs hat einen gewissen Reiz, entfernt sich aber doch sehr weit vom Kernpunkt dieser theoretischen Recherche. Für diese Arbeit wurden deshalb meist ältere Veröffentlichungen von Sfard herangezogen.

[2] Vygotsky war der Meinung, dass sprachliche Untersuchungen (v. a. Wortbedeutung) für unser Verständnis der Entwicklungspsychologie von höchster Bedeutung sind. Dies führte dazu, dass er sich bei seinen Studien zur kognitiven und emotionalen Entwicklung des Kindes auf die Entwicklung der Sprache fokussierte. (Veer 1996, S. 260; Leitch 2011, S. 305)

3.3.2. APOS-Theorie

Das Akronym APOS steht für „Action“, „Process“, „Object“ und „Schema“. Die APOS-Theorie ist eine Theorie, die sich damit beschäftigt, wie mathematische Konzepte erlernt werden können. Ihre Wurzeln liegen in Piagets Theorie der reflexiven Abstraktion, die fundamentalen Ideen wurden zwischen 1983 und 1995 entwickelt. Sie wird von Forscherinnen und Forschern aus aller Welt vielfach als Rahmenprogramm für Studien, welche die Entwicklung mathematischer Konzeptionen untersuchen, verwendet. (vgl. Arnon u. a. 2014, S. 1-15)

Die APOS-Theorie wurde für die Forschung an der Hochschule entwickelt und wird auch hauptsächlich dafür genutzt. In letzter Zeit wurden aber auch einige Untersuchungen an Grund- und Mittelschulen mit der APOS-Theorie durchgeführt und die Theorie dahingehend angepasst. (vgl. ebd., S. 151-174)

Im Rahmen der APOS-Theorie werden auch detaillierte Überlegungen angestellt, mit deren Hilfe der Unterricht gestaltet werden kann. Der „ACE teaching cycle“ ist eine pädagogische Strategie aus den drei Komponenten „(A) Activities“, „(C) Classroom Discussion“ und „(E) Exercises“. Innerhalb eines solchen Zyklus wird sehr häufig auf den Einsatz der mathematischen Programmiersprache ISETL gesetzt. Der Einsatz der APOS-Theorie ist sehr häufig an den Einsatz mathematischer Programmiersprachen gekoppelt (Asiala u. a. 1996, S. 11). Auch die Entwicklung der APOS-Theorie ging mit der Verwendung mathematischer Programmiersprachen einher (vgl. z.B. Dubinsky 1984). Dies drängt die kritische Frage auf, ob denn laut APOS-Theorie für die „Encapsulation“ (Übergang von der operationellen zur strukturellen Sichtweise) mathematische Programmiersprachen notwendig sind. Kann der Sichtweisenwechsel nur in diesem Kontext unterstützt und beschleunigt werden (Burnett-Bradshaw 2007, S. 54)? (vgl. Arnon u. a. 2014, S. 57-67)

Hier werden nur die mentalen Strukturen und Mechanismen der APOS-Theorie erläutert. Auf den ACE Zyklus und die mathematische Programmiersprache ISETL wird nicht weiter eingegangen.

In der APOS-Theorie gibt es unterschiedliche Arten der reflexiven Abstraktion (mentale Mechanismen): „interiorization“ (Verinnerlichung), „coordination“ (Koordination), „reversal“ (Umkehrung), „encapsulation“ (Einkapselung), „de-encapsulation“ (Entkapselung) und „thematization“ (Thematisierung). Diese führen zur Konstruktion einer der vier mentalen Strukturen: Aktion, Prozess, Objekt oder Schema. Abbildung 3.8 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den mentalen Strukturen und Mechanismen. (ebd., S. 18)

Mathematische Konzepte werden erst als *Aktionen* gedacht. Eine Aktion ist eine extern geleitete Umgestaltung eines zuvor gezeugten Objektes. Jeder einzelne Schritt der Aktion muss extern angeleitet und explizit ausgeführt werden. Es können keine Schritte ausgelassen oder nur in der Vorstellung durchgeführt werden. Zum Beispiel hat jemand, der einen expliziten Funktionsterm braucht, um über den Funktionsbegriff nachdenken zu können, und nicht viel mehr kann, als in den Term einsetzen und diesen umformen, ein Aktionsverständnis desselben. Der Term ist ein externer Hinweis für ihn, wie die Aktion ausgeführt werden muss. Obwohl die Aktion die einfachste aller Strukturen ist, ist sie fundamental für die APOS-Theorie. Die Aktionskonzeption ist erforderlich zur

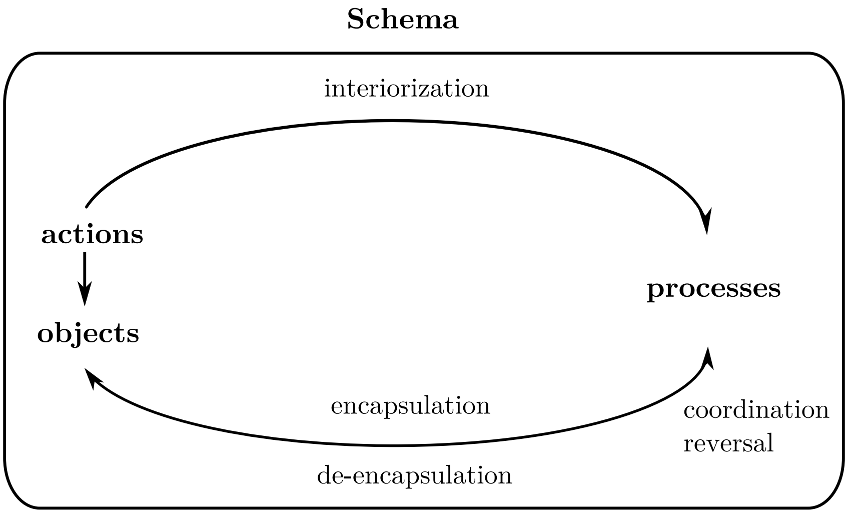


Abbildung 3.8.: Mentale Strukturen und Mechanismen für die Entwicklung mathematischen Wissens (Arnon u. a. 2014, S. 18)

Entwicklung weiterer mentaler Strukturen. Prozesse entstehen durch Verinnerlichung von Aktionen. Weiters tragen Aktionen, die auf Konzepte angewandt werden, dazu bei, diese als Objekte zu betrachten. (Arnon u. a. 2014, S. 19-20)

Prozesse werden durch einen der beiden Mechanismen *Verinnerlichung* oder *Koordination* erzeugt. Werden Aktionen wiederholt ausgeführt und wird über diese reflektiert, so gewinnt man die Kontrolle über sie. Dies wird charakterisiert durch die Fähigkeit, die einzelnen Schritte nur in der Vorstellung auszuführen, und durch die Fähigkeit, einzelne Schritte auszulassen oder umzukehren. *Verinnerlichung* ist der Mechanismus, der diese mentale Veränderung ermöglicht. Die durchgeführte Operation bleibt dieselbe, allerdings nun vollständig im Geist des Durchführenden. Beispielsweise ermöglicht ein Prozessverständnis der Funktion, diese als Input-Output-Maschine zu betrachten. Die Funktion verwandelt - nicht notwendigerweise spezifizierte - Inputs in Outputs. (ebd., S. 20-21)

Der Hauptunterschied zwischen Aktion und Prozess ist also, dass die Aktion tatsächlich und extern geleitet durchgeführt werden muss. Der Prozess hingegen wird selbstständig oder in Gedanken ausgeführt, es muss nicht jeder Schritt durchgeführt werden. (ebd., S. 20-21)

Wird eine Aktion auf einen bereits bekannten Prozess durchgeführt, so erfolgt ein Sichtweisenwechsel. Die zuvor dynamisch betrachtete Struktur (Prozess) wird zu einer statischen Struktur. Der Prozess wird als Ganzes gesehen und nun selbst als kognitives *Objekt* betrachtet. Der Mechanismus, der dies ermöglicht, nennt sich *Einkapselung*. Eine Objektsichtweise des Funktionsbegriffs ermöglicht beispielsweise das Bilden von Mengen von Funktionen und die Definition von arithmetischen Operationen auf diese Mengen. Viele Studien, die auf der APOS-Theorie beruhen, berichten, dass der Mechanismus der Einkapselung der schwierigste ist. Die Objektsichtweise wird oft nicht erreicht. (ebd., S. 22)

Wird der Prozess, der einem mentalen Objekt zugrunde liegt, wieder benötigt, so kann dieses *entkapselt* werden. Der dynamische Prozess kann dann wieder durchgeführt werden. (ebd., S. 22)

Der Mechanismus der *Koordination* ist für die Konstruktion mancher Objekte unverzichtbar. Zwei Objekte können entkapselt werden, ihre Prozesse koordiniert werden und der so geformte Prozess wieder in ein neues Objekt eingekapselt werden. Dies passiert bei der Komposition zweier Funktionen. Um zwei Funktionen F und G zu verknüpfen und $F \circ G$ zu erhalten, müssen die beiden Objekte erst entkapselt werden. Die Prozesse werden dann koordiniert, indem der Prozess von F auf die Elemente angewandt wird, die durch den Prozess G erhalten werden. Der resultierende Prozess wird dann in ein neues Objekt $F \circ G$ eingekapselt. Die genaue mentale Durchführung des Mechanismus der Koordination wird von APOS-Forscherinnen und APOS-Forschern momentan untersucht. (ebd., S. 23-24)

Ein Prozess kann auch *umgekehrt* werden. Beispielsweise kann der Funktionsprozess umgekehrt werden und so die inverse Funktion erhalten werden. Dies wird ermöglicht, indem die Gesamtheit des Funktionsprozesses erkannt wird. (ebd., S. 23)

Die Interaktion zwischen den mentalen Strukturen in Abbildung 3.8 ruft *Schemata* hervor. Ein Schema charakterisiert sich durch seine Dynamik und durch seinen stetigen Umbau, je nachdem wie es die gegenwärtige mathematische Aktivität und die spezifische mathematische Situation gerade erfordert. Wurde ein Schema erst einmal als einheitliche, schlüssige Konstruktion aus Aktionen, Prozessen, Objekten und anderen Schemata erzeugt und wurden Verbindungen zwischen diesen Strukturen erzeugt, so kann dieses in eine statische Struktur (Objekt) transformiert werden. Alternativ kann es auch als dynamische Struktur verwendet werden, welche zugehörige Objekte und Schemata aufnimmt. Beispielsweise enthält das Schema eines Vektorraums n-Tupel und Matrizen als Objekte und Polynome und Funktionen als Prozesse. Alle diese Strukturen stehen miteinander in Verbindung, der Zusammenhalt wird durch die Definition eines Vektorraums gegeben. Die Konstruktion eines Schemas als mentales Objekt wird durch den Mechanismus der *Thematisierung* erreicht. (ebd., S. 24-25)

Gegenwärtig gibt es noch nicht viele Studien darüber, wie sich Schemata entwickeln und wie diese angewandt werden, dafür ist noch zusätzlich Forschung erforderlich. (ebd., S. 25)

Die APOS-Theorie ist ein vielfach verwendetes Rahmenprogramm für die Forschung an der Entwicklung mathematischer Konzeptionen und wird ständig weiterentwickelt. Aktuell wird besonders der Übergang zwischen dem Prozess und dem Objekt diskutiert, welcher auch der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist. Aufgrund der großen Schwierigkeiten, die beim Übergang zur Objektkonzeption auftreten, steht zur Debatte, die neue mentale Struktur „totality“ (Gesamtheit) einzuführen. Vor allem beim Konzept des Grenzwerts und insbesondere beim wohlbekannten didaktischen Problem $0,\dot{9} = 1$ scheint diese Einführung sinnvoll. Zwei Studien von Weller u. a. (2009) und Weller u. a. (2011) hatten Konzeptschwierigkeiten angehender Lehrpersonen bei dieser Dezimalentwicklung aufgezeigt. Es folgte schließlich eine Studie von Dubinsky u. a. (2013), welche die neue Stufe „totality“ vorschlägt. Es wurde beobachtet, dass die Studenten zwar im Stande waren, die gesamte Entwicklung der $9er$ auf einmal zu erfassen, es bestanden aber trotzdem Schwierigkeiten $0,\dot{9}$ als Zahl zu erfassen und Abbildungen darauf anzuwenden.

Der in dieser Arbeit fokussierte Übergang zwischen operationeller und struktureller Konzeption gewinnt also auch in der APOS-Theorie gerade wieder an Bedeutung. Es bleibt abzuwarten, ob sich die „totality“ auch für andere mathematische Konzepte bewährt und sich als neue Stufe in der Theorie verankern kann.

Teil II.

Analyse von Aufgaben der Sekundarstufe zum Thema Funktionen

4. Einleitung und Motivation

Die theoretische Recherche dieser Diplomarbeit hat die Entwicklung mathematischer Konzepte von einem erkenntnistheoretischen Standpunkt untersucht. Als Ergebnis kann festgehalten werden, dass quer durch die Fachliteratur zwei unterschiedliche Sichtweisen mathematischer Konzepte beschrieben werden. Die eine Sichtweise wird in dieser Arbeit operationell genannt, die andere strukturell. Lehr-Lern-Forscherinnen und Lehr-Lern-Forscher beschreiben den Übergang zwischen der prozesshaften Konzeption und der objekthaften Konzeption als sehr problematisch. Schülerinnen und Schülern gelingt es oft nicht, mathematische Konzepte als eigenständige Denkobjekte zu betrachten, stattdessen werden diese lediglich mit Tätigkeiten verbunden. Durch mangelnde Kompression mathematischer Ideen wird die Mathematik für diese Schülerinnen und Schüler immer aufwändiger und Konzepte einer höheren Ebene können nicht mehr verstanden werden.

Basierend auf diesen Befunden ist die Motivation des praktischen Teils nun, auch in Betracht der fortschreitenden „neuen Aufgabenkultur“ im österreichischen Mathematikunterricht, die mit den Bildungsstandards und der Zentralmatura einhergeht, festzustellen, ob Schülerinnen und Schüler beim problematischen Übergang zu strukturellen Konzeptionen ausreichend unterstützt werden.

Um dies zu untersuchen, wird eine Analyse von aktuellen österreichischen Schulbuchaufgaben durchgeführt. Es wird untersucht, ob einzelne Beispiele eher operationelle oder eher strukturelle Ansätze fördern. Es werden Aufgaben der Schulbücher „Das ist Mathematik 1-4“ sowie Aufgaben der Schulbücher „Mathematik verstehen 5-6“ untersucht. Diese Schulbuchreihen wurden aufgrund hoher Auflagezahlen ausgewählt, somit kann davon ausgegangen werden kann, dass Aufgaben dieser Bücher im österreichischen Schulunterricht Verwendung finden. Zusätzlich werden Übungsaufgaben zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung der AHS, welche vom Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) in einem Aufgabenpool zur Verfügung gestellt werden, untersucht.

