DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Entdeckendes Lernen“

Ausgewählte Aufgaben zur Aufhebung von Fehlschlüssen und –vorstellungen im Mathematikunterricht

verfasst von / submitted by

Tatjana Katalenić

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 353
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Spanisch
Betreut von / Supervisor:	Doz. Dr. Franz Embacher

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, Juni 2016 Unterschrift

Abstract

The present diploma thesis focuses on explorative learning and how it can be applied in the teaching of modern mathematics. It is divided into two parts, the first one explores pertinent theoretical concerns, while the second part approaches explorative learning through practical applications.

The first section reviews different definitions of explorative learning as well as the advantages and disadvantages of this methodology and how it can be used in mathematical school education. The main part of the thesis provides specific examples in order to illustrate the practical use of the theory within an educational setting. The examples are all devised following the same sequence: firstly, an explanation of the mathematical background is provided, secondly, ideas and suggestions of application in school contexts are given, and finally, specific competences that are practiced with each individual example are stated.

The appendix contains work sheets designed in addition to the examples.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Mathematik spielt in der heutigen Welt eine immer wichtigere Rolle. Die zunehmende Technologisierung unserer Umwelt stellt auch unser Bildungssystem vor neue Herausforderungen. Faktenwissen spielt eine zunehmend nebensächliche Rolle, während abstrakte Problemstellungen und analytisches Denken eine immer höhere Priorität erhalten. Gleichzeitig sind die Köpfe unserer SuS voll von Fehlvorstellungen, die aufgrund zu vieler unverarbeiteter Informationen oder fehlender Recherchen dahin gelangen.

Im Rahmen dieser Arbeit möchte ich anhand einiger ausgewählter Beispiele solche Fehlvorstellungen ansprechen und eine mögliche Lösung geben, wie sie bei SuS aufgehoben werden können. Dazu lege ich besonderen Fokus auf die Methode des entdeckenden Lernens, bei der die Neugier und das Interesse der SuS sie selbst zum Kern der Probleme und schließlich auch zur Lösung führen sollen.

Das erste Kapitel behandelt ausführlich das entdeckende Lernen. Es wird versucht, den Begriff zu fassen, indem mehrere Definitionen verschiedener PädagogInnen angeführt werden. Die Vorteile, Kritikpunkte und die Einbindung dieser Methode in den Unterricht werden im Anschluss diskutiert. Am Ende gibt es noch eine kurz gefasste Erläuterung des Begriffes der Fehlvorstellung.

Das zweite Kapitel umfasst in großen Umfang die Beispiele, mit denen im Unterricht gearbeitet werden könnte. Jedes Beispiel wird erst mathematisch ausgearbeitet, mit Erklärungen bzw. Beweisen. Anschließend folgt bei jeder Aufgabe eine Ausarbeitung für den Unterricht mit Vorschlägen, wie Unterrichtseinheiten mit diesen Beispielen als Inhalt gehalten werden könnten. Jeder Aufgabe werden Lehr- und Lernziele beigefügt, genauso wie der Bezug der Aufgabe zum entdeckenden Lernen und einer Reflexion, warum es sinnvoll ist, diese Methode einzusetzen.
Die Beispiele sind vor allem alltägliche Probleme, die aus verschiedenen Be-

reichen der Mathematik zusammengetragen wurden, wobei ein Schwerpunkt auf der Ausarbeitung verschiedener stochastischer Paradoxa liegt.

Gestützt ist die Arbeit in erster Linie auf Werke von Christian Hesse, wie seine Bücher *Achtung Denkfalle! - Die erstaunlichsten Alltagsirrtümer und wie man sie durchschaut* und *Warum Mathematik glücklich macht*, aus denen ich die Ideen für die Beispiele zusammengetragen habe. Für didaktische Unterstützung zum entdeckenden Lernen dienten vor allem Heinz Nebers Werk *Entdeckendes Lernen* und Heinrich Winters *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht - Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Ute Zochers *Entdeckendes Lernen lernen* und Karin Ernsts Artikel *Lernen mit Sinn und Verstand* waren wichtige Quellen für aktuellere Forschungsergebnisse auf dem Gebiet.

Meine Arbeit erforscht nicht, ob entdeckendes Lernen die beste Methode ist, um Fehlvorstellungen vorzubeugen und es wurden demnach auch keine Versuche mit SuS durchgeführt. Viel mehr geht es darum, die ausgewählten Beispiele auszuarbeiten und aufzuzeigen, wie man SuS ihre falschen Annahmen bzw. Paradoxa selbst entdecken lassen kann und wie danach mit diesen Ergebnissen und Entdeckungen gearbeitet bzw. darauf aufgebaut werden könnte.

2 Entdeckendes Lernen

2.1 Begriffsbestimmung

Entdeckendes Lernen ist ein sehr breit gefächertes Thema, in dem schon viele Forschungen stattgefunden haben. Es gibt sehr verschiedene Ansichten über die Sinnhaftigkeit eines solchen Lehrens und Lernens, die vor allem auf verschiedenen Forschungsergebnissen beruhen. Nach wie vor ist man sich uneinig, wie entdeckendes Lernen überhaupt zu definieren ist bzw. wie es bei den Lernenden überhaupt funktioniert. In diesem Kapitel möchte ich verschiedene Ansätze diskutieren, Vor- und Nachteile nennen und auch einige Forschungsergebnisse wiedergeben.

Ich beginne mit Heinz Neber, der im Buch *Entdeckendes Lernen* bereits in der Einleitung eine eigene Definition von entdeckendem Lernen gibt. Er schreibt: „Die Lernenden sollen ihr Wissen durch eigene Aktivität aufbauen, Fakten und Zusammenhänge selbständig suchen und ihre Lernvoraussetzungen zur Erweiterung ihrer Kenntnisse produktiv einsetzen – das heißt dann entdeckendes Lernen.“(Neber 1973, S. 7)
Gleich mit dem nächsten Satz beginnt er aber auch eine Aufzählung, warum ein solches Lernen in einer Schulklasse nicht stattfinden kann. Dazu kommen wir etwas später, erst einmal wollen wir herausfinden, wie andere Pädagogen den Begriff der Entdeckung und des entdeckenden Lernen definieren und charakterisieren.

Jerome S. Bruner arbeitet in dem Artikel *Akt der Entdeckung*[1] vor allem den Begriff der Entdeckung heraus. So schreibt er, er „beschränke Entdeckung nicht auf den Akt, durch den man etwas herausfindet, das der Menschheit vorher unbekannt war, sondern schließe fast alle Formen des Wissenserwerbs mit Hilfe des eigenen Verstandes ein.“

[1] In Neber 1973: Entnommen aus Harvard Educational Review, 1961, 31, S. 21-32 (übersetzt von H.Neber und N.Thol)

Welche Konsequenzen hat das nun für den Akt der Entdeckung?
Bruner schreibt: „Entdeckung wie auch Überraschung fallen eher dem wohlvorbereiteten Verstand zu.“ Entdeckungen werden selten komplett eigenständig und ohne jegliche Vorbereitung gemacht. Meistens gibt es bereits wegweisende Hypothesen oder gewisses Vorwissen, die zu neuen Errungenschaften führen. Ein Beispiel dafür ist ein Blatt beim Bridge-Spiel. Man ist überrascht, wenn das Blatt zum Beispiel keine Bilder enthält, obwohl man weiß, dass jedes Blatt mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt. „Man muss Bescheid wissen, um überrascht zu sein. So auch bei der Entdeckung.“ Laut Bruner ist es egal, ob ein Wissenschaftler etwas Neues in seinem Forschungsgebiet entdeckt, oder ob ein Schulkind etwas Neues im Unterricht entdeckt – der Prozess ist derselbe. Entdeckung ist nämlich nicht nur, auf bisher Unbekanntes zu stoßen, sondern vielmehr „ein Fall des Neuordnens oder Transformierens des Gegebenen.“ Das Neuordnen und Transformieren bietet dann Gelegenheit, über das Gegebene hinauszublicken und so auf Neues zu stoßen bzw. alte Gegebenheiten zu neuen zu kombinieren. (vgl. Neber 1973 nach Bruner 1961, S. 16)

Was das für die Schule und den Akt des „Selbst-Herausfindes im Unterricht“ bedeutet, beschreibt Bruner auch. Er definiert vor allem die Aufgabe der Lehrperson dabei, die wäre „dem Schüler nach besten Kräften ein fundiertes Verständnis des Gegenstandes zu vermitteln und ihn so gut [es geht] zu einem so selbständigen und spontanen Denker zu machen, dass er am Ende der Schulzeit allein weiterkommen wird.“(vgl Neber 1973, S. 17)

In *Die reiflichen Überlegungen eines Psychologen zu Begriffen, Neugier und Entdeckung beim Lehren und Lernen*[2] bemerkt Bernard Z. Friedlander, dass Bruners Definition von entdeckendem Lernen als Neuordnung und Transformation auch andere Aussagen mit einschließt. Dazu nennt er zwei Beispiele. Das erste ist eine Aussage von Dewey, in der er bekräftigt, dass „Erfahrungen des Schülers mit dem zu lernenden Ausgangsmaterial Fakten erge-

[2]in Neber 1973: Entnommen aus Harvard Educational Review, 1965, 35, 18-38; (übersetzt von H.Neber und N.Thol)

ben, von denen aus er dann zur Entdeckung neuer Gedanken fortschreiten kann“, das zweite Beispiel kommt von Wertheimer, der meint, dass „die Produktivität des Denkens und Lernens den Wahrnehmungsfunktionen des Gruppierens, Zentrierens und Umorganisierens der gegebenen Eigenschaften einer Problemlösesituation zu verdanken ist“. (Neber 1973 nach Bernard Z. Friedlander 1965)