Natürlich musste die Analyse auf einen inhaltlichen Abschnitt eingegrenzt werden. Der Funktionsbegriff ist eines der zentralsten Konzepte der Mathematik und findet in beinahe allen Teilgebieten Verwendung. Auch in beiden, im theoretischen Teil vorgestellten Modellen (siehe Kapitel 3.3), wurde dieser häufig als Beispiel zur näheren Erläuterung theoretischer Ideen herangezogen. Deshalb beschränkt sich der praktische Teil auf Aufgaben zum Funktionsbegriff. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der 4., 5. und 6. Sekundarstufe (also auf den Schulbüchern „Das ist Mathematik 4“, „Mathematik verstehen 5“ und „Mathematik verstehen 6“). Von den Übungsaufgaben zur zentralen schriftlichen Reifeprüfung werden Aufgaben des Inhaltsbereichs *Funktionale Abhängigkeiten* untersucht.

Der theoretische Teil dieser Arbeit gipfelte in zwei Modellen zur Entwicklung mathematischer Konzepte: der Theorie der Reifikation und der APOS-Theorie. Basierend auf diesen Theorien wird für die Analyse ein dreistufiges Modell mit den Stufen *Direkt gelenkte Aktionen*, *Selbstgeleitete Prozesse* und *Eigenständige Denkobjekte* erstellt, in das die Aufgaben eingeordnet werden können.

Für die erste Phase der Analyse (Kapitel 6.1) wurden Aufgaben aller Unterkapitel der Schulbücher „Das ist Mathematik 1-4“ und „Mathematik verstehen 5-6“, in denen Funktionen das zentrale Thema sind, in das Modell eingeordnet. Ziel ist es zu eruieren, in welchen Schulstufen und in welchen Unterkapiteln der Schulbücher besonders stark operationelle bzw. strukturelle Konzeptionen des Funktionsbegriffs gefördert werden und darauf folgend festzustellen, wie sich die Konzeptionen zum Funktionsbegriff im Lauf der Sekundarstufe entwickeln.

Der Wechsel von der operationellen zur strukturellen Sichtweise wird in der Fachliteratur vielfach als problematisch beschrieben. Deshalb wurden für die zweite Phase der Analyse (Kapitel 6.2) einige Schulbücher nochmals gezielt nach Aufgaben zur Stufe *Eigenständige Denkobjekte* durchsucht. Es werden Charakteristiken erarbeitet, die Aufgaben, welche strukturelle Sichtweisen unterstützen, auszeichnen.

Für den dritten Teil der Analyse wurden Aufgaben der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in das Modell eingeordnet und mit den Aufgaben der Schulbücher verglichen. Es wurden sowohl Aufgaben zu den Grundkompetenzen (Typ-1-Aufgaben) als auch Aufgaben zur Vernetzung von Grundkompetenzen (Typ-2-Aufgaben) berücksichtigt. Es wird untersucht, welche Unterschiede zwischen den Aufgaben zur Reifeprüfung und den Schulbuchaufgaben bestehen und ob Unterschiede in der Verteilung der Aufgaben auf die einzelnen Stufen des Modells bestehen.

Schlussendlich werden die wichtigsten Ergebnisse und Folgerungen der Analyse in einem Résumé in knapper und übersichtlicher Form zusammengefasst.

5. Modell zur Einteilung von Funktionsaufgaben

Am Ende des theoretischen Teils wurden die Theorie der Reifikation und die APOS-Theorie vorgestellt (siehe Kapitel 3.3). Anhand dieser Theorien wurde ein dreistufiges Modell zur Einteilung von Aufgaben zum Funktionsbegriff erstellt. Die Stufen heißen in Anlehnung an die APOS-Theorie *Direkt gelenkte Aktionen*, *Selbstgeleitete Prozesse* und *Eigenständige Denkobjekte*. Jede dieser Stufen stellt ein Niveau dar, auf dem der Funktionsbegriff verstanden werden kann. Das Modell ist hierarchisch, das heißt, um die Stufe *Eigenständige Denkobjekte* zu erreichen, müssen erst die Stufen *Direkt gelenkte Aktionen* und *Selbstgeleitete Prozesse* durchlaufen werden. Das Modell bezieht sich - im Unterschied zu den zugrundeliegenden Theorien - direkt auf den Funktionsbegriff und wurde speziell für die Einteilung von Mathematikaufgaben der Sekundarstufe erstellt. Jede Stufe enthält Kriterien, die festlegen, ob eine Aufgabe in diese Stufe eingeordnet wird. Die Kriterien orientieren sich an den Beschreibungen der Stufen und Übergänge der Theorie der Reifikation und der APOS-Theorie. Die Kriterien wurden zusätzlich während der Einteilung der ersten Schulbuchaufgaben verfeinert. Abbildung 5.1 skizziert den Zusammenhang des Modells mit den zugrundeliegenden Theorien.

Gerade in den ersten Klassen der Sekundarstufe ist es schwierig abzugrenzen, durch welche Aufgaben und deren algebraische Ausdrücke funktionale Aspekte in den Vordergrund gerückt werden und durch welche hauptsächlich algebraische Umformungen betont werden. Eine Schulbuchaufgabe wurde dann als relevant betrachtet, wenn die Aufgabenstellung es verlangt, dass der algebraische Ausdruck als Zuordnung verstanden wird, also die Unbekannte nicht als fester, aber eben unbekannter Wert, sondern als Variable, in die eingesetzt werden kann, verwendet wird.

In der Schule werden Funktionen auf zwei unterschiedliche Arten dargestellt: durch algebraische Ausdrücke, mit Buchstaben, Zahlen und Operatoren, und durch Funktionsgraphen in kartesischen Koordinaten. Vorstufen von Funktionsgleichungen treten bereits in der ersten Klasse AHS unter dem Begriff *Formeln* auf (siehe *Lehrplan AHS Unterstufe Mathematik* 2000, S. 5). Die Darstellung von Funktionen durch ihre Graphen ist insbesondere im Schulunterricht sehr eng mit der Anfertigung von Funktionstabellen verknüpft. Wenn in dieser Arbeit von der Darstellung einer Funktion durch ihren Graphen gesprochen wird, kann dies auch die Funktionstabelle implizieren. Auch Darstellungen von Wertepaaren in kartesischen Koordinaten werden zum Erfassen von Datenmengen bereits in der ersten Klasse AHS eingeführt (siehe ebd., S. 5). Erst in der vierten Klasse, also drei Schuljahre nach der separaten Einführung algebraischer Darstellungen von Funktionen (bis dahin genannt *Formeln*) und graphischer Darstellungen in kartesischen Koordinaten, wird der Funktionsbegriff eingeführt, welcher die beiden Konzepte verknüpft (siehe ebd.,

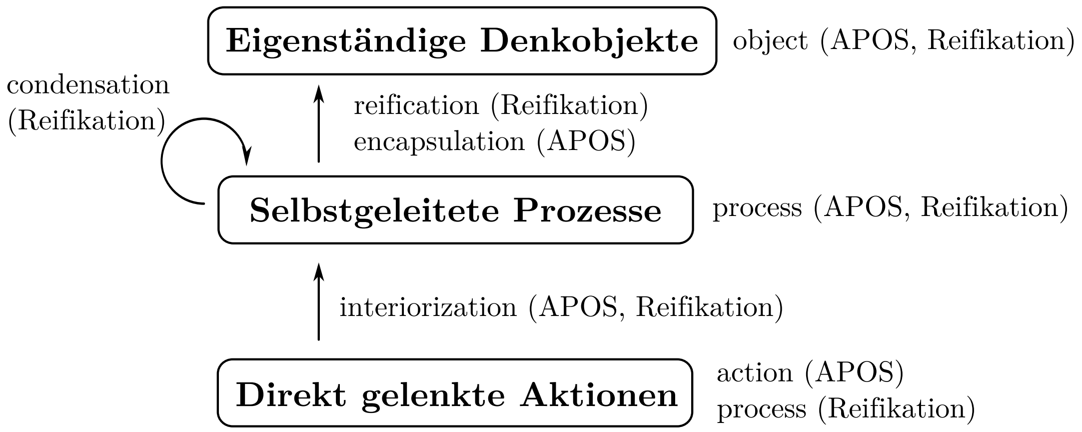


Abbildung 5.1.: Zusammenhang des Modells zur Einteilung von Aufgaben zum Funktionsbegriff mit der APOS-Theorie und der Theorie der Reifikation

S. 7). In diesem Sinne wird in dieser Arbeit oft von zwei unterschiedlichen Teilkonzepten gesprochen, welche sich unabhängig voneinander entwickeln und erst durch den Funktionsbegriff zusammengeführt werden und nicht von zwei unterschiedlichen Darstellungsformen der Funktion. Alle algebraischen Aspekte der Funktion werden im Folgenden als das Teilkonzept der *Funktionsgleichung* bezeichnet, graphische Darstellungen in kartesischen Koordinaten der Funktion werden als das Teilkonzept des *Funktionsgraphen* bezeichnet.

In der Analyse der Aufgaben wird davon ausgegangen, dass diese zwei Teilkonzepte auf unterschiedlichen Niveaus verstanden werden können. Beispielsweise ist es möglich, dass eine Aufgabe die Stufe *Eigenständige Denkobjekte* am *Funktionsgraphen* fördert, die *Funktionsgleichung* jedoch auf der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* behandelt wird. Deshalb wird bei der Analyse der Aufgaben zum Funktionsbegriff unterschieden, auf welches Teilkonzept sich die Einteilung bezieht.

Eine Schwierigkeit bei der Einteilung der Aufgaben in die Verständnisstufen stellt die Tatsache dar, dass ein und dieselbe Aufgabe abhängig von den mathematischen Kenntnissen der bearbeitenden Personen, unterschiedliche Konzeptionen hervorrufen kann. Während ein erfahrener Mathematiker sehr wahrscheinlich auch Aufgaben, welche Funktionen als Aktionen und Prozesse betonen, in seiner flexiblen Prozess-Objekt-Sichtweise betrachten wird, werden Lernende, welche sich bereits auf rein operationelle Sichtweisen fixiert haben, auch für Aufgaben, die eigentlich stark strukturelle Sichtweisen betonen, vielleicht Wege finden, diese mit gewissen Prozessschemata zu lösen. Die Einteilung einer Aufgabe in eine bestimmte Stufe des Modells besagt also nur, welche Art des Verständnisses durch sie am ehesten gefördert wird.

5.1. Direkt gelenkte Aktionen

Beschreibung der Stufe

Aufgaben dieser Stufe dienen zum Kennenlernen des Funktionskonzepts. Die einfachen Tätigkeiten der Lernenden oder des Lernenden werden durch direkte Handlungsanweisungen gelenkt. Der Funktionsbegriff wird lediglich durch Handlungen verwendet und definiert. Die Sichtweise des Funktionsbegriffs als eigenständiges Ding, als zentraler Gegenstand der Aufgabe, fehlt völlig.

Kriterien für die Zuordnung in die Stufe

- A1: Die Aufgabenstellung enthält kleinschrittige Anweisungen, die den Lernenden durch die Aufgabe führen.
- A2: Hinweise sind direkt formuliert und lassen unmittelbar auf eine bestimmte Handlung schließen.
- A3: Die Aufgabenstellung führt in ein neues Konzept ein.

Im Fall einer Zuordnung muss außerdem zutreffen:

- Das Funktionskonzept wird als Handlung verwendet und ist kein *Gegenstand* der Aufgabe. Es werden keine Handlungen auf die Funktion als Ganzes verlangt.

Festlegung von einzelnen Aktionen

Um zu entscheiden, ob eine Aufgabe in die Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* eingeordnet wird oder in die Stufe *Selbstgeleitete Prozesse*, ist es wichtig festzulegen, welche Handlungen als einzelne Aktionen gewertet werden. Der Übergang zwischen Aktionen und Prozessen wird als kontinuierlich beschrieben (vgl. Sfard 1991), allerdings muss bei der Einteilung eine Grenze gezogen werden. Natürlich ist die Festlegung subjektiv, je nachdem wie sie gemacht wird, fallen mehr oder weniger Aufgaben in die Stufe *Direkt gelenkte Aktionen*. Beispielsweise könnten in höheren Schulstufen Handlungen als einzelne Aktionen gelten, die zuvor noch als Prozessketten wahrgenommen wurden, also für unterschiedliche Schulstufen unterschiedliche Festlegungen getroffen werden. Es wurde für alle Schulstufen eine einheitliche Einteilung gewählt und versucht, die Einteilung möglichst sinnvoll und im Sinne der Stufenbeschreibung - welche auf der Fachliteratur aufbaut - zu treffen. Durch die folgende Festlegung, welche Handlungen als Aktion gewertet werden, kann eine einheitliche Einteilung der Aufgaben gewährleistet werden.

Funktionsgraph:

- Ablesen eines einzelnen Punktes vom Funktionsgraphen
- Ablesen von Differenzen einzelner Punkte vom Funktionsgraphen

- Zeichnen des Funktionsgraphen bei vorher gegebener Funktionsgleichung oder Funktionstabelle
- Erstellen der Funktionstabelle anhand des Funktionsgraphen
- Erstellen der Funktionstabelle anhand der Funktionsgleichung

Funktionsgleichung:

- Einfache Umformungen
- Rechenoperationen ($+, -, \cdot, :, \sqrt{}, \ldots$)
- Einsetzen numerischer Werte in Formeln
- Freistellen einer Unbekannten
- Aufstellen von Formeln für einfache geometrische Körper (z. B. Quader) bei vorhandener Skizze
- Durchführung von Rechenschritten, die direkt zuvor (im Schulbuch) erklärt wurden
- Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Sachsituationen, die *sehr direkt* auf die Gleichung hindeuten (selten der Fall)

Beispiel zur Illustration der Stufe

Der Zusammenhang zwischen Bruttomasse (B), Nettomasse (N) und Tara (T) lautet:
B = N + T.

a) Setze in dieser Formel für zwei Variable selbstgewählte Größen ein und berechne den Wert für die dritte Variable!

b) Drücke jede Variable durch die beiden anderen aus!

Hinweis: Wenn du Zahlen selbst wählen sollst, überlege, welcher Zahlenbereich dafür in Frage kommt!

Abbildung 5.2.: Direkt gelenkte Aktionen, Teilkonzept Funktionsgleichung (Reichel, Humenberger, Litschauer, Groß und Aue 2008, S. 76)

Die obige Aufgabenstellung stammt aus dem Schulbuch „Das ist Mathematik 2“. Sowohl Teilaufgabe a) als auch Teilaufgabe b) lassen unmittelbar auf eine bestimmte Handlung schließen (A2). Das Umformen einer Gleichung wurde als einzelne Aktion festgelegt.

5.2. Selbstgeleitete Prozesse

Beschreibung der Stufe

Verwenden Lernende das Funktionskonzept vielfach durch *Direkt gelenkte Aktionen*, so gewinnen sie mehr und mehr die Kontrolle über diese. Eine Abfolge von Aktionen kann von Lernenden gedacht durchlaufen werden, ohne diese tatsächlich durchzuführen. Direkte Anweisungen für die einzelnen Handlungsschritte sind nicht mehr notwendig. Einzelne Schritte können ausgelassen oder umgekehrt werden. Die Funktion wird nur durch diese Handlungsketten verwendet, eine Sichtweise der Funktion als zentrales Objekt der Aufgabe ist nicht vorhanden.

Kriterien für die Zuordnung in die Stufe

- P1: Um die Aufgabe zu lösen, ist eine Folge von Handlungen notwendig; auf die einzelnen Schritte wird in der Aufgabenstellung nicht explizit hingewiesen.
- P2: Die konkrete Handlungsanweisung ist durch den Kontext der Aufgabe versteckt und muss von Lernenden selbst gefunden werden.
- P3: Der Lösungsalgorithmus muss durch richtige Interpretation des Kontextes selbst gewählt werden, unterschiedliche Lösungswege sind möglich.

Im Fall einer Zuordnung muss außerdem zutreffen:

- Das Funktionskonzept wird als Handlung verwendet und ist kein *Gegenstand* der Aufgabe. Es werden keine Handlungen auf die Funktion als Ganzes verlangt.

Beispiel zur Illustration der Stufe

Ein Leihfahrrad kostet die erste Stunde **1,50 €**, jede weitere angefangene Stunde **1 €**.

1) Welches Schaubild entspricht dem Text? Begründe deine Antwort!

2) Formuliere jeweils einen Angabetext, der zu den anderen Diagrammen passt!

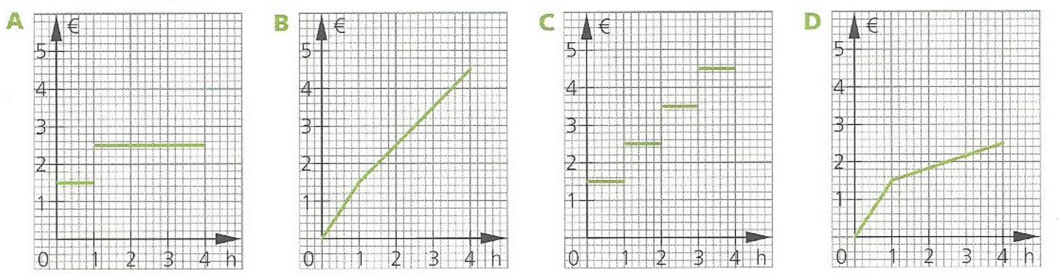


Abbildung 5.3.: Selbstgeleitete Prozesse, Teilkonzept Funktionsgraph (Reichel u. a. 2012b, S. 80)

In der Aufgabenstellung werden nur kontextbezogene Angaben gemacht, es werden keine expliziten Funktionswerte angegeben (P2). Auch kleinschrittige Handlungsanweisungen, wie z. B. „Erstelle eine Wertetabelle nach Stunden und trage diese Werte in ein Koordinatensystem ein“, fehlen völlig. Lernende müssen Lösungsprozesse bereits automatisiert haben (P1). Die zweite Aufgabenstellung fordert eine Umkehrung der Prozesse.

5.3. Eigenständige Denkobjekte

Beschreibung der Stufe

Werden auf die Funktion als Ganzes Aktionen angewandt oder werden der Funktion Eigenschaften zugeordnet, so erfolgt ein Wechsel der Sichtweise. Die Funktion, zuvor als tätigkeitsorientierter Prozess betrachtet, wird nun als einzelnes statisches Objekt angesehen und verwendet.

Kriterien für die Zuordnung in die Stufe

Die Funktion wird als Objekt behandelt, dies macht sich erkenntlich durch:

- O1: Auf die Funktion werden Aktionen angewandt.
- O2: Der Funktion werden Eigenschaften zugeordnet.
- O3: Unterschiedliche Funktionen werden miteinander verglichen und kategorisiert.
- O4: Auf Details der Funktion wird nicht eingegangen, sie wird als statisches *Ganzes*, losgelöst von Handlungen, betrachtet (sprachlich meist erkennbar durch Verwendung eines einzelnen Hauptwortes).

Beispiel zur Illustration der Stufe

1) Vergleiche die Graphen der Funktionen f: $y = x$, g: $y = 2x$, h: $y = 2{,}5x$ miteinander!
2) Wie werden die Graphen der Funktionen $y = 10x$ bzw. $y = \frac{1}{2}x$ verlaufen? Skizziere mit freier Hand ihren ungefähren Verlauf, ohne Funktionswerte zu berechnen!

Abbildung 5.4.: Eigenständige Denkobjekte, Verknüpfung der Teilkonzepte Funktionsgraph und Funktionsgleichung (Reichel u. a. 2012b, S. 82)

In der ersten Teilaufgabe müssen zwei unterschiedliche Funktionsgraphen miteinander verglichen werden (O3). Die Funktionsgleichungen dienen als Anleitung für das Zeichnen des Funktionsgraphen. Für das Teilkonzept *Funktionsgleichung* wäre die Aufgabe in die Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* einzuordnen (A2). Der Fokus der Aufgabe liegt allerdings auf dem Funktionsgraphen, die Zuordnung in die Stufe *Eigenständige Denkobjekte* bezieht sich auf dieses Teilkonzept. Die zweite Teilaufgabe zielt darauf ab, dass erkannt wird, wie sich die Änderung eines Faktors auf den Funktionsgraphen auswirkt. Für diese Erkenntnis müssen die Funktionsgraphen miteinander verglichen werden (O3).

6. Analyse mathematischer Aufgaben der Sekundarstufe

Die Analyse mathematischer Aufgaben der Sekundarstufe gliedert sich in drei Teilbereiche.

Für Kapitel 6.1 wurden Aufgaben aller Unterkapitel der Schulbücher „Das ist Mathematik 1-4“ und „Mathematik verstehen 5-6“, in denen Funktionen das zentrale Thema waren, in das Modell eingeordnet. Es wird festgestellt, welche Konzeptionen des Funktionsbegriffs die Aufgaben der ersten sechs Klassen der Sekundarstufe unterstützen beziehungsweise welche Entwicklung der Konzeptionen stattfindet.

Für Kapitel 6.2 wurden die Schulbücher „Mathematik verstehen 5“ und „Mathematik verstehen 6“ nochmals gezielt nach Aufgaben durchsucht, welche die Stufe *Eigenständige Denkobjekte* unterstützen. Die Aufgaben werden in unterschiedliche Typen eingeteilt. So werden Charakteristiken erarbeitet, die Aufgaben, welche die Stufe *Eigenständige Denkobjekte* unterstützen, auszeichnen.

Für Kapitel 6.3 wurden sowohl Übungsaufgaben zu den Grundkompetenzen (Typ-1-Aufgaben) als auch Übungsaufgaben zur Vernetzung von Grundkompetenzen (Typ-2-Aufgaben) der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in das Modell eingeordnet. Es wird untersucht, wie sich Aufgaben zur zentralen Reifeprüfung von Schulbuchaufgaben unterscheiden. Weiters wird die Verteilung der Aufgaben zur Zentralmatura auf die unterschiedlichen Stufen des Modells, im Vergleich zur Verteilung der Schulbuchaufgaben, betrachtet.

6.1. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs anhand von Schulbuchaufgaben

Das erarbeitete Modell zur Einteilung der Aufgaben gliedert sich in die drei Stufen: *Direkt gelenkte Aktionen*, *Selbstgeleitete Prozesse* und *Eigenständige Denkobjekte*. In diesem ersten Teil der Schulbuchanalyse werden Tendenzen ermittelt, welchen Stufen die Aufgaben der unterschiedlichen Teilgebiete des Themas Funktion hauptsächlich zuzuordnen sind. Auch wurde im Zuge dieses Teils der Analyse das Modell zur Einteilung der Schulbuchaufgaben verfeinert.

Es wurden Aufgaben der Schulbücher „Das ist Mathematik 1-4“ und „Mathematik verstehen 5-6“ mithilfe des Modells eingeordnet. Die Aufgabenfülle war zu groß, um jede einzelne Aufgabe zu berücksichtigen. Um eine möglichst gleichmäßige Auswahl zu treffen und gleichzeitig Kapitel mit wenigen Aufgaben nicht zu vernachlässigen, wurde von jeder Schulbuchseite eines relevanten Themas eine Aufgabe zufällig ausgewählt. Aus den Büchern „Das ist Mathematik 1-4“ wurden Aufgaben der *Wissensstraße* nicht berücksichtigt, aus den Büchern „Mathematik verstehen 5-6“ wurden Kontrollaufgaben (blau hinterlegt) nicht berücksichtigt. In den ersten drei Klassen der AHS wurde - aufgrund vieler nicht relevanter Aufgaben - von jeder Schulbuchseite, die bedeutsame Aufgaben enthält, gezielt eine relevante Aufgabe ausgewählt. Insgesamt wurden 494 Aufgaben als bedeutsam für den Funktionsbegriff erachtet. Davon wurden 111 Aufgaben berücksichtigt und zu einer der drei Stufen zugeordnet. Tabelle 6.1 zeigt die untersuchten Kapitel.

Obwohl die vorgefundene Aufgabenverteilung in den untersuchten Schulbüchern natürlich keinesfalls repräsentativ für den österreichischen Mathematikunterricht ist, können anhand dieser doch gewisse Tendenzen festgestellt werden. Von der ersten bis zur dritten Klasse AHS wurden nur sehr wenige für den Funktionsbegriff relevante Aufgaben gefunden. Bei relevanten Aufgaben werden Funktionsterme meist als *Formeln* bezeichnet. Dies steht auch im Einklang mit dem Lehrplan, in dem in der vierten Klasse zum ersten Mal der Funktionsbegriff auftaucht. Mit der vierten Klasse steigt die Aufgabenfülle deutlich an. In der fünften und sechsten Klasse kann nochmals eine deutliche Steigerung der Aufgabenzahl beobachtet werden.

Über 20% aller Aufgaben behandeln das Thema „Lineare Funktionen“ (4. und 5. Klasse: *Lineare Funktionen*), dies ist somit der Teilbereich, dem die meisten Aufgaben gewidmet werden. Dieser ist dicht gefolgt vom Unterkapitel „Exponential- und Logarithmusfunktionen“ (6. Klasse), aus dem etwas unter 20% der Aufgaben stammen. Auch etwas unter 20% sind allgemein einleitende Aufgaben zum Funktionsgraphen und zur Funktionsgleichung (4. Klasse: *Zuordnungen, Tabellen und Graphen; Funktionsgleichungen - Funktionsterme* und 5. Klasse: *Reelle Funktionen*). Die restlichen Aufgaben verteilen sich auf viele unterschiedliche Teilgebiete mit verhältnismäßig geringer Aufgabenzahl.

Tabelle 6.2 zeigt die Auswertung, welchen Stufen des Verständnisses die untersuchten Aufgaben aus den unterschiedlichen Teilkapiteln zugeordnet wurden. Behandelt eine Aufgabe sowohl das Teilkonzept des *Funktionsgraphen* als auch das der *Funktionsgleichung*, so wurde sie für jedes Teilkonzept als halbe Aufgabe gewertet.

Die Ergebnisse dieses ersten Teils der Analyse müssen vorsichtig interpretiert werden: Die Analyse wurde lediglich für zwei ausgewählte Schulbuchreihen durchgeführt. Ob auch die Untersuchung anderer Schulbuchreihen ähnliche Ergebnisse liefern würde, wurde nicht überprüft. Auch kann anhand von Aufgaben in Schulbüchern natürlich nicht direkt auf den österreichischen Mathematikunterricht geschlossen werden. Für die Aussagekraft der Ergebnisse spricht, dass die untersuchten Schulbuchreihen in Österreich recht verbreitet sind und dass gerade Aufgaben aus Mathematikbüchern im Unterricht intensiv verwendet werden (zur Verwendung von Mathematikbüchern an europäischen Schulen siehe z. B. Pepin und Haggarty 2001, S. 168-169).

Schulbuch	Kapitel	Anz. unters. Aufgaben	Anz. relev. Aufgaben	
			Abs.	Rel. [%]
Das ist Mathematik 1	C1 Gleichungen (teilweise relevant)	2	15	3
Das ist Mathematik 2	E1 Lösen von Gleichungen - Arbeiten mit Formeln (teilweise relevant)	6	31	6
Das ist Mathematik 3	C Algebra (lediglich Kapitel *C2 Aufstellen von Formeln und Gleichungen* und *C4 Gleichungen und Formeln* teilweise relevant)	7	40	8
Das ist Mathematik 4	D Funktionen	17	76	15
Mathematik verstehen 5	7 Reelle Funktionen	12	42	9
	8 Lineare Funktionen	16	74	15
	9 Einige nichtlineare Funktionen	12	62	13
Mathematik verstehen 6	3 Reelle Funktionen	7	21	4
	4 Exponential- und Logarithmusfunktionen	18	83	17
	5 Winkelfunktionen (Kapitel *5.1 Das Bogenmaß* und *5.2 Drehbewegungen* nicht relevant)	5	14	3
	6 Ergänzungen zu Funktionen	9	36	7
		111	494	

Tabelle 6.1.: Anzahl der für die Analyse relevanten Schulbuchaufgaben, bzw. Anzahl der davon untersuchten Schulbuchaufgaben, aufgeschlüsselt nach unterschiedlichen Teilbereichen des Themas Funktionen; Prozentwerte relevanter Aufgaben der jeweiligen Kapitel sind relativ zur Gesamtanzahl relevanter Aufgaben (494) angegeben.