Zum Schluss seiner Abhandlung stellt Bruner folgende Hypothese auf, die seinerzeit (1966) noch nicht bewiesen worden war, weil keine Schulversuche dazu durchgeführt wurden. Die Hypothese lautete, dass bei der Betonung des Entdeckens im Lernprozess eigentlich ein Prozess der Konstruktion angesprochen würde. Die Umgebung sei für SuS oft so organisiert, dass sie genau das antreffen, was es zu entdecken gilt. Die SuS werden zur Lösung hingeführt mit Hinweisen, die es nicht erlauben, vom vorgesehenen Pfad abzukommen und das Gewünschte nicht zu erkennen. Für Bruner ist die Entdeckung eine notwendige Bedingung, um die Vielfalt der Problemlösetechniken zum Transformieren von Informationen zu erlernen.“(vgl. Neber 1973 nach Bruner 1961, S. 20)

M.C.Wittrock hat sich in *Die Hypothese vom Lernen durch Entdeckung*[3] auch mit dem entdeckenden Lernen auseinandergesetzt. Er schreibt, dass „Lernen durch Entdeckung sowohl eine Methode des Lernens als auch ein Ziel des Lernens bezeichnet.“
Betrachtet man entdeckendes Lernen als Methode, so kann diese Methode sich darauf beziehen, wie die Lehrperson verbale Reize einsetzt und was die SuS mit ihnen anfangen. Es kommt dabei auf die Sequenz und auch Art und Zusammensetzung dieser Reize an. Will man zum Beispiel, dass die SuS spezifische Assoziationen lernen, sind gelenktere Verfahren besser. Will man hingegen hierarchisch geordnete Lerninhalte in die Köpfe der SuS bringen, kann die entdeckende Methode erfolgreicher sein.

[3]in Neber 1973: Entnommen aus M.C. Wittrock, The learning by discovery hypothesis, in L.S. Shulman & E.R. Kaiser (Eds.), Learning by discovery, Chicago, 1966, S. 73-74; (übersetzt von H.Neber und N.Thol)

Sieht man das entdeckende Lernen als Lernziel, muss man sich fragen, ob Übung dabei eine wichtige Rolle spielt. Wittrock meint, dass vielleicht schon eine Erklärung und eine darauf folgende Übung für das Entdecken besser sein könnte, als die immer gleichen Beispiele einzuüben. Allerdings betont er, dass es dazu keine Forschungsergebnisse gibt (1966), die diese Hypothese stützen. Er stimmt in allen Inhalten Bruner zu und bekräftigt, dass es wesentlich wäre, die Hypothesen in Schulen zu überprüfen und Forschungen dazu anzustellen. (Neber 1973 nach Wittrock 1966, S. 70-71)

Robert M. Gagné hat den Fokus in seinem Artikel *Arten des Lernes und der Begriff der Entdeckung*[4] auch auf den Begriff der Entdeckung gelegt, denn ein Begriff könne nur dann wissenschaftlich brauchbar sein, wenn nach seinen Bedeutungen gesucht wurde. So beginnt er seine Abhandlung damit, den Begriff selbst zu definieren, nämlich als Konstrukt, das möglichst in Form beobachtbarer Ereignisse auftritt. (Neber 1973, S.127)

Aktuellere Forschungsergebnisse

Auch in späteren Unterrichtsforschungen ist das entdeckende Lernen immer noch ein großes Thema. Bei den Bildungsreformen in England und den USA während der 90er Jahre wurde versucht, viel mehr entdeckendes und eigenständiges Lernen der SuS ins Curriculum zu bringen. Karin Ernst, beschreibt 1998 in einem Artikel, dass in Schulversuchen, Forschungsprojekten und Kommisionsarbeiten vor allem in den USA versucht worden sei, die Ideen der Bildungsreformer der 60er Jahre in die Curricula der Schule mit einfließen zu lassen. (vgl. Ernst 1998, S. 4-5)

In den USA merkte man in den späten 80er Jahren, dass das konforme, traditionelle Lernen nicht zu gewünschter Belebung der Wirtschaft und der daraus resultierenden wirtschaftlichen Sicherheit führte, sondern dass sich damit nichts veränderte. So entstand ein Umdenken, dass vielleicht Unterricht, der auf mehr Offenheit, Kreativität und Förderung des Verstehens ausgelegt ist, bessere Einflüsse auf die wirtschaftlichen Erfolge und Ent-

[4]in Neber 1973: Entnommen aus Shulman, L. und Keislar, E. (eds.), Learning by discovery, Chicago, 1966, S. 135-150; (übersetzt von H.Neber und N.Thol)

wicklungen haben könnte. Damit wurde der Weg für Bildungsreformen geebnet. Karin Ernst zählt mehrere Projekte auf, die dazu beitragen, ein neues Verständnis von Lernen zu erreichen. Das größte davon ist „Inquiry“ in Zuge dessen 1995 die „National Science Education Standards“ herausgebracht wurden. Das Projekt hatte entdeckend-konstruktives Lernen als Kern des naturwissenschaftlichen Unterrichts vom Kindergarten bis zum Schulabschluss geplant und diese Ideen dementsprechend auch in den Standards verwirklicht. (vgl. Ernst 1998, S. 5)
Auch in England wurde bereits in den 80er Jahren klar, dass Kindern nach dem Grundschulabschluss gewisse Kompetenzen fehlten, um sich mit Naturwissenschaften angemessen auseinandersetzen zu können. Wynne Harlen, Pädagogin und Forscherin auf diesem Gebiet, hatte bei diesen Untersuchungen mitgearbeitet und engagierte sich danach dafür, dass qualitatives entdeckendes Lernen in den Schulen ermöglicht wird. Sie arbeitete gemeinsam mit einem großen Forschungsteam ein eigenes Curriculum aus unter dem Titel „Science Processes and Concept Exploration (SPACE)“. Das Curriculum stützte sich auf umfangreiche Studien im Rahmen des Schulunterrichts, in denen auf Vorstellungen der SuS eingegangen wurde und daraus erforscht wurde, wie diese Vorstellungen zu wissenschaftlich angemessener Denkweise erweitert werden können. Außerdem wurden Methoden entwickelt, wie Lehrpersonen die Kinder beim entdeckenden Lernen am besten unterstützen können. (vgl. Ernst 1998, S. 8-9)
In den verschiedenen Projekten und Curricula der USA und Englands finden sich viele Elemente entdeckenden Lernens. Unter anderem, dass Lernen als Kontruktion von Erkenntnis betrachtet wird (Bruners Ansatz), und dass der Fokus mehr auf Verstehen und Bilden von Sachzusammenhängen liegt, als auf bloßer Speicherung von Fakten. (vgl. Ernst 1998, S. 7) Viele neue Forschungsergebnisse (1990er Jahre) berufen sich bei Publikationen zu entdeckendem Lernen auf Ergebnisse aus der Kognitionsforschung und konstruktivistische Lerntheorien. (vgl. Ernst 1998, S. 9)

2.2 Vorteile

So wie über den Begriff der Entdeckung Uneinigkeit herrscht, gehen auch die Meinungen über Vor- und Nachteile von entdeckendem Lernen auseinander. Was die einen als Vorteil sehen, ist für die anderen ein Nachteil und umgekehrt. Welche Argumente genau genannt werden, möchten wir uns nun ansehen.

Jerome S. Bruner nennt vier für ihn gleich wichtige Punkte, die er als klare Vorteile deklariert: (Neber 1973, S. 17)

1. der Zuwachs an intellektueller Potenz
2. der Übergang von extrinsischen zu intrinsischen Belohnungen
3. das Erlernen der heuristischen Methoden des Entdeckens
4. die Hilfe für die Verarbeitung im Gedächtnis

Zum Übergang von extrinsischer zu intrinsischer Belohnung und Motivation stellt er erneut eine Hypothese auf: „Soweit es Lernen als eine Aufgabe angehen kann, bei der man etwas entdeckt, statt etwas darüber zu lernen, wird das Kind dazu neigen, seine Lernaktivität mit autonomer Selbstbelohnung durchzuführen; genauer gesagt, mit der Belohnung der Entdeckung selbst.“ Er beschreibt, dass das Lernen, das als Reaktion auf die Belohnung durch Eltern oder LuL oder zur Vermeidung von Misserfolgen beginnt, schnell zu Plänen führt, wie man sich an die Umwelt und die Erfordernisse anpasst, ohne sich wirklich mit der Materie zu beschäftigen. Das führt dazu, dass die Kinder eher wiedergeben können, als Dinge so zu formulieren, dass auch sie selbst es verstehen können. (vgl. Neber 1973, S. 21) Wenn das Kind selbständig arbeitet und entdeckend lernt, kann es Erfolge und Misserfolge auch als Information und nicht nur als Belohnung oder Bestrafung betrachten. Es muss demnach nicht den Forderungen der Institution Schule oder seiner Umwelt nachkommen, sondern setzt sich eigene Ziele, bei Erfolgen ist es auf dem richtigen Weg und bei Misserfolgen auf dem falschen. Das führt dazu, dass das Kind einen aktiveren Umgang mit seiner Umwelt pflegt und seine Befriedigungen aus den Lösungen von Problemen holt anstatt der Belohnung durch Eltern oder LuL. (vgl. Neber 1973, S. 23-24)