Kapitel	**Funktions-graph**			**Funktions-gleichung**			**Ges.**
	A	P	O	A	P	O	
C1 Gleichungen (teilweise relevant)				2			2
E1 Lösen von Gleichungen - Arbeiten mit Formeln (teilweise relevant)				6			6
C Algebra (lediglich Kapitel *C2 Aufstellen von Formeln und Gleichungen* und *C4 Gleichungen und Formeln* teilweise relevant)				6	1		7
D Funktionen	9,5	1,5	3	2,5	0,5		17
7 Reelle Funktionen	4	2,5	2	2	0,5	1	12
8 Lineare Funktionen	3	3	1	2,5	6,5		16
9 Einige nichtlineare Funktionen	1	3,5	0,5	2	4,5	0,5	12
3 Reelle Funktionen		0,5	3	1	0,5	2	7
4 Exponential- und Logarithmusfunktionen	1,5	0,5		6,5	7,5	2	18
5 Winkelfunktionen (Kapitel *5.1 Das Bogenmaß* und *5.2 Drehbewegungen* nicht relevant)	0,5		1	1,5		2	5
6 Ergänzungen zu Funktionen				0,5	1	7,5	9
	20,5	11,5	9,5	32,5	22	15	111

Tabelle 6.2.: Anzahl der Schulbuchaufgaben in den Stufen *Direkt gelenkte Aktionen (A)*, *Selbstgeleitete Prozesse (P)* und *Eigenständige Denkobjekte (O)*; für jeden Teilbereich sind die Stufen, denen ein Großteil der Aufgaben zugeordnet wurde, grau hinterlegt.

In den ersten drei Klassen der AHS werden ausnahmslos algebraische Darstellungen von Funktionen behandelt. Der Funktionsgraph wird - entsprechend dem Lehrplan - erst in der 4. Klasse AHS eingeführt. Aufgaben der ersten drei Klassen unterstützen fast ausschließlich die Stufe *Direkt gelenkte Aktionen*. Abbildung 6.1 zeigt eine typische Aufgabe der ersten Klasse zum Teilkonzept *Funktionsgleichung*.

Die Handyrechnung **H** setzt sich aus der Grundgebühr **G** und der Sprechgebühr **S** zusammen.

a) Stelle eine Formel für die Berechnung von **H** auf!

b) Berechne die Höhe der Sprechgebühr, wenn bei einer Rechnung von **67 €** die Grundgebühr **1) 15 €**, **2) 19 €**, **3) 25 €** beträgt.
Wie lautet die Formel, mit deren Hilfe man aus der Handyrechnung **H** und der Grundgebühr **G** die Sprechgebühr **S** berechnen kann?

c) Berechne die Höhe der Grundgebühr, wenn die Handyrechnung **82 €** und die Sprechgebühr **53 €** betragen.
Wie lautet die Formel, mit deren Hilfe man aus der Handyrechnung **H** und der Sprechgebühr **S** die Grundgebühr **G** berechnen kann?

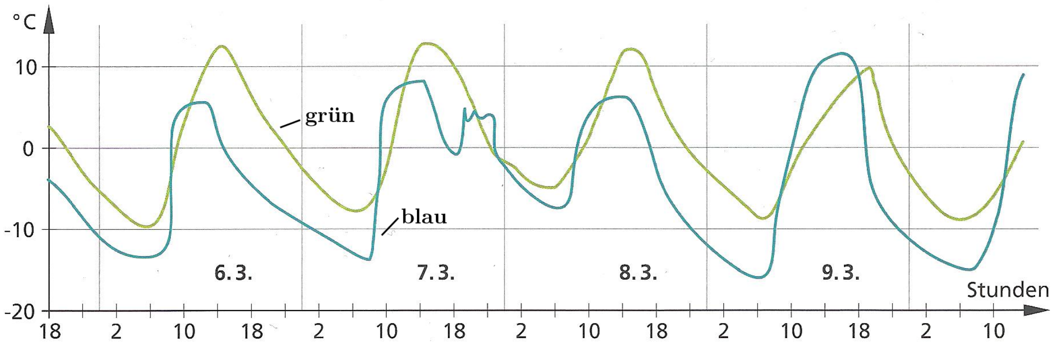
Abbildung 6.1.: Direkt gelenkte Aktionen, Teilkonzept Funktionsgleichung (Reichel, Humenberger, Litschauer, Groß und Aue 2011, S. 87)

Zum Lösen von Aufgabe 6.1 müssen unterschiedliche Werte in die Formel eingesetzt werden. Die Aufgabenstellung unterscheidet sich damit von vielen Schulbuchaufgaben der ersten drei Klassen. Durch die Betonung des Einsetzungsaspekts rückt die funktionale Sichtweise in den Vordergrund, die Aufgabe ist somit relevant. Teilaufgabe a) fordert das Aufstellen der Formel. Die Sachsituation deutet direkt auf die Formel hin (A2). Aufgabenstellungen b) und c) fordern das Einsetzen von Werten und das Umformen der Formel (A2). Kleinschrittige Handlungsanweisungen führen durch die gesamte Aufgabenstellung (A1).

In der vierten Klasse wird der Funktionsbegriff eingeführt. Dies geht einher mit der Einführung des Funktionsgraphen. Ein Großteil der untersuchten Aufgaben behandelt dieses Konzept und wiederum die Mehrzahl dieser wurde der Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* zugeordnet. Trotzdem war beim Einordnen vor allem auffallend, dass, entgegen den Ergebnissen der theoretischen Recherche, der Funktionsgraph bereits bei der Einführung in Schulbuchaufgaben teilweise als Objekt behandelt wird. Abbildung 6.2 zeigt das einführende Beispiel des Schulbuchs „Das ist Mathematik 4“ zum Teilkonzept *Funktionsgraph*.

Mit einem Thermographen (Temperaturschreiber) wird der Verlauf der Temperatur in Form einer Kurve aufgezeichnet (→ Figur unten). Die folgende Aufzeichnungen wurden zwischen 5. und 10. März 1961 in der Doline „Gstettneralm" bei Lunz am See (NÖ) und im Tamsweger Becken (Sbg.) von Dieter Litschauer gemacht.

Bemerkung: Eine Doline ist eine Karsterscheinung, verursacht duch die Löslichkeit von Kalk in kohlensaurem Wasser. In der Doline „Gstettneralm" wurde im Jahr 1933 mit −53 °C die tiefste je in Mitteleuropa registrierte Temperatur gemessen.



a) Schaut euch die beiden Temperaturgänge genau an! Die Temperatur in der Doline ist blau, die in Tamsweg ist grün gezeichnet. Welche Unterschiede könnt ihr erkennen?
b) Welchen Wert hatte die Temperatur **1)** am 6.3.1961 um 14 Uhr, **2)** am 6.3.1961 um 18 Uhr und **3)** am 7.3.1961 um 6 Uhr in der Doline bzw. in Tamsweg?
c) Notiert, wann die Temperatur in der Doline bzw. in Tamsweg −5 °C betrug!
d) Zwischen welchen Werten schwankte die Temperatur vom 9.3.1961, 14 Uhr bis 10.3.1961, 6 Uhr in der Doline bzw. in Tamsweg?
e) Notiert die Tageshöchstwerte und die Tagestiefstwerte am 8.3.1961 und am 9.3.1961!
f) Berechnet für den 8.3.1961 und für den 9.3.1961 die mittlere Temperatur in der Doline bzw. in Tamsweg, indem ihr jeweils den Mittelwert des Tageshöchstwertes und des Tagestiefstwertes bildet!

Abbildung 6.2.: Eigenständige Denkobjekte, Teilkonzept Funktionsgraph (Reichel u. a. 2012b, S. 75)

Obwohl die Aufgabe die erste im untersuchten Schulbuch ist, müssen, entgegen der Erwartung einer hierarchischen Entwicklung von den *Direkt gelenkten Aktionen* zu den *Eigenständigen Denkobjekten*, bereits in Aufgabenstellung a) zwei Funktionsgraphen miteinander verglichen werden (O3). Auch die folgenden Teilaufgaben verlangen die Verwendung des Funktionsgraphen als eigenständiges Objekt, Aktionen sollen *an ihm* durchgeführt werden (O1).

Dieser Widerspruch zum theoretischen Modell lässt sich verstehen, wenn bedacht wird, dass der Funktionsgraph - ähnlich wie geometrische Figuren - eine graphische Darstellung ist. Diese kann, wie ein reales Objekt, auf einen Blick im Ganzen betrachtet werden, sie kann untersucht werden und dient in natürlicher Art und Weise als Objekt für Tätigkeiten. Auch Sfard (1991, S. 10) räumt ein, dass das von ihr vorgeschlagene hierarchische Modell (von Prozessen zu Objekten) in bestimmten Fällen ungeeignet ist. Als Beispiel werden geometrische Ideen wie der Kreis genannt, für welche die statischen graphischen Repräsentationen natürlicher erscheinen als prozedurale Beschreibungen. Sie können strukturell begriffen werden, noch bevor prozedurale Beschreibungen bekannt sind.

Dies trifft augenscheinlich auch auf das Teilkonzept des *Funktionsgraphen* zu. Es kann durch die statische Darstellung völlig selbstverständlich als Objekt aufgefasst werden. Eine Hypothese dieser Arbeit ist, dass der Funktionsgraph von Schülerinnen und Schülern bereits lange vor der Funktionsgleichung strukturell verstanden wird und dadurch das Objekt der Funktion (Antwort auf die Frage: „Was ist eine Funktion?“) meist mit dem Funktionsgraphen gleichgesetzt wird.

Das größte Teilgebiet der vierten und fünften Klasse AHS sind lineare Funktionen (*D3 Lineare Funktionen* und *8 Lineare Funktionen*), über ein Fünftel aller relevanten Aufgaben zum Funktionsbegriff stammen aus diesem. In der vierten Klasse sind die Aufgaben (unabhängig ob *Funktionsgraph* oder *Funktionsgleichung*) hauptsächlich auf dem Niveau *Direkt gelenkter Aktionen* gestellt, in der fünften Klasse wird ein Großteil den *Selbstgeleiteten Prozessen* zugeordnet. Es wurden keine Aufgaben, die eine Sichtweise der *Funktionsgleichung* als *Eigenständige Denkobjekte* erfordern, gefunden. Lediglich vereinzelte Aufgaben erforderten diese Konzeption für das Teilkonzept *Funktionsgraph*. Das hierarchische Modell trifft für lineare Funktionen sehr gut zu, das Konzept wird zuerst durch einzelne Aktionen eingeführt, zunehmend werden selbstgeleitete Prozesse gefordert. Die Sichtweise der Funktion als Objekt wird in diesem großen Kapitel allerdings nicht gefördert. Abbildung 6.3 zeigt eine typische Aufgabe zu linearen Funktionen der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse*.

> Eine lineare Kostenfunktion K ist wie folgt gegeben: Werden 150 Einheiten produziert, betragen die Gesamtkosten 525 €; werden 400 Einheiten produziert, so betragen die Gesamtkosten 700 €. Gib eine Termdarstellung der Funktion K an, die x Einheiten die Gesamtkosten K(x) zuordnet! Wie groß sind die fixen Kosten? Wie groß sind die variablen Kosten pro Einheit?

Abbildung 6.3.: Selbstgeleitete Prozesse, Teilkonzept Funktionsgleichung (Malle u. a. 2010a, S. 155)

Um Aufgabe 6.3 zu lösen, müssen zwei lineare Gleichungen aufgestellt und das Gleichungssystem gelöst werden. Darauf wird nicht direkt hingewiesen, eine Anleitung der Zwischenschritte fehlt (P1).

Aufgaben, welche die Objektsichtweise algebraischer Darstellungen der Funktion unterstützen, sind in den Schulbüchern der ersten fünf Klassen AHS rar. Am ehesten werden strukturelle Konzeptionen in Kapitel *7 Reelle Funktionen* der fünften Klasse, welches allgemeine, innermathematische Aufgaben zu Funktionen beinhaltet, gefördert.

Erst im Schulbuch der sechsten Klasse gibt es vermehrt Aufgaben, welche auch die Sichtweise der *Eigenständigen Denkobjekte* fördern. Dies passt gut ins Modell, die *Eigenständigen Denkobjekte* stellen die letzte Stufe eines Entwicklungsprozesses dar. Wieder werden diese Beispiele hauptsächlich in Kapiteln gefunden, welche innermathematische Aufgaben zu Funktionen beinhalten und keinen anwendungsorientierten Kontext besitzen (*3 Reelle Funktionen, 6 Ergänzungen zu Funktionen*). Abbildung 6.4 zeigt eine Aufgabe aus dem Kapitel *6 Ergänzungen zu Funktionen*, welches hauptsächlich Aufgaben zur strukturellen Sichtweise enthält.

Eine reelle Funktion f: A → B heißt **surjektiv**, wenn jedes Element in B mindestens ein Urelement in A besitzt. Welche der folgenden Funktionen sind surjektiv?

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto 2x$ **(2)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto |x|$ **(3)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto x^3$

Abbildung 6.4.: Eigenständige Denkobjekte, Teilkonzept Funktionsgleichung (Malle u. a. 2010b, S. 102)

Um die Aufgabenstellung 6.4 zu lösen, muss die jeweilige Funktion auf die Eigenschaft „surjektiv“ untersucht werden (O2).

Kapitel *6 Ergänzungen zu Funktionen* enthält allerdings relativ wenige Aufgaben. Den inhaltlichen Schwerpunkt der sechsten Klasse scheint das Kapitel *4 Exponential- und Logarithmusfunktionen* zu bilden. Aus diesem stammen mehr als die Hälfte aller Funktionsaufgaben der sechsten Klasse. Diese Aufgaben wurden jedoch größtenteils in die Stufen *Direkt gelenkte Aktionen* und *Selbstgeleitete Prozesse* eingeordnet. Aufgabenstellung 6.5 ist typisch für viele Aufgaben dieses Kapitels.

Eine bestimmte Anzahl von Atomen des radioaktiven Elementes Polonium 218 zerfällt annähernd nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = 1\,500\,000 \cdot 0{,}79671^t$ (t in Minuten).

a) Wie viele unzerfallene Atome sind zu Beginn vorhanden?
b) Wie viele unzerfallene Atome sind nach 2, 7, 14 bzw. 30 min noch vorhanden?
c) Zeichne den Graphen der Funktion N, die jedem Zeitpunkt t die Anzahl N(t) der noch nicht zerfallenen Atome zuordnet!

Abbildung 6.5.: Direkt gelenkte Aktionen, Verknüpfung der Teilkonzepte Funktionsgraph und Funktionsgleichung (Malle u. a. 2010b, S. 62)

Um die ersten beiden Aufgabenstellungen zu lösen, muss lediglich in die gegebene Formel eingesetzt werden (A2). Für die dritte Aufgabenstellung muss der Funktionsgraph gezeichnet werden, darauf wird direkt hingewiesen (A2). Vergleicht man Aufgabenstellung 6.5 (6. Klasse) mit Aufgabe 6.1 (1. Klasse), so erkennt man große Ähnlichkeiten. Kern beider Aufgaben ist das Einsetzen von unterschiedlichen Werten in eine Formel. Die dafür erforderte und damit geförderte Konzeption des Funktionsbegriffs ist in der ersten und der sechsten Klasse dieselbe: die der *Direkt gelenkten Aktionen*. Zu einem Sichtweisenwechsel von operationellen zu strukturellen Konzeptionen (Erklärung operationelle und strukturelle Konzeption siehe Kapitel 2.1) trägt eine Aufgabe dieser Art nicht bei.