Die Frage beim Erlernen der heuristischen Methoden des Entdeckens ist, wie man den SuS die Methoden der Entdeckung beibringt und wie sie darin geübt werden können. Das Wichtige für Bruner ist der Prozess, durch den man etwas herausfindet. Das kann zum Beispiel durch Fragen passieren, jedoch gibt es keine Garantie, dass das Ergebnis dann wirklich eine Entdeckung sein wird. Auch wenn man keine Ergebnisgarantie hat, so sind diese Prozesse doch wichtig, weil es ohne sie wahrscheinlich zu Verwirrungen und überhaupt keinem Erfolg kommt. Das Problemlösen kann aber auch auf andere Weisen beschrieben werden, wie beispielsweise von dem englischen Philosophen Weldon. Dieser unterscheiet nämlich zwischen Schwierigkeiten, Rätseln und Problemen. Er meint, beim Problemlösen würde man Probleme in eine Form bringen, in der man mit ihnen umgehen und sie benutzen kann. Deswegen löst man ein Problem oder macht eine Entdeckung, indem man eine Schwierigkeit in Rätselform bringt und dann erst in ein Problem verwandelt. (vgl. Neber 1973, S. 25) „Vieles, was wir mit Entdeckung bezeichnen, besteht darin, dass wir wissen, wie man bestimmten Schwierigkeitsgraden bestimmte Formern auferlegt. Ein minimales, doch entscheidendes Moment bei der höchsten Art der Entdeckung besteht darin, dass man Modelle oder Rätselformen entwickelt oder erfindet, die wirklich auf Schwierigkeiten übertragen werden können.“(Neber 1973, S. 25-26)
Bruner folgert daraus die Hypothese, dass „je mehr man geübt ist, um so eher wird man das Gelernte zu einem Problemlösungs- oder Fragestil verallgemeinern können, der sich auf jede oder fast jede angetroffene Aufgabenart anwenden lässt.“(Neber 1973, S. 26)

Zum vierten und letzten seiner Vorteile beruft er sich auf einen seiner Kollgen, Professor George Miller, dessen Grundsatz sei, dass das Problem unseres Gedächtnisses nicht bei der Speicherung, sondern beim Abrufen von Informationen liege. Menschen sind in der Lage, sehr viele Eindrücke zu sammeln und zu speichern, haben danach aber oft keinen Zugriff mehr dar-

auf. Werden sie jedoch durch irgendwelche Indikatoren erinnert, so erkennen sie vieles wieder, was davor noch unbekannt zu sein schien. Des Rätsels Lösung, wie man Informationen auch wieder abrufen kann, ist also Organisation, bzw. das Wissen, wo die Information zu finden ist. Das Ganze kann man durch mehrere Beispiele illustrieren, wie etwa anhand von bekannten Gedächtnisübungen. Bekommt man mehrere Wörter hingelegt und eine kurze Zeitspanne, in der man sie sich merken soll, so merkt man sich die Wörter besser, wenn man sie in eine Geschichte verpackt, als wenn man versucht, sich die Liste allein zu merken. Durch die Geschichte hat man Zugang zum Speicherort der Begriffe, der in der Liste womöglich fehlt. Wichtig ist, dass das Material nach eigenen Interessen und kognitiven Strukturen organisiert wird, weil es dann im Gedächtnis am ehesten zugänglich ist. (vgl. Neber 1973, S. 27)
Daraus folgert Bruner, „dass der von der Abrufseite aus betrachtete Gedächtnisprozess auch ein Prozess der Problemlösung ist: Wie kann Material im Gedächtnis platziert werden, so dass man es auf Anforderung bekommt?“(Neber 1973, S. 27)

Bernard Z. Friedlander nennt zwei Hauptgründe, warum entdeckendes Lernen im Unterricht besonders wirksam ist.
Der erste Grund ist das Erfolgserlebnis als Belohnung nach dem richtigen Lösen einer Aufgabe. Es schafft Befriedigung, wenn Ordnung in die vorher ungeordeneten Erfahrungen und Probleme gebracht wird.
Der zweite Grund ist das Aktivwerden der SuS im Unterricht. Durch das Präsentieren der eigenen Entdeckungen im Gegensatz zum bloßen passiven Dasitzen, wird das Wissen eher behalten und bleibt auch für später abrufbar. (vgl. Neber 1973, S. 111)

David P. Ausubel sieht das Ganze ein wenig anders als Bruner und Friedlander. Er nennt zwar auch Vorteile, bringt aber genauso Beschränkungen ans Licht. Er schreibt: „Die Methode selbst ist für bestimmte pädagogische Absichten und unter bestimmten pädagogischen Bedingungen sehr brauchbar. Die zu kritisierenden Aspekte der Methode sind gewisse unberechtigte

Annahmen, übertriebene Ansprüche, inadäquat überprüfte Propositionen und vor allem einige der Gründe, die für ihre Effizienz vorgebracht werden.“(Neber 1973, S. 33)
Als weitere Vorteile nennt er außerdem, dass entdeckendes Lernen bei der Einführung in neuen, abstrakten Stoff angewendet werden kann, dass es eine gute Art zum Lehren wissenschaftlicher Methoden bietet und eine effektive Problemlösestrategie ist und dass es den Gehalt der Bedeutung von bereits gelerntem Stoff erhöht, weil Lernen und Behalten besser funktioniert, wenn die SuS einen weiteren Faktor an Motivation haben. Außer für die Motivation ist das selbständige Lösen von Problemen auch ein Mittel zum Überprüfen, ob SuS gewisse Ideen wirklich verstanden oder lediglich Rechenalgorithmen auswendig gelernt haben. (vgl. Neber 1973, S. 34-35)

2.3 Kritik

Trotz aller Vorteile, wurde die Methode des Lernens durch Entdecken auch hart kritisiert.
Friedlander nennt mehrere Probleme, die in einem Klassenzimmer auftreten können. Das erste ist die Frage, ob Entdeckungen wirklich immer zu produktiven Ergebnissen und Entscheidungen führen. Entdeckungen, sowohl in der Forschung als auch im Unterricht, führen manchmal auch ins Nichts, wobei solche Fehlschläge auch produktiv genutzt werden können. Die Schwierigkeit ist nun, ob die Lehrperson alle diese Verwirrungen, die während des Denkprozesses entstehen können, erkennen und beseitigen kann. Friedlander meint, egal wie gut strukturiert, vorbereitet und durchdacht das Unterrichtsmaterial auch sein mag, kann der Denkfluss der SuS dennoch in unbestimmt viele (verschiedene) Richtungnen strömen. Aus eigenen Schulbesuchen berichtet er, dass es bei SuS des Öfteren zu Verwirrungen und Fehlvorstellungen kommt, die von der Lehrperson aus verschiedensten Gründen nicht berichtigt wurden. Sobald man die Kinder selbst arbeiten und entdecken lässt,

hat man keine Kontrolle mehr über die Richtung, die die Gedankengänge einschlagen. Anfänglich gute Gedanken können sehr leicht entgleisen und Fehlvorstellungen, bzw. falsche Ableitungen nur dann berichtigt werden, wenn sie der Lehrperson mitgeteilt wurden. (vgl. Neber 1973, S. 112-113)
Das zweite Problem ist die Frage des Behaltens. Wie viel merken sich SuS von einer solchen Unterrichtsstunde? Es wurde nie wirklich „bewiesen“, dass entdeckendes Lernen das Behalten von selbst entdeckten Fakten längerfristig höher ist als das Behalten von Fakten, die man von jemand anderem lernt. Die Ergebnisse bei Forschungen in diese Richtung waren so verschieden, dass nach wie vor keine klare Aussage getroffen werden kann (auch wenn viele der Vorteile auf der Annahme basieren). Friedlander fordert auf, selbst nachzudenken, wie schnell und wie viele Gedanken vergessen werden, die Bedeutung hatten, als sie uns in den Sinn kamen. Bei Kindern läuft es genauso ab, auch sie vergessen mit Leichtigkeit die wichtigsten Dinge. Dabei hat ein Kind täglich noch eine viel größere Welle an Informationen zu verarbeiten als Erwachsene. Eine wichtige Aufgabe der Lehrperson sei demnach, die Entdeckungen, die die SuS selbständig machen, danach in Kontext zu bringen und einen Sachzusammenhalt zu erstellen. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit des Behaltens um einiges erhöhert. (vgl. Neber 1973, S. 113-114)
Drittes Problem ist die verschiedene Unterrichtsbeteiligung verschiedener SuS. Entdeckung kann bei verschiedenen SuS auf verschiedene Art und Weise ablaufen und es wurde nie festgestellt, ob die eine oder andere Herangehensweise an Probleme die bessere ist. Manche der SuS haben einen intuitiveren Zugang während andere einen rationaleren wählen. So können diejenigen, die intuitiv arbeiten, manchmal schneller voranschreiten, mehr Daten, Fakten und Ergebniss produzieren, von denen viele auch wieder verworfen werden, währen diejenigen, die rationaler vorgehen, dafür auch mehr Zeit benötigen, weil sie Schritt für Schritt Hypothesen aufstellen und überprüfuen. (vgl. Neber 1973, S. 116)
Viertes und letztes Problem in Friedlanders Liste ist die Zweideutigkeit. Darunter versteht er die Problematik, dass Fakten eine, mehrere oder keine

Bedeutung haben können. Das, was für die Lehrperson ganz eindeutig der richtige (und einzig mögliche Weg) erscheint, muss für die SuS nicht so klar sichtbar sein. Er nennt zwei Möglichkeiten, mit dieser Schwierigkeit umzugehen. Einerseits kann die Lehrperson bei der Vorbereitung der Materialien darauf achten, dass die gegebenen Hinweise und Aufgabenstellungen klar formuliert sind und keine Zweideutigkeiten zulassen. Die zweite Möglichkeit ist, den SuS ganz bewusst mehrere Ausgangsmöglichkeiten offen zu lassen, weil das behandelte Problem mehrere Lösungen hat. Dann ist aber klar zu kommunizieren, dass das so ist. Vor allem bei jüngeren SuS ist es vielleicht sogar besser, sich auf eine Lösungsmöglichkeit zu konzentrieren und dann erst die anderen offen zu legen.
Eine solche Zweideutigkeit bei der Lösung von Problemen ist für Wissenschaftler und Lehrpersonen äußerst spannend und interessant. Für SuS jedoch kann es sich sehr frustrierend auswirken, wenn sie keine Lösung finden, vor allem dann, wenn es nicht einmal einen Lösungsweg gibt. Das führt dann weniger zu intrinsischer Motivation und Belohnung, als vielmehr zum Aufgeben der Aufgabe. (vgl. Neber 1973, S.118-120)

2.4 Entdeckendes Lernen im Unterricht

Dr. Karin Ernst hat sich, wie bereits oben gesehen, sehr intensiv mit der Methode des entdeckenden Lernens auseinandergesetzt. Sie hat an der Technischen Universität Berlin eine Lernwerkstatt gegründet, im Zuge derer regelmäßig Workshops für Lehrkräfte angeboten werden, die zu Fortbildungszwecken dienen sollten. Auch Ute Zocher forscht auf dem Gebiet des entdeckenden Lernens und leitet Workshops der Lernwerkstatt. In *Entdeckendes Lernen lernen* hat sie ihre Erfahrungen damit niedergeschrieben. Sie beschreibt in dem Buch auch das Konzept entdeckenden Lernens, das den Lehrpersonen in den Workshops vermittelt wird.

Grundsätzlich beruht dieses Konzept auf drei zentralen Kategorien. Erstens sind Fragen der SuS Ausgangspunkt von Lernen, zweitens wird der Dialog

mit der Sache als aktiver Erkenntnisprozess betrachtet und drittens ist der Austausch über das Lernen wichtig für den Abschluss des Lernprozesses. (vgl. Zocher 2000, S. 25)
Ich will nun auf diese drei Kategorien etwas genauer eingehen.

Fragen entstehen, vor allem bei jüngeren SuS, im Verlauf des Entdeckens ganz von alleine. Die Frage ist, wie man als Lehrperson damit umgeht und wie man sie in den Lernprozess integriert. Ute Zocher stellt dazu die vier-Frage-Ebene vor, die von Dr. Karin Ernst 1990 entwickelt wurde. Es handelt sich dabei um verschiedene Dimensionen von Fragen, je nach dem wie sehr sich ein Kind schon mit der Materie auseinandergesetzt hat und wie gut es die Dinge schon verstanden hat.
Die erste Phase findet zu Beginn des Lernprozesses statt. Diese Fragen beziehen sich auf die ersten Gedanken, die die SuS sich zu dem Thema gemacht haben und entwickeln sich erst später zu wirklich handhabbaren Fragen. Aus diesen Fragen leiten sich für später neue Fragen ab.
Die zweite Phase beinhaltet Fragen, die schon konkret zum Stoff oder dem Arbeitsmaterial sind und bei den SuS im Dialog mit der Lehrperson aufkommen. Sie zeugen von Interesse, eine Lösung für das gestellte Problem zu finden.
Die dritte Phase der Fragen sind solche, die während des Arbeitens aufkommen. Die SuS gelangen zu Erkenntnissen, nach denen sie nicht unbedingt gesucht haben, die aber zur Problemlösung irgendwie auch dazugehören.
Die vierte und letzte Phase ist dann die Frage nach dem Zweck des eben Entdeckten und Gelernten und warum die Sache für das Kind selbst von Bedeutung ist. (vgl. Zocher 2000, S. 25-27)

Im Prozess des Entdeckens und während der Beschäftigung mit einem Problem durchlaufen die SuS mehrere Phasen. Sie probieren Sachen aus, wenn diese nicht funktionieren suchen sie nach neuen Möglichkeiten. Es entstehen Schlussfolgerungen, Informationen werden im Internet gesucht, vielleicht sogar in Büchern nachgeschlagen. Zwischendurch gibt es auch immer wieder regen Austausch unter den SuS. Die Phasen wechseln immer ab zwischen

„planvollen Arbeitsphasen“ und „scheinbar chaotischem Herumprobieren“. Der Lernprozess entsteht aus Fehlschlüssen, Umwegen und neuen Fragen, die sich auftun. Dabei fragen sich die SuS zu jedem Zeitpunkt, ob ihre Arbeit sie auf dem Weg der Beantwortung der eigentlichen Fragestellung wirklich weiterbringt. So entsteht der Dialog mit der Sache, während dem das Kind der Entdeckung immer näher kommt und seine Welt immer wieder neu ordnet. Für den Lernenden „entsteht die Welt immer wieder neu“. (vgl. Zocher 2000, S. 28-29)

Sei es der Austausch zwischen den SuS oder die Rücksprache mit der Lehrperson, eine gute Kommunikation muss es bei jedem entdeckenden Lernprozess geben. Oft können subjektive Ergebnisse erst im Austausch mit anderen richtig erfasst und zur Gänze verstanden werden. Teilweise sind die Gedankengänge der SuS zu einem Thema auch ähnlich, dann können sie eine Weile lang auch gemeinsam arbeiten. Es entsteht ein soziales Netz, in dem die Kinder sich gegenseitig helfen, auf neue Ideen bringen und eventuelle Fehlvorstellung der anderen aufheben können. Wichtig ist auch, dass dieser Austausch nicht geplant werden kann. Es kann in der Unterrichtsstunde keine Zeit festgesetzt werden, in der der Austausch stattfinden soll, weil er spontan passiert. Ganz am Ende des Prozesses findet dann eine ausführliche Diskussion der einzelnen Arbeiten statt, in der die SuS präsentieren können, zu welchen Erkenntnissen sie gelangt sind. In dieser Präsentation sollen die Lernwege und Ergebnisse so präsentiert werden, dass sie auch für außenstehende nachvollziehbar sind. (vgl. Zocher 2000, S. 30)

Heinrich Winter (2016) gibt Hinweise, worauf auf jeden Fall zu achten ist, wenn man entdeckendes Lernen im Unterricht betreibt.
Das ist erstens, dass von der Lehrperson klare Akzente gesetzt werden sollen, worauf der Fokus liegt, denn SuS können nur schwer einschätzen, wie wichtig das Entdeckte für ihr Lernen in weiterer Folge sein wird.
Zweitens ist es wichtig, dass der Umfang des Stoffes so angepasst wird, dass die SuS ein „Mindesttempo“ haben müssen, in dem sie arbeiten.
Drittens sind wahrscheinlich nicht alle SuS intrinsisch motiviert, Mathema-

tikaufgaben zu lösen. Die Lehrperson muss sich darauf einstellen, dass sich das Interesse an den Problemen bei manchen SuS in Grenzen halten wird.
Viertens ist Schule nicht gleichzusetzen mit Forschung. Es stimmt zwar, dass das Stoßen auf bisher Unbekanntes dasselbe ist, dennoch unterscheiden sich die Akteure und die Umgebung. Während in der Forschung Erwachsene arbeiten, haben wir es in der Schule mit Kindern und Jugendlichen zu tun, das heißt das eine sind Profis auf ihrem Gebiet, das andere Laien. Eine Forschungsgruppe setzt sich aus freiwilligen Mitgliedern zusammen, während die Kinder einer Klasse zwangsläufig in der Formation sitzen. Außerdem arbeiten die Forscher komplett offen, SuS bekommen ihre Probleme aber von Lehrpersonen bzw. in weiterer Folge dem Lehrplan gestellt.
Fünftens muss die Lehrperson sich bewusst sein, dass es beim entdeckenden Lernen nur sehr schwer bzw. unmöglich ist, SuS zu vergleichen und dadurch zu benoten.
Als sechsten und letzten Punkt nennt Winter, dass die Professionalität des Lehrenden sich gerade darin zeige, „viele SuS in möglichst kurzer Zeit zu möglichst ansehnlichen und vorzeigbaren Leistungen durch gekonntes Unterrichten zu führen.“ . (vgl. Winter 2016, S. 3-4)

Zum Schluss bleibt nur noch die Frage, ob entdeckendes Lernen tatsächlich auch sinnvoll ist im Unterricht. Sabine Liebig beantwortet die Frage in *Entdeckendes Lernen - wieder entdeckt?* mit einem ganz klaren: „Ja!“.
Sie argumentiert, dass es zwar eine Weile dauere, bis die SuS sich an die neue Lernform gewöhnt haben, aber dann würden nachweislich bessere Transfereffekte erzielt. Die SuS behalten mehr und besser, weil sie individuell Erkenntnisse gewinnen, verarbeiten und verknüpfen können (vgl. Liebig 2002, S. 12). Durch diese Methode bekommen die SuS die Möglichkeit, selbst im Unterricht Erfahrungen zu machen und Eigeninitiative zu ergreifen. Zudem bekommt jedes Kind die Chance in seinem eigenen Grundmuster zu denken. Es können durch entdeckendes Lernen viel mehr Lerntypen angesprochen werden und die SuS arbeiten mit eigenen Assoziationen und im eigenen Tempo. Der Dialog mit einem Thema ist immer ein aktiver Erkenntnispro-

zess und die SuS selbst stehen im Zentrum der Auseinandersetzung damit. Dadurch können sie sich mit eigenen Worten ausdrücken und Denkvorgänge wiedergeben, auch ohne die korrekten Begriffe zu verwenden. Aufgabe der Lehrperson ist, die SuS darin zu unterstützen und auf keinen Fall mit Fachbegriffen zu überfahren.