Es sollen nun einige Ergebnisse zusammengefasst werden: Für das Teilkonzept der *Funktionsgleichung* scheint das von der Fachliteratur abgeleitete hierarchische Modell sehr zutreffend; oder umgekehrt betrachtet: In österreichischen Schulbüchern ist die von Lehr-Lern-Forscherinnen und Lehr-Lern-Forschern geforderte Konzeptentwicklung von operationellen hin zu strukturellen Konzeptionen in Grundzügen realisiert. In den ersten drei Klassen der AHS wird ein Großteil der Aufgaben auf dem Niveau *Direkt gelenkte Aktionen* gestellt. In der vierten Klasse kommen Aufgaben der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* hinzu, die in der fünften Klasse bereits überwiegen. Schließlich beinhalten gewisse Kapitel der sechsten Klasse auch einen hohen relativen Anteil an Aufgaben, welche die Bildung von *Eigenständigen Denkobjekten* unterstützen.

Das Teilkonzept des *Funktionsgraphen* hingegen wird bereits in einführenden Schulbuchaufgaben als eigenständiges Objekt behandelt. Dieser Umstand widerspricht der hierarchischen Darstellung des Modells, das Modell trifft für dieses Teilkonzept nur begrenzt zu. Der Funktionsgraph ist durch seine frühe Behandlung auf der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* ein mächtiges Werkzeug, um strukturelle Konzeptionen zu fördern. Es ergibt sich aber die Vermutung, dass Schülerinnen und Schüler mit dem Objekt „Funktion“ oft den Funktionsgraphen und nicht etwa algebraische Darstellungen verbinden.

Die beiden größten Teilgebiete zum Funktionsbegriff *Lineare Funktionen* und *Exponential- und Logarithmusfunktionen* beinhalten hauptsächlich anwendungsorientierte Aufgaben, welche die Sichtweise der *Eigenständigen Denkobjekte* nur wenig fördern. Ein Erreichen dieser Stufe ist für ein verständnisvolles und erfolgreiches mathematisches Arbeiten aber unbedingt erforderlich (vgl. z. B. Sfard 1991, od. Gray und Tall 1994b; siehe Kapitel 3.2). In anderen Kapiteln der sechsten Klasse, welche vor allem innermathematische Aufgaben beinhalten, befinden sich relativ viele Beispiele, welche die strukturelle Sichtweise unterstützen (*3 Reelle Funktionen*, *6 Ergänzungen zu Funktionen*). Allerdings beinhalten diese Kapitel verhältnismäßig wenige Aufgaben, es bleibt zu befürchten, dass diesen deswegen weniger Beachtung geschenkt wird und strukturelles Verständnis deshalb oft ausbleibt.

6.2. Aufgabenformate zur Stufe *Eigenständige Denkobjekte*

Im vorangehenden Kapitel 6.1 wurde ein Überblick geschaffen, welche Teilgebiete des Themas Funktionen Aufgaben welcher Verständnisstufe beinhalten. Es wurde festgestellt, dass die meisten Kapitel verhältnismäßig wenige Beispiele zur Stufe *Eigenständige Denkobjekte* enthalten. In der Fachliteratur wird der Sichtweisenwechsel zwischen operationellen und strukturellen Konzeptionen als notwendig, gleichzeitig aber auch als problematisch beschrieben (vgl. z. B. Sfard 1991, od. Arnon u. a. 2014, S. 21-22; siehe Kapitel 3.2). Vorbereitend für dieses Kapitel wurden Teilbereiche der Schulbücher „Mathematik verstehen 5“ und „Mathematik verstehen 6“, aus denen bereits viele Aufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* zugeordnet wurden, nochmals gezielt durchsucht. In diesem Kapitel werden gezielt Charakteristiken erarbeitet, die Aufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* aufweisen. Daraus ergeben sich Typen von Aufgaben, die diese Stufe unterstützen.

Das Teilkonzept *Funktionsgraph* wird teilweise bereits in einführenden Aufgaben ganz natürlich auf der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* behandelt (siehe Kapitel 6.1). Die graphische Darstellung einer Funktion ist somit ein mächtiges Instrument, um strukturelle Konzeptionen zu fördern. Ein strukturelles Verständnis des Teilkonzepts *Funktionsgraph* muss allerdings nicht automatisch bedeuten, dass auch algebraische Darstellungen strukturell verstanden werden. Dieses Kapitel konzentriert sich auf Aufgaben, die algebraische Darstellungen der Funktion in den Vordergrund rücken.

Aufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte*, welche algebraische Funktionsdarstellungen beinhalten, konnten in folgende unterschiedliche Arten unterteilt werden:

- Aufgaben, welche sich direkt auf die Definition der reellen Funktion (5. Klasse) beziehungsweise auf die allgemeine Funktionsdefinition (6. Klasse) beziehen.
- Aufgaben, welche explizit die Auseinandersetzung mit Eigenschaften von Funktionen fordern, die exakten Definitionen dieser Eigenschaften sind zur Lösung oft von Bedeutung.
- Aufgaben, welche explizit mehrere unterschiedliche Darstellungen einer Funktion fordern.
- Aufgaben, welche sich explizit mit Typen von Funktionen auseinandersetzen.
- Aufgaben, die einen mathematischen Beweis fordern.
- Aufgaben, welche die Verkettung von Funktionen behandeln.
- Aufgaben, welche sich explizit mit dem allgemeinen Funktionsbegriff (Definitions- und Zielmenge können beliebige Objekte enthalten) auseinandersetzen.

Eine reelle Funktion wird im Schulbuch „Mathematik verstehen 5“ wie folgt definiert:

> Sei A eine Menge von reellen Zahlen. Wird jeder Zahl $x \in A$ genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so heißt diese Zuordnung (**reelle**) **Funktion**. (Malle u. a. 2010a, S. 126)

Der einzige Unterschied dieser Definition zur Definition der allgemeinen Funktion im Schulbuch der 6. Klasse ist, dass Definitions- und Zielbereich in dieser keine Mengen reeller Zahlen, sondern beliebige Mengen sind.

In den Schulbüchern „Mathematik verstehen 5“ und „Mathematik verstehen 6“gibt es einige wenige Aufgaben, die sich direkt auf die Definitionen der Funktion beziehen und ein genaues Verständnis dieser fordern. Ein Beispiel dafür ist Aufgabe 6.6.

Jeder Zahl aus $\mathbb{N}^*$ werden ihre Teiler aus $\mathbb{N}^*$ zugeordnet. Ist das eine Funktion?

Abbildung 6.6.: Eigenständige Denkobjekte (Malle u. a. 2010a, S. 130)

Um die Aufgabe zu lösen, muss die Definition des Funktionsbegriffs genau verwendet werden. Die Funktion wird dabei als statisches Ganzes betrachtet, sie ist losgelöst von Prozessen (O4). Die Aufgabe enthält weder Hinweise auf algebraische Darstellungen durch eine Funktionsgleichung, noch auf graphische Darstellungen durch einen Funktionsgraphen und kann deshalb keinem Teilkonzept zugeordnet werden.

Viele Aufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* fordern *explizit* eine Auseinandersetzung mit gewissen Eigenschaften von Funktionen, wie:

- Monotonie (monoton steigend, streng monoton steigend, monoton fallend, streng monoton fallend)
- Periodizität
- Injektivität, Surjektivität, Bijektivität
- Definitionsmenge, Wertemenge, Zielmenge, Bild, Urbild, Monotonie

Solche Aufgabenstellungen betonen die obigen Merkmale *direkt* als Eigenschaften und fordern oft eine exakte Auseinandersetzung mit den Definitionen dieser. Ein Beispiel für eine Aufgabe dieser Art ist Aufgabe 6.4 und Teilaufgabe 1) von Aufgabe 6.8.

Im Schulbuch „Mathematik verstehen 5“ werden fünf unterschiedliche Arten aufgezählt, wie eine reelle Funktion angegeben werden kann:

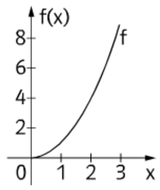
	Wertetabelle	Zuordnungsvorschrift	Termdarstellung	Graph	Funktionsgleichung
Beispiel	x | x^2 1 | 1 2 | 4 3 | 9	$f: x \mapsto x^2$	$f(x) = x^2$		$y = x^2$

Abbildung 6.7.: Unterschiedliche Darstellungsweisen einer reellen Funktion aus dem Schulbuch „Mathematik verstehen 5“ (Malle u. a. 2010a, S. 139)

Aufgabe 6.8 bezieht sich direkt auf diese Darstellungen.

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^2$ für $0 \leq x \leq 4$.

1) Gib die Definitionsmenge, die Wertemenge und eine Funktionsgleichung dieser Funktion an!

2) Schreibe diese Funktion auf alle oben genannten Arten an!

Abbildung 6.8.: Eigenständige Denkobjekte, Verknüpfung der Teilkonzepte Funktionsgraph und Funktionsgleichung (Malle u. a. 2010a, S. 139)

Aufgabenstellung 1) fordert explizit die Merkmale Defintionsmenge und Wertemenge (O2). Teilaufgabe 2) fordert die Darstellung der reellen Funktion auf fünf verschiedene Arten. Dies lässt die Funktion als Ganzes, als Ding erscheinen, welches auf unterschiedliche Arten beschrieben werden kann (O4).

Im Laufe der Sekundarstufe werden unterschiedliche Typen von Funktionen behandelt: lineare Funktionen, indirekt proportionale Funktionen, Polynomfunktionen, abschnittsweise definierte Funktionen, Sprungfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Winkelfunktionen, usw.

Manche Aufgabenstellungen betonen explizit diese unterschiedlichen Typen von Funktionen. Aufgabe 6.9 ist ein Beispiel dafür.

Ein Auto fährt gegen eine Wand. Die Stärke des Aufpralls hängt von der kinetischen Energie E des Autos ab. Diese kann nach der Formel $E = \frac{mv^2}{2}$ berechnet werden (m = Masse des Autos, v = Geschwindigkeit des Autos). Welche Funktionen kann man in dieser Formel sehen? Von welchem Typ sind sie jeweils? Drücken sie Proportionalitäten aus? Skizziere deren Graphen!

Abbildung 6.9.: Eigenständige Denkobjekte, Verknüpfung der Teilkonzepte Funktionsgraph und Funktionsgleichung (Malle u. a. 2010a, S. 186)

Aufgabe 6.9 macht bewusst, dass eine reelle Funktion (nach der Definition im Schulbuch) einen Zusammenhang zwischen *zwei* Größen darstellt. Je nachdem, wie diese Größen gewählt werden, ergeben sich unterschiedliche Typen von Funktionen. In der Fragestellung der Aufgabe wird explizit nach unterschiedlichen Typen von Funktionen gefragt (O3).

Im Buch der sechsten Klasse werden auch einige (einfache) Beweisaufgaben gestellt. Aufgabe 6.10 setzt die exakte Kenntnis der Definition der Eigenschaft *streng monoton fallend* voraus. Ein indirekter Beweis muss geführt werden.

Beweise: Ist f streng monoton fallend in M, dann gilt für alle $x, y \in M$:

a) $f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow x \geqslant y$ **b)** $f(x) < f(y) \Rightarrow x > y$

Abbildung 6.10.: Eigenständige Denkobjekte, Teilkonzept Funktionsgleichung (Malle u. a. 2010b, S. 41)

Zur Führung des Beweises muss die Definition der Eigenschaft *streng monoton fallend* verwendet werden (O2). Die Funktion wird in der Beweisführung statisch, völlig losgelöst von Handlungen, verwendet (O4).

Auch die Verkettung von Funktionen ist ein Thema in der 6. Klasse AHS. In Aufgaben dazu sind die Funktionsterme zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben, die Verkettung $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ der Funktionen ist zu bilden. Funktionen werden in Aufgaben dieser Art als Ganzes verwendet und Aktionen werden auf sie angewandt (O1, O4).

Bis weit in die 6. Klasse werden nur reelle Funktionen betrachtet. Sie stellen Zuordnungen zwischen (reellen) Zahlen dar. Der Funktionsbegriff wird im Kapitel *6 Ergänzungen zu Funktionen* verallgemeinert. In einigen Aufgaben wird explizit die allgemeine Funktionsdefinition betont. Aufgabe 6.11 ist ein Beispiel dafür.

Gib zwei Beispiele von Funktionen f: A → B an, wobei A und B Mengen geometrischer Objekte sind!

Abbildung 6.11.: Eigenständige Denkobjekte (Malle u. a. 2010b, S. 105)

Die Aufgabe betont sehr direkt die allgemeine Funktionsdefinition. In der Definition wird die Funktion als statisches Konstrukt, losgelöst von Prozessen, verwendet (O4). Die Aufgabe enthält weder Hinweise auf algebraische Darstellungen durch eine Funktionsgleichung noch auf graphische Darstellungen durch einen Funktionsgraphen und kann deshalb keinem Teilkonzept zugeordnet werden.

Alle in diesem Kapitel vorgestellten Aufgaben weisen eine Gemeinsamkeit auf: Sie sind innermathematische Aufgaben. Im Zentrum der Betrachtungen stehen der Funktionsbegriff, Vertreter von Funktionen, Darstellungen von Funktionen oder Eigenschaften von Funktionen. Selbst Beispiele wie Aufgabe 6.9, die zwar einen sachorientierten Kontext aufweisen, wurden aufgrund innermathematischer Fragestellungen der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* zugeordnet. Dieser Umstand legt den Schluss nahe: Sollen Aufgaben Lernenden den Funktionsbegriff strukturell vermitteln, so sollte die Funktion das zentrale Objekt der Aufgabenstellungen sein und nicht nur ein Hilfsmittel zur Lösung anwendungsorientierter Problemstellungen. Auch rein innermathematische Aufgaben sollten im Unterricht also in ausreichendem Maße behandelt werden. Gerade in umfangreichen Kapiteln wie „Lineare Funktionen“ oder „Exponential- und Logarithmusfunktionen“ befinden sich beinahe ausschließlich Aufgaben, welche operationelle Konzeptionen fördern. Die Gefahr ist groß, dass Schülerinnen und Schüler in durch viele Aufgaben ständig wiederholten operationellen Sichtweisen steckenbleiben. Innermathematische Aufgaben sind für das Erreichen der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* essentiell.