2.5 Fehlvorstellungen

Bei jeglicher Art von Lernen ist die Vorstellung von besonderer Bedeutung. Die Lernenden setzen sich aktiv mit einem gewissen Stoffgebiet auseinander, das heißt sie versuchen, Begriffe zu erfassen und in eigenen Worten wiederzugeben, sie bilden Zusammenhänge und verknüpfen gewisse Elemente mit bereits Bekannten und interpretieren den Stoff so, dass der Inhalt für sie Sinn ergibt. Es werden eigene Vorstellungen entwickelt, die dann auch in den Unterricht mitgebracht werden.
Entsprechen diese Vorstellungen nicht der allgemeinen wissenschaftlichen Theorie, so sind sie falsch. In diesem Fall spricht man von *Fehlvorstellungen*. (vgl. Reisner 1995, S. 1-2)
Die SuS beobachten ihre Umwelt und entwickeln daraus Konzepte, die ohne wissenschaftliches Arbeiten und genaues Vorwissen entstehen. Dass diese Vorstellungen und Konzepte nicht immer völlig korrekt sind, ist wohl eine logische Konsequenz. Deswegen bezeichnet man solche Vorstellungen in der Didaktik oft als *alternativ*, *ursprünglich* oder als *Präkonzepte*.
Bei umfangreichen Studien wurde festgestellt, dass nicht alle Fehlvorstellungen ursprünglichen Charakters sind, sondern durchaus auch im Unterricht entstehen können. Hans-Dieter Barke bezeichnet solche als *hausgemachte Fehlvorstellungen*. Es ist auch wichtig, diese beiden Arten von Fehlvorstellungen zu unterscheiden, weil die ursprünglichen nicht verhindert werden können, sie entstehen mit der Auseinandersetzung der Lernenden mit ihrer Umwelt, den hausgemachten jedoch kann vorgebeugt werden. (vgl. Barke 2006, S. 21)

3 Ausgewählte Aufgaben

In diesem Kapitel wollen wir uns einigen interessanten Aufgaben widmen, die alle entweder mögliche Quellen für Fehlvorstellungen bergen, spezielle Lösungswege haben oder paradoxe Situationen aufklären. Jede Aufgabe beginnt mit einer Erklärung, und einem genauen Lösungsweg. Danach kommen Vorschläge, wie die Aufgabe für den Unterricht aufbereitet werden könnte. Erst zum Schluss jeder Aufgabe wird besprochen, wo das entdeckende Lernen dabei zu tragen kommt und welche Fehlvorstellungen genau angesprochen wurden. Besonders viele solcher Fehlvorstellungen gibt es im Bereich der Stochastik, das heißt der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. Reisner 1995, S. 2). Deswegen beschäftigen wir uns in drei der vier Aufgaben mit stochastischen Themen, beim vierten wird der Lösungsweg im Zentrum stehen. Ganz zum Schluss wird jede Aufgabe noch ins Kompetenzmodell der neuen Zentralmatura eingeordnet mit der Angabe von Lernzielen, die durch die Auseinandersetzung mit dem Thema erfüllt werden, versehen.

3.1 Simpson's Paradoxon

1973 gab es an der Universität von Berkeley in Kalifornien den Vorwurf, dass beim Aufnahmeverfahren sehr sexistisch vorgegangen worden sei und mehr Männer als Frauen akzeptiert worden seien. Bei Betrachtung der allgemeinen Zahlen der Zugelassenen ist dieser Vorwurf auch korrekt. Betrachtet man allerdings die einzelnen Institute und Fachabteilungen, so stimmt der Vorwurf nicht mehr. (vgl. Martin, S.372)

Um zu erklären, wie so etwas möglich ist, betrachten wir ein vereinfachtes Beispiel mit konstruierten Daten, das Norbert Henze erarbeitet hat. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns auch nur auf zwei Fächer. (vgl. Henze, S.110-111)

	Frauen			Männer		
	Bewerberinnen	zugelassen	Prozent	Bewerber	zugelassen	Prozent
Fach 1	900	720	80%	200	180	90%
Fach 2	100	20	20%	800	240	30%
Gesamt	1000	740	74%	1000	420	42%

An den Daten erkennt man schön, dass in Summe gesehen zwar mehr Frauen als Männer zugelassen wurden, in den einzelnen Fächern jedoch die Prozentsätze der zugelassenen Männer die der Frauen übertreffen.

Dieses Phänomen ist in der Statistik schon lange als das *Simpson-Paradoxon* bekannt. Mathematisch wird es folglich beschrieben:

Es seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, $K_1, ..., K_n$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $\Omega = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n$. A und B seien Ereignisse, wobei $P(A \cap K_j) > 0$ und $P(A^c \cap K_j) > 0$ für alle $j = 1, 2, ...n$. Das *Simpson-Paradoxon* liegt genau dann vor, wenn

$$P(B|A \cap K_j) > P(B|A^c \cap K_j) \qquad \forall j = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

und gleichzeitig

$$P(B|A) < P(B|A^c) \tag{2}$$

gelten.

Die mathematische Aufklärung des Paradoxons ist recht leicht einzusehen.

Zentral dafür ist der *Satz der totalen Wahrscheinlichkeit*, der folgendes besagt:
Sei $K_1, ..., K_n$ eine disjunkte Zerlegung des Ereignisraumes Ω, also $K_1 \cup ... \cup K_n = \Omega$, $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $P(K_i) \geq 0$ für alle $i = 1, ..., n$, dann gilt für alle Ereignisse A aus Ω

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(K_i) \cdot P(A|K_i)$$

Daraus folgt analog für die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(B|A) = \sum_{j=1}^{n} P(K_j|A) \cdot P(B|A \cap K_j) \tag{3}$$

und

$$P(B|A^c) = \sum_{j=1}^{n} P(K_j|A^c) \cdot P(B|A^c \cap K_j) \tag{4}$$

Betrachten wir die Formeln, so ist klar, dass das *Simpson-Paradoxon* auftreten kann. Wichtig für die Gültigkeit von (2) ist, dass die $P(K_j \cap A)$ in Gleichung (3) genau für jene j klein sein können, für die $P(B|A \cap K_j)$ groß ist und umgekehrt. Andererseits kann $P(K_j|A^c)$ in Gleichung (4) gerade für diejenigen j groß sein, für die $P(B|A^c \cap K_j)$ groß ist (ohne (1) zu verletzen) und umgekehrt.

Setzen wir nun $n = 2$, so stellen K_1 und K_2 das Fach 1 bzw. Fach 2 dar, das Ereigniss A steht für "männlich", A^c demnach für „weiblich" und das Ereignis B für "zugelassen". (vgl. Henze, S. 111)

Versuchen wir, uns die Begünstigungen im Einzelnen anzusehen. Dazu berechnen wir uns folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeit	Verbalisierung
$P(B\|A^c) = 0,74$	Relative Häufigkeit, mit der eine Frau zugelassen wird.
$P(B\|A) = 0,42$	Relative Häufigkeit, mit der ein Mann zugelassen wird.
$P(B\|A^c \cap K_1) = \frac{720}{900} = 0,8$	Relative Häufigkeit, mit der eine Frau für Fach 1 zugelassen wird.
$P(B\|A^c \cap K_2) = \frac{20}{100} = 0,2$	Relative Häufigkeit, mit der eine Frau für Fach 2 zugelassen wird.
$P(B\|A \cap K_1) = \frac{180}{200} = 0,9$	Relative Häufigkeit, mit der ein Mann für Fach 1 zugelassen wird.
$P(B\|A \cap K_2) = \frac{240}{800} = 0,3$	Relative Häufigkeit, mit der ein Mann für Fach 2 zugelassen wird.
$P(K_1\|A^c) = \frac{900}{1000} = 0,9$	Relative Häufigkeit, mit der eine Frau sich für Fach 1 bewirbt.
$P(K_2\|A^c) = \frac{100}{1000} = 0,1$	Relative Häufigkeit, mit der eine Frau sich für Fach 2 bewirbt.

$P(K_1\|A) = \dfrac{200}{1000} = 0,2$	Relative Häufigkeit, mit der ein Mann sich für Fach 1 bewirbt.
$P(K_2\|A) = \dfrac{800}{1000} = 0,8$	Relative Häufigkeit, mit der ein Mann sich für Fach 2 bewirbt.

Wir erkennen, dass $P(B|A \cap K_1) > P(B|A^c \cap K_1)$ und $P(B|A \cap K_2) > P(B|A^c \cap K_2)$, UND dass $P(B|A) < P(B|A^c)$. Damit haben wir die vorher beschriebene paradoxe Situation.

Allgemein betrachtet ist die Wahrscheinlichkeit für eine Frau, akzeptiert zu werden $0,74$, die für einen Mannes nur $0,42$. Die Wahrscheinlichkeit für eine Frau hingegen, für Fach 1 akzeptiert zu werden, liegt bei 0,8, die für den Mannes bei 0,9. Genau dasselbe gilt auch für Fach 2. Frauen werden mit 0,2 angenommen, Männer hingegen mit 0,3.

Zu der *paradoxen* Situation kommt es, da sich gerade in dem Fach 2, in dem die Zulassungsquote gering ist, besonders viele Männer beworben haben, während umgekehrt besonders viele der Frauen sich in Fach 1 beworben haben, in dem die Zulassungsquote recht hoch ist. Wird nun die Summe der Zulassungen in ihre Einzelaspekte zerlegt, zeigt sich diese Verteilung der Wahrscheinlichkeiten besonders deutlich (Satz der totalen Wahrscheinlichkeit):

$$P(B|A^c) = \underbrace{P(K_1|A^c)}_{=0,9} \cdot \underbrace{P(B|A^c \cap K_1)}_{=0,8} + \underbrace{P(K_2|A^c)}_{=0,1} \cdot \underbrace{P(B|A^c \cap K_2)}_{=0,2} = 0,74$$

$$P(B|A) = \underbrace{P(K_1|A)}_{=0,2} \cdot \underbrace{P(B|A \cap K_1)}_{=0,9} + \underbrace{P(K_2|A)}_{=0,8} \cdot \underbrace{P(B|A \cap K_2)}_{=0,3} = 0,42$$

Diese Darstellung verdeutlicht, dass die Wahrscheinlichkeiten der Bewerbungen für eines der Fächer bei Frauen und Männern in diesem Beispiel stark

unterschiedlich sind und die Zulassung zu den jeweiligen Fächern ebenso. In der Summe betrachtet, sind daher die Zulassungen unterschiedlich hoch, da sich gerade für das Fach 1 (in dem viele Studenten zugelassen wurden) viele Frauen beworben haben, und sich für das Fach 2 (in dem wenige Studenten zugelassen wurden) viele Männer beworben haben. Also handelt es sich nicht um eine sexistische Entscheidung, sondern um eine Situation, in der mehrere sich gegenseitig beeinflussende Umstände aufeinandertreffen. (vgl. Morisse, S.10-11)
Um das Ganze in der Schule verwenden zu können, muss man die Aufgaben weniger formell bearbeiten. Wie so eine Vorbereitung und die Schulstunde dazu aussehen könnten, möchte ich nun zeigen.

Simpson im Unterricht

Täglich werden Daten der verschiedensten Arten verglichen. Man vergleicht den Preis eines bestimmten Produktes in verschiedenen Supermärkten, die Leistungen verschiedener SuS bei Tests und Schularbeiten, Wahlergebnisse von Wahlen in verschiedenen Ländern. Solche Statistiken werden gerne zu Rate gezogen, wenn wichtige Entscheidungen bevorstehen. Bei der Anstellung eines neuen Mitarbeiters wird etwa verglichen, welcher Bewerber die größeren Umsätze gemacht hat und beim Testen neuer Medikamente wird geprüft, welches das wirksamste ist. Man entscheidet sich dann aufgrund konkreter Zahlen, die schwarz auf weiß vor einem liegen und keinen Fehlschluss erlauben. Zahlen sind schließlich objektiv und lügen nie. Was aber, wenn es doch Möglichkeiten gäbe, die Ergebnisse zu verfälschen? Vielleicht sogar ohne die Zahlen zu fälschen, sondern nur mit ganz simplen Methoden der Statistik? Dann wäre eine Manipulation möglich, die man, außer bei genauerer Betrachtung der Daten und Vergleich mit anderen Statistiken, nicht einmal bemerken würde. (vgl. Hesse 2011, S.23f)

Für die Bearbeitung der nächsten Aufgabe gilt folgendes Szenario:

Man ist Vorstand eines Pharmakonzernes, der gerade zwei neue Medikamente entwickelt hat, das Medikament A und das Medikament B, und muss entscheiden, welches der beiden auf den Markt kommen soll. Da dies eine sehr wichtige Entscheidung ist und man sich keine Fehler erlauben darf, verlangt man nach Statistiken über die Wirkung beider Medikamente. Man hofft, mit deren Hilfe einen klaren Entschluss treffen zu können. (vgl. Hesse 2011, S.24-25)

Auf der Suche nach solchen Statistiken stößt man auf folgende zwei Tabellen.

	wirkt	wirkt nicht
Medikament A	2037	63
Medikament B	784	16

	Patient in gutem Zustand		Patient in schlechtem Zustand	
	Testpersonen	wirkt	Testpersonen	wirkt
Medikament A	600	594	1500	1443
Medikament B	600	592	200	192

Diese zwei Tabellen sind der Ausgangspunkt der selbständigen Arbeit. Sie werden den SuS vorgelegt und diese sollen dann anhand der Daten entscheiden, welches Medikament das bessere ist.
Eine möglicher Weg, wie sie dabei vorgehen könnten, wäre folgender:

	wirkt	wirkt nicht	**Gesamt**	Wirkrate in %
Medikament A	2037	63	2100	97
Medikament B	784	16	800	98

	Patient in gutem Zustand		Patient in schlechtem Zustand		**Gesamt**	
	Test personen	wirkt	Test personen	wirkt	Test personen	wirkt
Medikament A	600	594	1500	1443	2100	2037
Medikament B	600	592	200	192	800	784
Gesamt	1200	1186	1700	1635	2900	2821

Die SuS müssen nur die Zeilen bzw. Spalten der Tabellen addieren, um dann die Wahrscheinlichkeiten bzw. relativen Häufigkeiten für die notwendigen Ereignisse ablesen zu können.

In der ersten Tabelle sieht man, dass die Wahrscheinlichkeit von Medikament A geheilt zu werden, $\frac{2037}{2100} = 0,97$ ist, während man von Medikament B mit Wahrscheinlichkeit $\frac{784}{800} = 0,98$ geheilt wird. Daraus könnte gefolgert werden, dass das Medikament B das bessere ist.

Aus der zweiten Tabelle, liest man aber folgendes ab:
Bei gutem Gesundheitszustand vor der Einnahme ist die Wahrscheinlichkeit, dass Medikament A wirkt $\frac{594}{600} = 0,99$ und dass Medikament B wirkt $\frac{592}{600} \approx 0,986$. Bei schlechtem Gesundheitszustand ist die Heilungswahrscheinlichkeit $\frac{1443}{1500} = 0,962$ mit Medikament A bzw. $\frac{192}{200} = 0,96$ mit Medikament B. Plötzlich ist nun Medikament A das bessere, weil es sowohl bei gutem, als auch bei schlechtem Gesundheitszustand vor der Einnahme eine höhere Wirksamkeit hat. Die SuS sollten in der Lage sein, die paradoxe Situation zu erkennen und Hypothesen aufzustellen, die die Situation erklären.

Die Aufgabe der SuS ist es also, die bedingten Wahrscheinlichkeiten aus der Tabelle richtig herauszulesen und mit den errechneten Werten auf das Paradoxon zu stoßen. Die Lehrperson hält sich aus dem Arbeitsprozess der SuS möglichst heraus und beantwortet höchstens Fragen, die gestellt werden. Erst wenn eigene Lösungen seitens der SuS präsentiert wurden, übernimmt die Lehrkraft das Wort und präsentiert unter Bezugnahme auf die Ergebnisse der SuS die richtige Lösung.

Je nachdem, ob der Klasse die formale mathematische Schreibweise vertraut ist, kann man das Paradoxon wie oben beschrieben formulieren. Ansonsten kann man es verbaliesieren und den SuS so vermitteln.
Bedingte Wahrscheinlichkeiten sollten den SuS zu dem Zeitpunkt schon bekannt sein, deswegen kann man bei der Berechnung und der Aufklärung des Phänomens analog vorgehen wie vorher beschrieben.

Um dieselbe Notation wie oben zu verwenden, ist das Ereignis Y "Medikament wirkt", das Ereignis X ist "Medikament A". Das Ereignis "guter Zustand" beschreiben wir mit K_1 und "schlechter Zustand" mit K_2.

Wahrscheinlichkeit	Verbalisierung
$P(Y\|X^c) = \dfrac{2037}{2100} = 0,97$	Relative Häufigkeit, mit der Medikament B wirkt.
$P(Y\|X) = \dfrac{784}{800} = 0,98$	Relative Häufigkeit, mit der Medikament A wirkt.
$P(Y\|X^c \cap K_1) = \dfrac{594}{600} = 0,99$	Relative Häufigkeit, mit der Medikamet B bei gutem Zustand wirkt.
$P(Y\|X^c \cap K_2) = \dfrac{592}{600} \approx 0,986$	Relative Häufigkeit, mit Medikament B bei schlechtem Zustand wirkt.
$P(Y\|X \cap K_1) = \dfrac{1443}{1500} = 0,962$	Relative Häufigkeit, mit der Medikament A bei gutem Zustand wirkt.
$P(Y\|X \cap K_2) = \dfrac{192}{200} = 0,96$	Relative Häufigkeit, mit der Medikament A bei schlechtem Zustand wirkt.
$P(K_1\|X^c) = \dfrac{600}{1200} = 0,5$	Relative Häufigkeit, mit der Medikament B bei gutem Zustand verabreicht wurde.
$P(K_2\|X^c) = \dfrac{200}{1700} \approx 0,118$	Relative Häufigkeit, mit der Medikament B bei schlechtem Zustand verabreicht wurde.

$P(K_1 \mid X) = \dfrac{600}{1200} = 0,5$	Relative Häufigkeit, mit der Medikament A bei gutem Zustand verabreicht wurde.
$P(K_2 \mid X) = \dfrac{1500}{1700} \approx 0,882$	Relative Häufigkeit, mit der Medikament A bei schlechtem Zustand verabreicht wurde.

Die Ausarbeitung der Aufgabe ist ziemlich anspruchsvoll und es wäre unrealistisch zu erwarten, dass die SuS alles selbst entdecken und die richtige Lösung selbst finden. Wenn die Lehrperson aber bei so vielem hilft, wo ist dann das entdeckende Lernen? Und was war die Fehlvorstellung, der entgegen gewirkt wurde?

Entdeckendes Lernen und Fehlvorstellungen

Überlegen wir uns zunächst, was die SuS nun wirklich selbständig gemacht haben. Sie mussten erstens Vorkenntnisse zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten aktivieren und sich erinnern, wie man diese aus solchen Tabellen gelesen hat. Zweitens mussten sie die Tabellen selbst interpretieren und verstehen, was die Zahlen bedeuten und wie sie daraus eine Aussage für ihre Problemstellung erhalten.

Laut Heinz Neber ist es entdeckendes Lernen, wenn Lernende Lernvoraussetzungen zur Erweiterung ihrer Kenntnisse nutzen und produktiv einsetzen können, was bei dem Simpson Beispiel, wie eben beschrieben, der Fall ist. Die Lernvoraussetzung war die bedingte Wahrscheinlichkeit, die sie bereits vorher gelernt haben müssen und die Erweiterung war das Paradoxon, auf das sie bei der Anwendung der Voraussetzungen gestoßen sind.
Dadurch wurde auch die Bedeutung des bereits Gelernten, nämlich des Ablesens bedingter Wahrscheinlichkeiten aus 4-Felder-Tafeln, erhöht. Die SuS er-

kennen, dass sie das nicht der Schule Willens lernen, sondern im Alltag wirklich brauchen. Das Gegebene wird ganz nach Bruner neu geordnet, weil die Erkenntnis erlangt wird, dass solche Tabellen und Statistiken lügen können und man sie ganz genau analysieren muss, um nicht manipuliert zu werden.