6.3. Vergleich mit Übungsaufgaben zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung

Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung im Unterrichtsfach Mathematik orientiert sich an im Lehrplan enthaltenen grundlegenden mathematischen Kompetenzen, die von allen österreichischen AHS-Absolventinnen und -Absolventen in hohem Maß erreicht werden sollen. Im Mathematikunterricht sollen sowohl längerfristig verfügbare grundlegende mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten („Grundkompetenzen“) erarbeitet werden als auch speziellere mathematische Kompetenzen. (Siller u. a. 2013, S. 1-2)

Die Reifeprüfung Mathematik an der AHS legt keinen Wert auf hochspezialisiertes Fakten- und Methodenwissen, „sondern im Fokus der Prüfungsaufgaben stehen Wissen und Können sowie Fähigkeiten, die

- für das Fach grundlegend,
- längerfristig verfügbar und
- gesellschaftlich relevant

sind.“ (ebd., S. 3)

Ein lehrplankonformer, auf fachlichen, bildungstheoretischen und sozialen Aspekten basierender Katalog an Grundkompetenzen wurde entwickelt. Dieser gliedert sich in die Themenbereiche *Algebra und Geometrie*, *Funktionale Abhängigkeiten*, *Analysis* und *Wahrscheinlichkeit und Statistik*. Die Grundkompetenzen sollen einen verständigen und flexiblen Umgang mit mathematischem Grundwissen fördern (ebd., S. 4-5). Durch eine neue Art der Gestaltung von Mathematikaufgaben sollen diese Forderungen umgesetzt werden, von einer „neuen Aufgabenkultur“ ist die Rede.

Auf der Website des BIFIE stehen Aufgaben zur Verfügung, die auf Basis dieser Grundkompetenzen erstellt wurden. Außerdem wird eine Sammlung aller bis März 2014 veröffentlichten Beispiele aus diesem BIFIE Aufgabenpool in Form eines PDF-Dokuments bereitgestellt (siehe *Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)* 2014).

Lehr-Lern-Forscherinnen und Lehr-Lern-Forscher, die sich mit Prozess- und Objektsichtweisen beschäftigen, sind überzeugt davon, dass ein verständiger und flexibler Umgang mit mathematischen Konzepten durch eine strukturelle Sichtweise bzw. durch die Sichtweise der Prozess-Objekt-Dualität erreicht wird. Sfard (vgl. 1991, S. 26, 29) meint, dass operationelle Konzeptionen lediglich zu lokalem und somit mangelhaftem Verständnis führen. Strukturelle Konzeptionen hingegen erhöhen das Gefühl des Verständnisses. Gray und Tall (1994b) sind der Ansicht, dass die Verwendung von *procepts* (kombinierte Sichtweise aus Prozess und Objekt; siehe Kapitel 2.2 und Kapitel 3.2.1) zu einem flexiblen und erfolgreichen Umgang mit mathematischen Konzepten führt.

Für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung wurden zum Teil Aufgaben erstellt, die es zuvor in dieser Form im österreichischen Schulunterricht noch nicht gegeben hat. Es wird in diesem Kapitel untersucht, ob die neue Aufgabenkultur, welche die Grundkompetenzen sichern soll, auch eine Auswirkung auf das strukturelle Verständnis des Funktionsbegriffs hat. Dazu wurden alle bis März 2014 erschienenen Grundkompetenzaufgaben (Typ-1-Aufgaben) zum Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten* des BIFIE-Aufgabenpools in das in Kapitel 5 erläuterte Modell eingeteilt. Da die Konzeptbildung beim Teilkonzept *Funktionsgraph* nicht - entsprechend dem Modell - hierarchisch verläuft (siehe Kapitel 6.1), wurden nur Aufgaben, welche auch das Teilkonzept *Funktionsgleichung* behandeln, berücksichtigt.

Inhaltsbereich	Funktionsgleichung			Funktionsgraph	Ges.
	A	P	O		
FA 1: Funktionsbegriff	1	2	2	10	15
FA 2: Lineare Funktion	3	2	1	2	8
FA 3: Potenzfunktion	2	1		1	4
FA 4: Polynomfunktion	1		3	3	7
FA 5: Exponentialfunktion	8	1	3	1	13
FA 6: Sinusfunktion, Cosinusfunktion	7		1		8
	22	6	10	17	55

Tabelle 6.3.: Übungsaufgaben zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung des BIFIE (bis März 2014) in den Stufen *Direkt gelenkte Aktionen (A)*, *Selbstgeleitete Prozesse (P)* und *Eigenständige Denkobjekte (O)*

Bis März 2014 wurden insgesamt 55 Grundkompetenzaufgaben zum Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten* veröffentlicht und im Dokument *Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)* (2014) zusammengefasst. Davon behandeln 17 lediglich das Teilkonzept *Funktionsgraph* und wurden nicht ins Modell eingeteilt. Die Aufgaben sind in folgende Teilbereiche untergliedert:

- FA 1: Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften
- FA 2: Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]
- FA 3: Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b, z \in \mathbb{Z}$, oder mit $f(x) = a \cdot x^{1/2} + b$
- FA 4: Polynomfunktion [$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$]
- FA 5: Exponentialfunktion [$f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$]
- FA 6: Sinusfunktion, Cosinusfunktion

In jedem der Teilbereiche mit Ausnahme des Bereichs *FA 3: Potenzfunktionen* befindet sich zumindest eine Aufgabe, welche der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* zugeteilt wurde. Berücksichtigt man die geringe Anzahl an untersuchten Aufgaben, so ist dies bemerkenswert. Tabelle 6.3 zeigt die Zuordnung der Aufgaben.

Der erste Inhaltsbereich *FA 1* stellt eine inhaltliche Einführung in den Funktionsbegriff dar. Er ähnelt den Kapiteln *Zuordnungen, Tabellen und Graphen* und *Funktionsgleichungen - Funktionsterme*, sowie *Reelle Funktionen* der beiden Schulbücher „Das ist

Mathematik 4“ und „Mathematik verstehen 5“. Zehn der 15 Aufgaben dieses Themenbereichs beschäftigen sich ausschließlich mit dem Funktionsgraphen. Es soll hervorgehoben werden, dass einige dieser Aufgaben explizit die Definition der Funktion behandeln. Bei Aufgaben dieser Art werden unterschiedliche Graphen gezeigt, es soll entschieden werden, welche davon die Funktionsdefinition erfüllen (ebd., S. 91-94). Zwei Aufgaben des Inhaltsbereichs *FA 1: Funktionsbegriff* wurden der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* zugeteilt. Beide werden im Kompetenzmodell der Grundkompetenz

> *FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen* (Siller u. a. 2013, S. 9)

zugeordnet. Aufgabenstellung 6.12 ist eine der beiden.

Gegeben ist die Gerade mit der Gleichung $y = -2x + 4$. Auf dieser Geraden liegen die Punkte $A = (x_A|y_A)$ und $B = (x_B|y_B)$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Wenn $x_A < x_B$ ist, gilt ____①____, weil die Gerade ____②____ ist.

①	
$y_A < y_B$	☐
$y_A = y_B$	☐
$y_A > y_B$	☐

②	
monoton steigend	☐
monoton fallend	☐
konstant	☐

Abbildung 6.12.: Eigenständige Denkobjekte, FA 1.5 (*Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)* 2014, S. 113)

Zum Lösen der Aufgabe müssen allgemeine Aussagen gemacht werden, die für die Funktion als Ganzes gelten (O4). Der Funktion muss die Eigenschaft *monoton fallend* zugeordnet werden (O2). Der Inhalt der Aufgabe ist derselbe wie der vieler Schulbuchaufgaben, die Art der Aufgabenstellung unterscheidet sich aber von traditionellen Beispielen. Algorithmen stehen hier nicht im Vordergrund, es muss lediglich festgestellt werden, ob die Funktion steigend oder fallend ist. Die Lösung muss in der Sprache der Mathematik ausgedrückt werden. Das Aufgabenformat ist ein für traditionelle Mathematikaufgaben eher unüblicher Lückentext.

Der zweite Inhaltsbereich *FA 2: Lineare Funktion* behandelt dasselbe Themengebiet wie die Kapitel *D3 Lineare Funktionen* und *8 Lineare Funktionen* der beiden Schulbücher

„Das ist Mathematik 4" und „Mathematik verstehen 5". Während in den Schulbüchern zum Thema Lineare Funktionen keine Aufgaben gefunden wurden, welche die Stufe *Eigenständige Denkobjekte* unterstützen, wurde eine Aufgabe des BIFIE (Abbildung 6.13) dieser Stufe zugeteilt.

Betrachten Sie die lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen betreffend lineare Funktionen dieser Form an!

Jede lineare Funktion mit $k = 0$ schneidet jede Koordinatenachse mindestens einmal.	☐
Jede lineare Funktion mit $d \neq 0$ hat genau eine Nullstelle.	☐
Jede lineare Funktion mit $d = 0$ und $k \neq 0$ lässt sich als direktes Verhältnis interpretieren.	☐
Der Graph einer linearen Funktion mit $k = 0$ ist stets eine Gerade.	☐
Zu jeder Geraden im Koordinatensystem lässt sich eine lineare Funktion aufstellen.	☐

Abbildung 6.13.: Eigenständige Denkobjekte, FA 2.3 (*Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)* 2014, S. 126)

Die Antwortmöglichkeiten des Aufgabenformats *Multiple Choice* sprechen direkt Eigenschaften von linearen Funktionen an (O2). Dies konnte im Laufe der Analyse bei *Multiple-Choice*-Aufgaben mehrmals beobachtet werden. Das Aufgabenformat ist für die Einteilung von Bedeutung. Offene Aufgaben forcieren meist stärker Tätigkeiten, Aufgabenstellung 6.14 zeigt ein offenes Beispiel aus demselben Themengebiet des Schulbuchs „Mathematik verstehen 5".

Die Werte der Funktion f seien zu den Argumenten direkt proportional. Man kennt den Wert von f an einer von 0 verschiedenen Stelle. Gib eine Termdarstellung von f an, zeichne den Graphen von f und berechne f(3) sowie f(4,5)!

a) f(1) = 0,4 **b)** f(2) = 8 **c)** f(10) = 15 **d)** f(3,4) = 10,2 **e)** f(56) = 100,8

Abbildung 6.14.: Direkt gelenkte Aktionen (Malle u. a. 2010a, S. 159)

Obwohl die Schulbuchaufgabe (Abbildung 6.14), genau wie die Aufgabenstellung der Zentralmatura (Abbildung 6.13), die direkte Proportionalität anspricht und Schülerinnen und Schüler auch mit dem Graphen der Funktion konfrontiert werden, ist diese Aufgabenstellung aufgrund der Art, wie sie gestellt wird, der Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* zuzuordnen. Die Termdarstellung muss angegeben und der Graph gezeichnet werden (A1, A2). Die Eigenschaften stehen nicht im Vordergrund.

Eine der vier Aufgaben des dritten Inhaltsbereichs *FA 3: Potenzfunktion* behandelt ausschließlich den Funktionsgraphen. Von den anderen drei Aufgaben wurden zwei der Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* und eine der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* zugeordnet. Aufgabenstellungen sind: die Zuordnung von Funktionsgleichungen zu Funktionsgraphen, die Angabe der Funktionsgleichung und des Funktionsgraphen anhand einer Textangabe sowie die Entscheidung, ob bestimmte Funktionsterme eine direkte Proportionalität erfüllen. Alle Aufgabenstellungen erfordern im Unterschied zu Schulbuchaufgaben nur einzelne, kurze Tätigkeiten. Auch die Aufgabenformate (*Multiple Choice*, Zuordnungsformat) sind für Schulbücher untypisch.

Von den sieben Aufgaben des Inhaltsbereichs *FA 4: Polynomfunktion* wurde eine der Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* und drei der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* zugeordnet. Zum Lösen der Aktionsaufgabe müssen Funktionsgraphen von Polynomfunktionen ihrer Funktionsgleichung zugeordnet werden. Alle Aufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* sind *Multiple-Choice*-Aufgaben, welche - ähnliche wie Aufgabe 6.13 - Eigenschaften von Funktionen durch die Antwortmöglichkeiten explizit hervorheben.

Zum Inhaltsbereich *FA 5: Exponentialfunktion* werden 13 Aufgaben zur Verfügung gestellt. Eine davon behandelt ausschließlich den Funktionsgraphen, acht wurden der Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* zugeordnet. Aufgabenstellung 6.15 zeigt eines dieser Beispiele.

Gegeben ist die Exponentialfunktion f durch die Gleichung $f(x) = 2^x$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie diejenige rationale Zahl x, für die $f(x) = \frac{1}{8}$ gilt!

$x =$ ______________

Abbildung 6.15.: Direkt gelenkte Aktionen, FA 5.2 (*Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)* 2014, S. 168)

Die Aufgabe kann entweder durch Probieren oder durch Freistellen von x gelöst werden (A2). Sie verlangt im Unterschied zu vielen Schulbuchaufgaben nur eine einzelne Aktion. Im Kapitel *Exponential- und Logarithmusfunktionen* befinden sich sehr viele Aufgaben, die der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* zugeordnet wurden. Im Unterschied dazu wurde nur eine der 13 Aufgaben des Inhaltsbereichs *FA 5: Exponentialfunktion* dieser Stufe zugeordnet.

Auch der Großteil der Aufgaben zum Inhaltsbereich *FA 6: Sinusfunktion, Cosinusfunktion* wurde der Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* zugeordnet. Viele Aufgaben fordern das Zeichnen von Graphen anhand ihrer Funktionsgleichung oder die Zuordnung von Graphen zu einer Funktionsgleichung.

Besonders auffallend bei der Verteilung der Grundkompetenzaufgaben auf die Stufen des Modells ist, dass fast keine Aufgaben ein Verständnis auf der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* unterstützen. Stattdessen wurden tendenziell mehr Aufgaben der beiden Stufen *Direkt gelenkte Aktionen* und *Eigenständige Denkobjekte* vorgefunden. Die Aufgaben zu den Grundkompetenzen beziehen sich immer nur auf eine ganz bestimmte Grundkompetenz. Dadurch muss zur Lösung meist nur eine bestimmte kurze Tätigkeit durchgeführt werden. Durch die für klassische Mathematikaufgaben unüblichen Aufgabenformate wie *Multiple Choice*, halboffene Formate, Lückentext oder Zuordnungsformat sind Prozesse oft nicht *selbstgeleitet*, sondern werden *direkt gelenkt*. Vor allem die Antwortmöglichkeiten in *Multiple-Choice*-Aufgaben sprechen oft explizit Eigenschaften von Funktionen an, die meisten Aufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* wurden aus diesem Grund dieser zugeteilt.