Damit haben wir eigentlich auch die Fehlvorstellung schon angesprochen, diese befindet sich nämlich genau in der Annahme, dass Zahlen nicht lügen können und man solchen Statistiken vertrauen könne. Die SuS entdecken für sich selbst, dass sie genau hinsehen müssen, dass es durchaus auch widersprüchliche Situationen bei der Auswertung von Daten geben kann und dass irgendwelche Ergebnisse nicht falsch sein müssen, nur weil sie auf den ersten Blick konträr erscheinen.

Durch die Aufgabe entdeckt man demnach auch, dass wissenschaftliches Arbeiten auch bedeuten kann, Widersprüche zu beseitigen, und dem ersten Eindruck von falschen Versuchsausgängen nicht nachzugeben.

Kompetenzen und Lernziele

Die Aufgabe ist zwar etwas anderes als die üblichen Schulaufgaben und kommt in der Form wahrscheinlich in keinem Schulbuch vor, dennoch passt sie auch in den Lehrplan und ist sogar mit dem Kompetenzmodell der neuen Zentralmatura kompatibel.
Bereits in der 6. Klasse lernen die Kinder das „Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen“ und das „Kennen des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit“. (AHS-Lehrplan Mathematik Oberstufe (2007), S. 5) Die Aufgabe kann also ab Ende der 6. Klasse, spätestens aber in der 7. Klasse für tieferes Verständnis eingesetzt werden.

Im Kompetenzenmodell ist die Inhaltsdimension hier ganz klar I4 - Wahrscheinlichkeit und Statistik, in der Komplexitätsdimension wären wir bei K3 - dem Einsetzen von Reflexionswissen, genauer bei den Unterpunkten „Inter-

pretationen, Argumentationen oder Begründungen“ bzw. „Reflektieren über Vor- und Nachteile sowie Konsequenzen von Darstellungen/ Darstellungsformen bzw. von mathematischen Modellen (Modellannahmen, Idealisierungen, Aussagekraft, Grenzen des Modells, Modellalternativen) im jeweiligen Kontext“ .
Die Handlungsdimension ist für mich bei H3 - Interpretieren anzusiedeln, mit den Unterpunkten „Werte aus Tabellen oder grafischen Darstellungen ablesen, sie im jeweiligen Kontext deuten“ und „Rechenergebnisse im jeweiligen Kontext deuten / tabellarische, grafische oder auch symbolische Rechnerdarstellungen angemessen deuten“. (vgl. kompetenzorientierte Reifeprüfung (2012), S.13 - 17).

Bleibt also nur noch zu überlegen, welche Lernziele durch das Entdecken des Simpson-Paradoxons erfüllt werden. Hier möchte ich einfach nur eine Liste mit allen Zielen angeben, die ich in der Unterrichtseinheit sehe.
Die ersten beiden Punkte beziehen sich auf die Verständnisebene, das heißt das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen. Alle weiteren Punkte sind dem kritischen Beurteilen von Sachverhalten auf Widerspruchsfreiheit zuzuordnen.

- Die SuS deuten Resultate einer Datenanalyse, indem sie zwei verschiedene Darstellungen der beiden Datenreihen miteinander vergleichen.
- Die SuS interpretieren die Aussage einer Statistik, indem sie mathematische Operationen wie Mittelwertbildungen ausüben und relative Häufigkeiten vergleichen.
- Die SuS lernen das Beurteilen und Bewerten vorgelegter Daten.
- Die SuS hinterfragen die Ergebnisse der Testung, indem sie auf einen Widerspruch in der Datenliste stoßen.
- Die SuS überprüfen, ob die Ihnen vorgelegten Informationen richtig sein können.

3.2 Will Rogers Phänomen

> *Als die ‘Olkies‘ nach Kalifornien umsiedelten, erhöhte sich der durchschnittliche Intelligenzquotient in beiden Staaten.* (Will Rogers nach Hesse 2011, S.38-39)

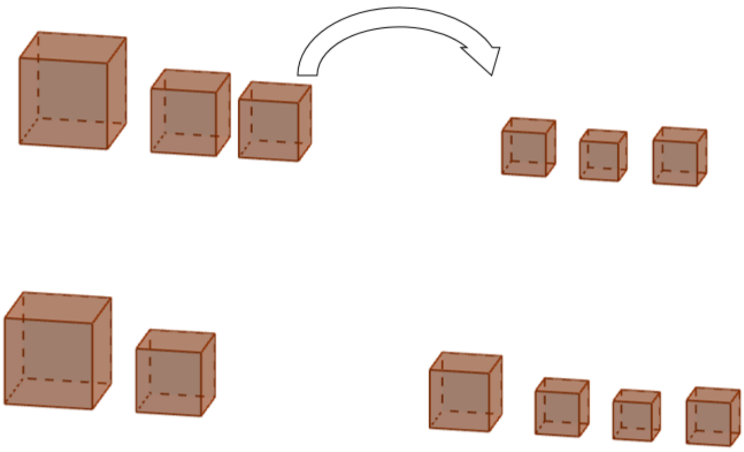
William Penn Adair Rogers (1879 - 1835) stammte aus Oklahoma und war ein Star am Broadway. Er arbeitete für Zeitung und Rundfunk und war besonders wegen seiner Sprüche landesweit bekannt.
Während der Wirtschaftskrise der 1930er Jahre schrieb er einen Kommentar über die Wanderbewegungen in Nordamerika. Dabei schrieb er den Satz *“When the Olkies left Oklahoma and moved to California, they raised the average intelligence level in both countries.“* 50 Jahre später wurde aus dieser Aussage das sogenannte *Will-Rogers-Phänomen.* (vgl. Golder 2008, S. 348)

Zum ersten Mal wurde es von einer Gruppe amerikanischer Epidemiologen in Studien zur Beurteilung der Prognose von Krebserkrankungen erwähnt. (vgl. Golder 2008, S. 348) Bei der Studie wurden zwei Gruppen von Patienten mit Lungentumor betrachtet. Die Überlebensrate hatte sich seit den Erhebungen in den 1950er Jahren bis zu den neuen Erhebungen in den 1970er Jahren erhöht. Das lag aber nicht daran, dass die Medizin fortgeschrittener gewesen wäre, sondern daran, dass die diagnostischen Verfahren verbessert wurden. Das Ganze ist folgendermaßen zu erklären: Die bildgebenden Verfahren bei der Untersuchung der Tumoren wurde verbessert. Somit konnten nun Tumore, die vorher als klein eingestuft worden wären, als größere Tumore erkannt werden. Das führte dazu, dass die Prognose bei den Tumoren, die noch weniger fortgeschritten (kleiner) waren sich verbesserte, weil die größeren in die nächsthöhere Kategorie eingestuft wurden. Da nun bei den vorher schon großen ein paar kleinere dazu kamen, verbesserte sich auch in dieser Kategorie die Prognose. (vgl. Hesse 2011, S. 40-42)

Man spricht daher allgemein vom Will-Rogers-Phänomen, wenn die Verschiebung eines Elements (oder mehrerer Elemente) von einer Gruppe in eine andere den Durchschnittswert beider Gruppen erhöht. Der Effekt tritt aber nur dann ein, wenn 2 Voraussetzungen erfüllt sind:

- Erstens muss das verschobene Element einen kleineren Wert als der Durchschnitt der Elemente der Gruppe, aus der es verschoben wird, haben. Damit wird der Durchschnitt der verbleibenden Elemente erhöht.
- Zweitens muss das verschobene Element einen größeren Wert als der Durchschnitt der Elemente der Gruppe, in die es verschoben wird, haben. Damit wird der Durchschnitt der Elemente der Empfängergruppe erhöht. (vgl. Golder 2008, S. 348-349)

Das Phänomen lässt sich sehr schön veranschaulichen, beispielsweise durch folgende Abbildung:



In der Abbildung betrachtet man Volumen von Würfeln. Die erste Zeile zeigt eine Gruppierung mit drei größeren und drei etwas kleineren Würfeln. Beim Übergang von der ersten in die zweite Zeile wurde von den großen Würfeln der kleinste entfernt und in die Gruppe der kleinen Würfel verschoben.
Man erkennt sehr schön, dass in der ursprünglichen Gruppe das Volumen des verschobenen Würfels kleiner als der Durchschnitt war, in der neuen Gruppe hingegen ist es größer als der Durchschnitt.

Betrachten wir das Ganze anhand eines einfachen Zahlenbeispiels. Wir nehmen vier verschiedene Stadien an, das heißt, vier verschiedene Gruppen von Größen der Tumore, die wir mit A, B, C und D kennzeichnen. In Gruppe A sind die kleinsten Tumore, in Gruppe D die größten. Sehen wir uns nun die Überlebensdauer von zehn Patienten an, die jeweils schon in die Gruppen eingestuft wurden und berechnen auch gleich den Durchschnitt jeder Gruppe. Man erkennt daraus schon, dass sich dadurch auch die Mittelwerte der Volumina in den beiden Gruppen verändern müssen.

Stadium	**A**	**B**	**C**	**D**
Überlebensdauer (in Jahren)	20, 16, 12	10, 8, 6	5, 4, 3	1
durchschnittliche Überlebensdauer (in Jahren)	16	8	4	1

Nun verschieben wir den jeweils schlimmsten Fall (mit der kleinsten Überlebensdauer) in die jeweils nächste Gruppe. Dann ergibt sich folgende Tabelle.