Neben den Grundkompetenzaufgaben (Typ-1-Aufgaben) beinhaltet die standardisierte schriftliche Reifeprüfung auch Aufgaben zur Anwendung und Vernetzung von Grundkompetenzen (Typ-2-Aufgaben). Diese sind wesentlich umfangreicher als die Grundkompetenzaufgaben. Bis März 2014 wurden seitens des BIFIE insgesamt 17 Aufgaben, welche zumindest eine Grundkompetenz des Inhaltsbereichs *Funktionale Abhängigkeiten* beinhalten, veröffentlicht. Fünf Aufgaben, welche sich besonders stark auf den Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten* beziehen, wurden im Rahmen dieser Diplomarbeit untersucht. Die vor der Untersuchung angenommene Vermutung, dass die Aufgaben zur Vernetzung von Grundkompetenzen die Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* wesentlich stärker fördern würden, als die Grundkompetenzaufgaben, kann nur zum Teil bestätigt werden.

Es wurden durchaus Teilaufgaben gefunden, welche selbstgeleitete Handlungsketten, wie beispielsweise das selbstständige Aufstellen von Formeln anhand von Textangaben fordern. Aufgabenstellung 6.16 soll dies in beispielhafter Form verdeutlichen.

Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert.

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

Der stündliche Treibstoffverbrauch y des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in Knoten) durch die Gleichung $y = 0{,}00002x^4 + 0{,}6$ beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Formel für die Zeit t (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit x unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion f soll den Weg $f(x)$ beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit x zurücklegen kann. Geben Sie den Term der Funktion f an!

Die Funktion f hat in H (10|7 500) ein Maximum. Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

Abbildung 6.16.: Typ-2-Aufgabe 2_015 „Treibstoffverbrauch“, Selbstgeleitete Prozesse (*Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)* 2014, S. 392-394)

[Lösung: $t(x) = \frac{600}{0{,}00002x^4+0{,}6}$, $f(x) = \frac{600}{0{,}00002x^4+0{,}6} \cdot x$]

Die beiden gesuchten Formeln für $t(x)$ und $f(x)$ sind aus der Sachsituation nicht offensichtlich erkennbar, daher wird die Handlung nicht als einzelne Aktion gewertet (siehe Kapitel 5.1) und der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* zugeordnet. Trotz dieser Zuteilung fällt auf, dass die Aufgabenstellung sehr direkt auf die einzelnen Handlungen hindeutet. Werden die notwendigen Informationen erst einmal erkannt, sind die eigentlichen Tätigkeiten eher kurz. Die Aufgabe fordert ein hohes Textverständnis: Die relativ umfangreiche Angabe muss verstanden und die notwendigen Informationen müssen herausgefiltert und richtig interpretiert werden.

Viele Teilaufgaben sind den Aufgabenstellungen zu den Grundkompetenzen allerdings sehr ähnlich. Teilweise erscheinen Aufgaben zur Vernetzung von Grundkompetenzen wie eine Sammlung von mehreren Grundkompetenzaufgaben, die in einen gemeinsamen Kontext eingebettet sind. Größte Schwierigkeit im Vergleich zu den Grundkompetenzaufgaben scheint das Verständnis der umfangreichen Textangabe zu sein. Aufgabenstellung 6.17 soll dies in beispielhafter Form verdeutlichen.

Abhängig von der Dosis von Giftgasen und der Dauer ihrer Einwirkung kann es zu toxischen Wirkungen bei lebenden Organismen kommen. Diesen Zusammenhang untersuchte der deutsche Chemiker Fritz Haber. Die nach ihm benannte Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit W = konstant) beschreibt den Zusammenhang zwischen toxischen Wirkungen W (in mg · min · L^{-1} oder ppm · min), der Einwirkzeit t (in min) der Verabreichung und der Wirkkonzentration c (in ppm oder mg · L^{-1}) eines Giftstoffes.

Die toxische Wirkung kann eine Erkrankung (beispielsweise Krebs) hervorrufen oder den Tod des diesem Gift ausgesetzten Lebewesens bedeuten. Nicht am Erbgut angreifende Gifte zeigen erst dann eine Wirkung W, wenn eine für das Gift spezifische Konzentration (Schwellenkonzentration e) erreicht wird. Zum Beispiel hat Kohlenmonoxid keinen schädlichen Effekt, wenn seine Konzentration unter einem Wert von 5 ppm liegt. Für Gifte mit einer Schwellenkonzentration e wird die Haber'sche Regel abgewandelt dargestellt: $(c - e) \cdot t = W$ (mit W = konstant).

Aufgabenstellung:

a) Die Haber'sche Regel $c \cdot t = W$ (mit W = konstant) kann als Funktion c in Abhängigkeit von der Variablen t geschrieben werden.

Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

Bei der Funktion c handelt es sich um eine lineare Funktion f vom Typ $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^n + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Polynomfunktion f vom Typ $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine Exponentialfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$.	☐
Bei der Funktion c handelt es sich um eine konstante Funktion f vom Typ $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.	☐

Phosgen ist ein sehr giftiges Gas. Ein Lebewesen wird für eine Zeitdauer von 10 Minuten diesem Giftgas in einer Wirkkonzentration von 0,3 mg/L ausgesetzt. Geben Sie jene Wirkkonzentration in mg/L an, mit der in nur einer Minute die gleiche toxische Wirkung erreicht wird.

Abbildung 6.17.: Typ-2-Aufgabe 2_008 „Haber'sche Regel“, Direkt gelenkte Aktionen und Eigenständige Denkobjekte (*Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)* 2014, S. 366-371)

Aufgrund des großen Umfangs der Aufgabe wird hier nur Aufgabenstellung a) behandelt. Diese gliedert sich in zwei Teilaufgaben. Zur Lösung der ersten muss die Formel $c \cdot t = W$ auf $c = \frac{W}{t}$ umgeformt werden. Die unterschiedlichen Antwortmöglichkeiten erwähnen explizit unterschiedliche Typen von Funktionen (O3). Zur Lösung der zweiten Teilaufgabe muss in die gegebene Formel eingesetzt werden (A1). Auch die Aufgabenstellungen b) - d) sind ähnlich kleinschrittig und wurden den Stufen *Direkt gelenkte Aktionen* bzw. *Eigenständige Denkobjekte* zugeordnet.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Aufgaben zur Vernetzung von Grundkompetenzen zwar eher die Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* fördern als die Aufgaben der Grundkompetenzen, zu großen Teilen aber doch diesen sehr ähnlich sind. Die Typ-2-Aufgaben zeichnen sich nicht etwa durch die Forderung von langen eigenständigen Handlungen aus, sondern eher durch umfangreiche und komplexe Aufgabenstellungen, welche erst einmal erfasst werden müssen. Die Arbeitsaufträge sind jedoch meist in viele kleine Teilaufgaben untergliedert. Gelingt es, die notwendigen Informationen aus der Aufgabenstellung zu filtern, ist die Lösung einer Teilaufgabe meist in greifbarer Nähe und kann oft durch eine einzelne Aktion erreicht werden. Textverständnis scheint im Vordergrund zu stehen.

7. Resümee

Mithilfe unterschiedlicher Fachliteratur wurde im theoretischen Teil erarbeitet, dass abstrakte mathematische Konzepte wie beispielsweise der Funktionsbegriff mit zwei grundlegend unterschiedlichen Sichtweisen erfasst werden können: operationell - Konzepte werden durch Aktionen, Prozesse, Operationen und Handlungen *verwendet* - und strukturell - Konzepte werden als abstrakte, statische Objekte *betrachtet*, ihre Eigenschaften und Beziehungen zu anderen Konzepten *untersucht*.

In einer Analyse mathematischer Aufgaben der Sekundarstufe zum Thema Funktionen wurde untersucht, welche Aufgaben operationelle Konzeptionen und welche strukturelle Konzeptionen des Funktionsbegriffs fördern. Dazu wurde basierend auf zwei theoretischen Modellen (APOS-Theorie, Theorie der Reifikation) ein hierarchisches Modell mit den Stufen *Direkt gelenkte Aktionen*, *Selbstgeleitete Prozesse* und *Eigenständige Denkobjekte*, denen Aufgaben zugeordnet werden können, erstellt.

Im Zuge der Analyse wurden insgesamt 135 Aufgaben zum Funktionsbegriff der Schulbücher „Das ist Mathematik 1-4“ und „Mathematik verstehen 5-6“, sowie 43 Übungsaufgaben zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung des BIFIE (davon 38 Grundkompetenzaufgaben [Typ-1-Aufgaben] und 5 Aufgaben zur Vernetzung von Grundkompetenzen [Typ-2-Aufgaben]) den Stufen des Modells zugeordnet.

Die Einführung algebraischer Schreibweisen mit Variablen ist einer der Grundsteine für funktionale Konzepte. Mit Variablen können zwei unterschiedliche Vorstellungen verbunden werden: die Vorstellung, dass eine Variable für eine ganz bestimmte unbekannte Zahl steht, die beispielsweise durch Umformungen berechnet werden kann und die Vorstellung, dass die Variable gleichzeitig für viele unterschiedliche Zahlen steht. Die zweite Vorstellung ist eng mit funktionalem Denken verknüpft - in die Variable kann eingesetzt werden - allerdings ist sie weiter entfernt von der Arithmetik (die Variable kann nicht mehr einfach als Zahl gedacht werden). Im untersuchten Schulbuch „Das ist Mathematik 1“ werden sofort bei der Einführung der Variable beide Vorstellungen behandelt (vgl. Reichel, Humenberger, Litschauer, Groß und Aue 2011, S. 83). Dies ist auch konform mit dem Lehrplan, der bereits in der 1. Klasse AHS beide Vorstellungen anspricht (vgl. *Lehrplan AHS Unterstufe Mathematik* 2000, S. 5). Historisch betrachtet liegt aber eine Zeitspanne von mehr als 1000 Jahren zwischen dem ersten Einsatz von Buchstaben für unbekannte Zahlen und der Interpretation dieser Buchstaben als Variablen (siehe Kapitel 3.1.2). Auch Sfard und Linchevski (1994, S. 213) lassen in ihrem Artikel anklingen, dass es im Hinblick auf diese historische Entwicklung der Algebra vielleicht sinnvoller wäre, den funktionalen Aspekt anfangs noch auszusparen. Dies würde auch eher der mehrfach beobachteten Entwicklung - von Operationellem zu Strukturellem - entsprechen. Eine empirische Untersuchung, welche dieser Überlegung nachgeht, wäre durchaus sinnvoll. Je nach Ausgang müssten dann auch bei der nächsten Gestaltung des Lehrplans die Konsequenzen daraus gezogen werden.

Fazit: Theoretische Recherchen deuten darauf hin, dass es vielleicht sinnvoll wäre, funktionale Aspekte des Konzeptes der Variable anfangs auszusparen. Weitere Untersuchungen dieser Überlegung scheinen durchaus sinnvoll.

Im ersten Teil der Analyse (Kapitel 6.1) wurde die Verteilung der Schulbuchaufgaben (1.-6. Klasse AHS) auf die drei Stufen des Modells, abhängig von den Teilgebieten des Themas Funktionen, untersucht. Gerade bei Aufgaben, die sich mit algebraischen Darstellungen der Funktion auseinandersetzen, konnte eine klare Entwicklung von der Stufe *Direkt gelenkte Aktionen* über die Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* zur Stufe *Eigenständige Denkobjekte* beobachtet werden. Die meisten Aufgaben in den ersten drei Klassen fördern ein Verständnis des Funktionsbegriffs auf der Stufe *Direkt gelenkte Aktionen*. Ein Wechsel erfolgt in der vierten Klasse, in der fünften Klasse überwiegen bereits Aufgaben, die eine Auffassung des Funktionsbegriffs auf der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* begünstigen. In der sechsten Klasse fördern schließlich einige Aufgaben die Sichtweise *Eigenständiger Denkobjekte*. Die im theoretischen Teil beschriebene Entwicklung von operationellen zu strukturellen Konzeptionen trifft also für algebraische Aspekte des Funktionsbegriffs zu, oder umgekehrt betrachtet: In österreichischen Schulbüchern wird die von Lehr-Lern-Forschern geforderte Konzeptentwicklung in Grundzügen umgesetzt.

Fazit: In Grundzügen unterstützen österreichische Schulbücher durch ihren Aufbau eine Entwicklung algebraischer Darstellungen des Konzeptes Funktion von *Direkt gelenkten Aktionen* über *Selbstgeleitete Prozesse* zu *Eigenständigen Denkobjekten*.

Bei Aufgaben, welche vorrangig die Darstellung von Funktionen durch ihre Graphen behandeln, fördern teilweise bereits einführende Beispiele Vorstellungen der Stufe *Eigenständige Denkobjekte*. Dies widerspricht der Hierarchie des Modells; auf grafische Konzepte wie den Funktionsgraphen trifft dieses nur teilweise zu. Der Funktionsgraph ist durch die frühe, selbstverständliche Behandlung als Objekt ein mächtiges Werkzeug zur Unterstützung struktureller Konzeptionen des Funktionsbegriffs. Es ergibt sich aber auch die naheliegende Vermutung, dass Schüler unter dem Ding „Funktion“ (Was *ist* eine Funktion?) oft den Funktionsgraphen und nicht etwa algebraische Darstellungen wie die Funktionsgleichung verstehen.

Fazit: Der Funktionsgraph ist ein wichtiges Werkzeug zur Unterstützung struktureller Konzeptionen.

Insgesamt entfallen knapp 40% aller Funktionsaufgaben der untersuchten Schulbücher auf die beiden Teilgebiete *Lineare Funktionen* und *Exponential- und Logarithmusfunktionen*. Aufgaben aus diesen Kapiteln wurden mit wenigen Ausnahmen den Stufen *Direkt gelenkte Aktionen* und *Selbstgeleitete Prozesse* zugeordnet. In der sechsten Klasse gibt es Teilgebiete, deren Aufgaben hauptsächlich der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* zugeordnet wurden. Allerdings beinhalten diese Kapitel insgesamt sehr wenige Aufgaben. In der Fachliteratur wird mehrfach betont, dass das Erreichen struktureller Ansätze mit großen Schwierigkeiten verbunden ist (vgl. z. B. Sfard 1991, 1 od. Arnon u. a. 2014, S. 22; siehe Kapitel 3.2). Es bleibt zu befürchten, dass Teilgebieten, welche viele strukturelle Aufgaben enthalten, im Unterricht oft zu wenig Beachtung geschenkt wird und dass das so wichtige Verständnis des Funktionsbegriffs als *Eigenständiges Denkobjekt* bei vielen Lernenden deshalb ausbleibt.

Fazit: Die beiden Themenbereiche *Lineare Funktionen* und *Exponential- und Logarithmusfunktionen* beinhalten fast 40% aller Schulbuchaufgaben zum Funktionsbegriff. Sie unterstützen die Stufe *Eigenständige Denkobjekte* allerdings kaum. Im Unterschied dazu unterstützen Vorbereitungsaufgaben zur Zentralmatura der zugehörigen Inhaltsbereiche *FA2: Lineare Funktion* und *FA 5: Exponentialfunktion* die Stufe *Eigenständige Denkobjekte*.

Im zweiten Teil der Analyse (Kapitel 6.2) wurden Funktionsaufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* aus Schulbüchern gezielt untersucht und kategorisiert. Aufgaben, die sich ausschließlich mit dem Teilkonzept des *Funktionsgraphen* auseinandersetzen, wurden nicht berücksichtigt. Es wurden Charakteristiken erarbeitet, welche die Aufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* auszeichnen. Folgende Arten von Aufgaben werden unterschieden:

- Aufgaben, welche sich direkt auf die Funktionsdefinition beziehen oder sich explizit mit dem allgemeinen Funktionsbegriff auseinandersetzen.
- Aufgaben, welche explizit die Auseinandersetzung mit Eigenschaften von Funktionen fordern, die exakten Definitionen dieser Eigenschaften sind zur Lösung oft von Bedeutung.
- Aufgaben, welche explizit mehrere unterschiedliche Darstellungen einer Funktion fordern.
- Aufgaben, welche sich explizit mit Typen von Funktionen auseinandersetzen.
- Aufgaben, die einen mathematischen Beweis fordern.
- Aufgaben, welche die Verkettung von Funktionen behandeln.

Aufgaben der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* sind größtenteils innermathematische Aufgaben. Im Zentrum der Betrachtungen stehen der Funktionsbegriff, Vertreter der Funktion, Darstellungen der Funktion oder Eigenschaften dieser. Das legt den Schluss nahe: Sollen Aufgaben Lernenden den Funktionsbegriff strukturell vermitteln, so sollte die Funktion das zentrale Objekt der Aufgabenstellungen sein und nicht nur ein Hilfsmittel zur Lösung anwendungsorientierter Problemstellungen. Innermathematische Aufgaben sind für das Erreichen der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* essenziell.

Fazit: Die Stufe *Eigenständige Denkobjekte* wird beinahe ausschließlich von innermathematischen Aufgaben unterstützt.

Im dritten Teil der Analyse (Kapitel 6.3) wurden Übungsaufgaben des BIFIE zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in das Modell eingeordnet. Im Vergleich mit den Schulbuchaufgaben fiel vor allem bei den Aufgaben zu den Grundkompetenzen (Typ-1-Aufgaben) auf, dass ausgesprochen wenige dieser Aufgaben ein Verständnis auf der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* unterstützen. Aufgrund der Beschränkung dieser Aufgaben auf einzelne Grundkompetenzen, muss zur Lösung meist nur eine bestimmte kurze Tätigkeit durchgeführt werden. Durch für klassische Mathematikaufgaben unübliche Aufgabenformate wie *Multiple Choice*, halboffene Formate, Lückentexte oder Zuordnungsformate, die bei der Bearbeitung der Aufgabe wenig Spielraum lassen, sind Handlungen oft nicht *selbstgeleitet*, sondern werden durch die Aufgabenstellung *direkt gelenkt*.

Fazit: Die Stufe *Selbstgeleitete Prozesse* wird von Typ-1-Übungsaufgaben der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung kaum unterstützt.

Aufgaben des Formats *Multiple Choice* heben durch die Formulierung der Antwortmöglichkeiten besonders häufig explizit Eigenschaften von Funktionen hervor und werden damit der Stufe *Eigenständige Denkobjekte* zugeordnet. Ob dieses und ähnliche Aufgabenformate die Entwicklung struktureller Ansätze tatsächlich begünstigen, könnte Fragestellung einer empirischen Untersuchung sein.

Fazit: Die Verständnisstufe einer Aufgabe wird von der Wahl des Aufgabenformats beeinflusst. Multiple-Choice-Aufgaben unterstützen besonders häufig die Stufe *Eigenständige Denkobjekte*.

Übungsaufgaben zur Anwendung und Vernetzung von Grundkompetenzen der Zentralmatura (Typ-2-Aufgaben) sind wesentlich umfangreicher als die Grundkompetenzaufgaben und fördern - den untersuchten Aufgaben zufolge - etwas eher ein Verständnis auf der Stufe *Selbstgeleitete Prozesse*. Wider Erwarten konnte bei den untersuchten Typ-2-Aufgaben aber festgestellt werden, dass meist ähnlich kurze Handlungsschritte gefordert werden wie in den Grundkompetenzaufgaben. Typ-2-Aufgaben zeichnen sich nicht etwa durch die Forderung von langen eigenständigen Handlungen aus, sondern eher durch umfangreiche und komplexe Aufgabenstellungen, welche erst einmal erfasst werden müssen. Die Arbeitsaufträge sind jedoch - teils wie eine Sammlung von Grundkompetenzaufgaben - in viele kleine Teilaufgaben untergliedert. Gelingt es, die notwendigen Informationen aus der Aufgabenstellung zu filtern, ist die Lösung einer Teilaufgabe meist in greifbarer Nähe und kann oft durch eine einzelne Aktion erreicht werden. Gefordert wird vor allem ein hohes Textverständnis.

Fazit: Arbeitsaufträge von Typ-2-Aufgaben sind ähnlich kleinschrittig wie die von Typ-1-Aufgaben und können oft durch einzelne Handlungen gelöst werden. Im Vergleich zu Grundkompetenzaufgaben scheint die größte Schwierigkeit oft die richtige Interpretation umfangreicher Angabetexte zu sein.

Literatur

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., and Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., and Thomas, K. (1996). "A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education". In: *CBMS Issues in Mathematics Education* 6: *Reseach in Collegiate Mathematics Education. II*, pp. 1–32.

Beth, E. W. and Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht: Reidel.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York, London, and Sydney: John Wiley & Sons.

Burnett-Bradshaw, C. (2007). "From Functions as Process to Functions as Object: A Review of Reification and Encapsulation". PhD thesis. Tufts University.

Čap, A. (2010). „Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie". Universität Wien. URL: `http://www.mat.univie.ac.at/~cap/files/Linalg.pdf`.

Cardano, G. (1968). *Ars Magna or the Rules of Algebra*. New York: Dover Publications.

Davis, R. B. (1990). *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. 3rd ed. Norwood: Ablex Publishing Corporation.

Dienes, Z. P. (1965). *Aufbau der Mathematik*. Freiburg, Basel und Wien: Herder.

Dubinsky, E. (1984). "The Cognitive Effect of Computer Experiences on Learning Abstract Mathematical Concepts". In: *Korkeakoulujen Atk-Uutiset* 2, pp. 41–47.

Dubinsky, E., Arnon, I., and Weller, K. (2013). "Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of $0.\overline{9}$ and 1". In: *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 13.3, pp. 232–258.

Fischer, R. (1996). „Heinrich Bürger und die wissenschaftliche Mathematikdidaktik". In: *Fragen zum Mathematikunterricht. Festschrift zum 70ten Geburtstag von Heinrich Bürger*. Hrsg. von G. Malle und H.-C. Reichel. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, S. 9–18.

Gaidoschik, M. (2010). „Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres". Diss. Universität Wien.

– (2012). *Viele Wege führen über den Zehner! Einige Anregungen zur Behandlung von Aufgaben mit Zehnerübergang im ersten Schuljahr*. URL: `http://www.recheninstitut.at/wp-content/uploads/2012/04/Zehner%C3%83%C2%BCbergang.pdf` (besucht am 09. 01. 2015).

Gray, E. M. and Tall, D. (1994a). *Duality, Ambiguity and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic*. URL: `http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994a-gray-jrme.pdf` (visited on 11/02/2014).

Gray, E. M. and Tall, D. (1994b). “Duality, Ambiguity and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic”. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 25.2, pp. 116–140.

Gray, E. M. (1991). “An Analysis of Diverging Approaches to Simple Arithmetic: Preference and Its Consequences”. In: *Educational Studies in Mathematics* 22.6, pp. 551–574.

Greeno, J. G. (1983). “Conceptual Entities”. In: *Mental Models*. Ed. by A. L. S. Dedre Genter. Hillsdale, London: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 227–252.

Halmos, P. R. (1985). “Pure Thought Is Better Yet”. In: *The College Mathematics Journal* 16.1, pp. 14–16.

Harel, G. and Kaput, J. (1991). “The Role of Conceptual Entities and Their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts”. In: *Advanced Mathematical Thinking*. Ed. by D. Tall. Vol. 11. Mathematics Education Library. Springer Netherlands, pp. 82–94.

Heath Sir, T. (1921). *A history of Greek mathematics*. Oxford: The Clarendon press.

Hiebert, J. (1988). “A Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols”. In: *Educational Studies in Mathematics* 19.3, pp. 333–355.

Hiebert, J. and Lefevre, P. (1986). “Conceptual and Procedural Knowledge in mathematics: An introductory Analysis”. In: *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Ed. by J. Hiebert. Hillsdale: Taylor & Francis, pp. 1–22.

Jourdain, P. E. B. (1913). *The nature of mathematics*. London and New York: T. C. & E. C. Jack and Dodge Pub. Co.

Kieran, C. (1981). “Concepts associated with the equality symbol”. In: *Educational Studies in Mathematics* 12.3, pp. 317–326.

Lehrplan AHS Unterstufe Mathematik (2000). URL: `https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2` (besucht am 02. 11. 2014).

Leitch, D. G. (2011). “Vygotsky, Consciousness, and the German Psycholinguistic Tradition”. In: *Mind, Culture, and Activity* 18.4, pp. 305–318.

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. und Ulovec, A. (2010a). *Mathematik verstehen 5*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

– (2010b). *Mathematik verstehen 6*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

Maurer, S. B. (1985). “The Algorithmic Way of Life Is Best”. In: *The College Mathematics Journal* 16.1, pp. 2–5.

Pepin, B. and Haggarty, L. (2001). “Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures”. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 33.5, pp. 158–175.

Piaget, J. und Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Piaget, J. (1971). *Genetic epistemology*. New York: W.W. Norton & Co.

Poincaré, H. (1914). *Science and method*. London, Edinburgh, Dublin and New York: Thomas Nelson and Sons.

Prechtl, P. und Burkard, F.-P., Hrsg. (1999). *Metzler Philosophie Lexikon: Begriffe und Definitionen*. 2. Aufl. Stuttgart und Weimar: J.B. Metzler.

Rehfus, W. D., Hrsg. (2003). *Handwörterbuch Philosophie*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Reichel, H.-C., Humenberger, H., Litschauer, D., Groß, H. und Aue, V. (2008). *Das ist Mathematik 2: Ausgabe für Lehrerinnen und Lehrer*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

– (2011). *Das ist Mathematik 1*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

Reichel, H.-C., Humenberger, H., Litschauer, D., Groß, H., Aue, V. und Neuwirth, E. (2012a). *Das ist Mathematik 3*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

– (2012b). *Das ist Mathematik 4*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

Schneeberger, M. (2009). *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog. Der Erwerb von Mathematisierkompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Sfard, A. (1991). "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin". In: *Educational Studies in Mathematics* 22.1, pp. 1–36.

– (1992). "Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function". In: *MAA Notes* 25. Ed. by G. Harel and E. Dubinsky, pp. 59–84.

– (1995). "The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives". In: *Journal of Mathematical Behavior* 14, pp. 15–39.

– (2008). *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

– (2012). "Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research". In: *International Journal of Educational Research* 51-52, pp. 1–9.

Sfard, A. and Linchevski, L. (1994). "The gains and the pitfalls of reification — The case of algebra". In: *Educational Studies in Mathematics* 26.2-3, pp. 191–228.

Siller, H.-S., Aue, V., Frebort, M., Hohenwarter, M., Liebscher, M., Sattlberger, E., Schirmer, I., Vormayr, G., Weiß, M. und Willau, E. (2013). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: März 2013)*. URL: `https://www.bifie.at/node/1442` (besucht am 13. 12. 2014).

Simmons, G. F. (1987). *Precalculus mathematics in a nutshell: geometry, algebra, trigonometry*. Providence: Janson Publications.

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics*. 2nd ed. Bungay: Penguin Books.

– (2006). "Relational Understanding and Instrumental Understanding". In: *Mathematics Teaching In The Middle School* 12.2, pp. 88–95.

Stein, S. K. (1987). "Gresham's Law: Algorithm Drives out Thought". In: *For the Learning of Mathematics* 7.2, pp. 2–4.

Steiner, H.-G. (1978). "Einleitung: Entwicklung der Didaktik der Mathematik". In: *Didaktik der Mathematik*. Ed. by H.-G. Steiner. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, pp. IX–XLI.

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History*. 3rd ed. New York et al.: Springer.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the Three Worlds of Mathematics.* New York: Cambridge University Press.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., and Simpson, A. (1999). "What Is the Object of the Encapsulation of a Process?" In: *Journal of Mathematical Behavior* 18.2, pp. 223–241.

Thurston, W. P. (1990). "Mathematical Education". In: *Notices of the American Mathematical Society* 37.7, pp. 844–850.

Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS) (2014). URL: https://www.bifie.at/node/2681 (besucht am 13. 12. 2014).

Veer, R. van der (1996). "The Concept of Culture in Vygotsky's Thinking". In: *Culture & Psychology* 2.3, pp. 247–263.

Weller, K., Arnon, I., and Dubinsky, E. (2009). "Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion". In: *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 9.1, pp. 5–28.

– (2011). "Preservice Teachers' Understandings of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion: Strength and Stability of Belief". In: *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 11.2, pp. 129–159.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Vor- und Nachname:	Valentin Parzer
Geburtsort und -datum:	Schärding, 07. April 1989
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Familienstand:	ledig

Ausbildung

1995 - 1999	Volksschule in Brunnenthal
1999 - 2003	Gymnasium in Schärding
2003 - 2008	HTL in Grieskirchen, Fachrichtung EDV und Organisation, 6. Juni 2008 mit Auszeichnung maturiert
Seit Oktober 2009	Diplomstudium der Unterrichtsfächer Mathematik und Physik an der Universität Wien

Berufliche Tätigkeiten

August 2008 - April 2009	Zivildienst Lebenshilfe Münzkirchen
WS 2011/12 - WS 2013/14	Tutor zur LV „Übungen zur Physik für Ernährungswissenschaften“ an der Universität Wien
SS 2013	Tutor zur LV „Übungen zu Theoretischer Physik für das Lehramt L1“ an der Universität Wien
WS 2013/14 - WS 2014/15	Tutor zu diversen Übungen der Schulmathematik an der Universität Wien