Stadium	**A**	**B**	**C**	**D**
Überlebensdauer (in Jahren)	20, 16	12, 10, 8	6, 5, 4	1,3
durchschnittliche Überlebensdauer (in Jahren)	18	10	5	2

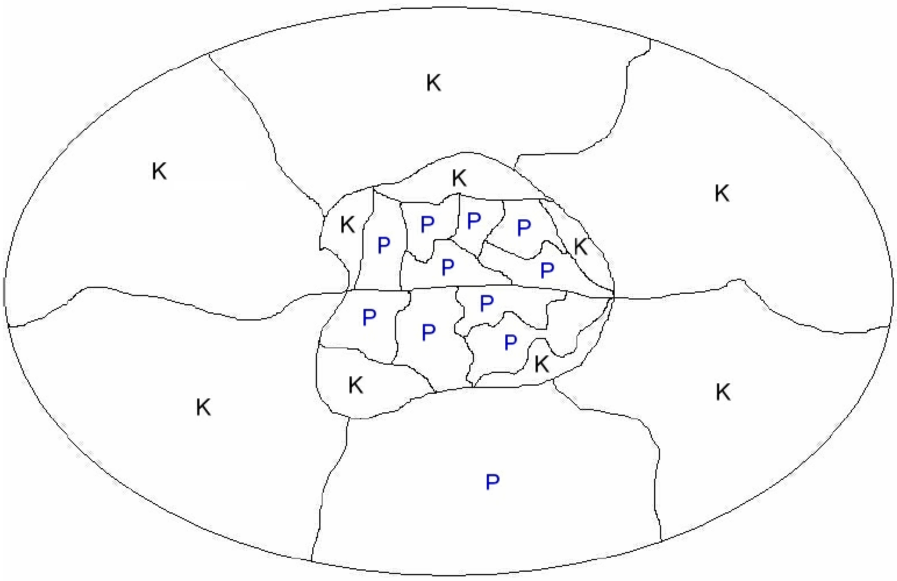
Man sieht sehr gut, wie sich alle Mittelwerte erhöht haben. Die Daten könnten leicht als Verbesserung der Therapiemethoden oder Wirksamkeit irgendwelcher neuer Medikamente fehlinterpretiert werden. (vgl. Hesse 2011, S. 42-43)

Will Rogers im Unterricht

In Zusammenhang mit dem *Will-Rogers-Phänomen* ist vor allem *Gerrymandering* zu erwähnen. *Gerrymandering* ist ein Weg, jegliche Wahlen zu manipulieren, allein durch Veränderung der Grenzen der Wahlkreise. Der Begriff ist auf den amerikanischen Gouverneur Elbridge Gerry im Bundesstaat Massachusetts zurückzuführen, der seinen eigenen Wahlbezirk so zugeschnitten hat, dass er am Ende einem Salamander glich. Er konnte somit die Wahlen mit 51% für sich entscheiden, obwohl er in nur 11 von 40 Wahlbezirken gewählt worden war. Aus *Gerry* und *Salamander* wurde *Gerrymandering.* (vgl. Hesse 2011, S.44)

Es gibt viele Fälle, in denen Wahlen durch genau diesen Trick gewonnen wurden, weswegen es wichtig ist, die SuS darüber aufzuklären. Genau darum dreht sich die Unterrichtseinheit.

Die Stunde beginnt, indem die SuS folgende Abbildung erhalten:



vgl. Robert Schulz 2004

In der Abbildung sieht man den Landstrich einer Stadt im Zentrum und einer ländlicheren Peripherie. Insgesamt gibt es in dem Gebiet 21 Teilgebiete, die alle in etwa dieselbe Einwohnerzahl haben. Für die Wahl der Regionsvertretung sind die beiden Parteien P und K aufgestellt. Es müssen Wahlbezirke aus jeweils drei Teilgebieten geformt werden. Die Partei K ist in der ländlichen Gegend stärker, während die Partei P in der Stadt ihre Hochburg hat. Die Wahlen gewonnen hat diejenige Partei, die die meisten Wahlbezirke für sich entscheidet. Einen Wahlbezirk hat eine Partei für sich entschieden, wenn sie in 2 der 3 Teilgebiete, die den Bezirk formen, gewonnen hat. (Diese Art der Wählens nennt man ein *Mehrheitswahlsystem*).

Die Aufgabe für die SuS ist nun folgende:

Aufgabe: Teile die 21 Teilgebiete in 7 Wahlbezirke mit je 3 Teilgebieten. Welche der beiden Parteien gewinnt die Wahlen?

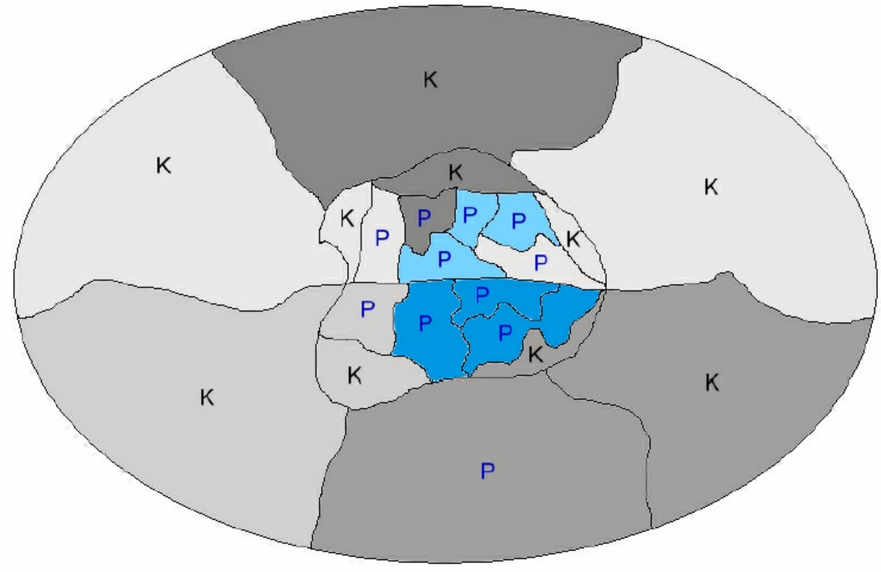
Die SuS sollen selbständig versuchen, die Aufgabe zu lösen. Es ist zu erwarten, dass ihre Lösungen variieren werden und die Wahlen bei verschiedenen SuS verschieden ausgehen. Wenn alle fertig sind, wird dasselbe Aufgabenblatt noch einmal ausgeteilt, allerdings gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Einheit fortzusetzen.

Wenn bei allen SuS dieselbe Partei gewonnen hat, so ist der Auftrag, dass sie versuchen sollen, die Bezirke nun neu einzuteilen, damit die andere Partei die Nase vorne hat. Wieder arbeitet jeder einzeln.

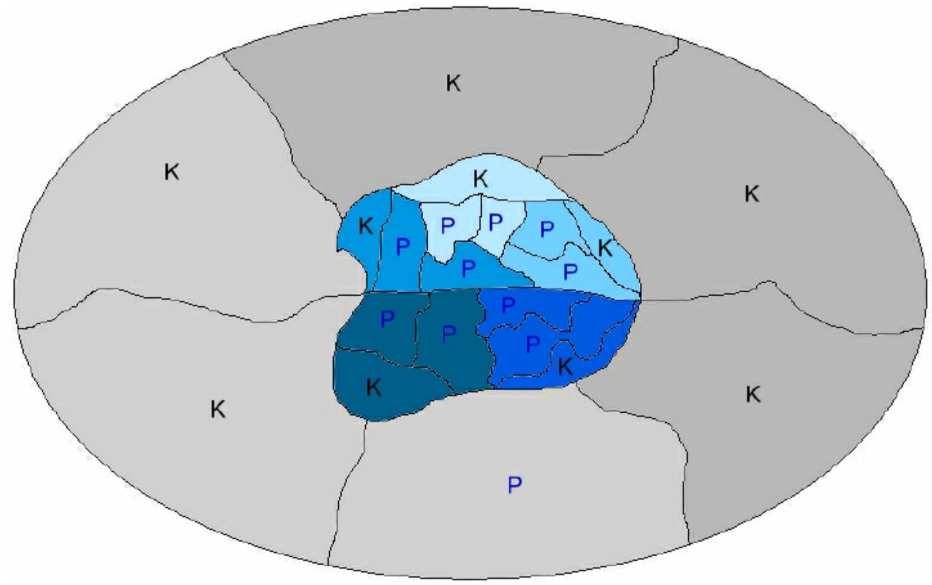
Kamen manche der SuS aber zu anderen Ergebnissen, so kann man Zweierteams bilden, bei denen die PartnerInnen jeweils unterschiedliche Wahlausgänge festgestellt haben.

Welche Methode man als Lehrperson wählt, kann man auch kurzfristig entscheiden, wenn man sieht, zu welchen Entscheidungen die SuS gekommen sind.

Hier zwei mögliche Wahlausgänge (in der ersten Abbildung gewinnt die Partei K, in der zweiten die Partei P):



vgl. Robert Schulz 2004



vgl. Robert Schulz 2004

Die Lehrperson lässt die Klasse nun überlegen, wie es zu den verschiedenen Ergebnissen kommen konnte. Was haben sie bei der zweiten Runde anders gemacht, dass die Wahlen tatsächlich anders ausgingen?

Hat man einen Computer mit Internetanschluss zur Verfügung, so kann man die SuS auch selbst recherchieren lassen, warum dieses Phänomen auftritt und zu welchen Zwecken es verwendet wird. Die SuS sollen gezielt nach „Wahlmanipulation durch Festlegung von Wahlbezirken“ googeln, das sollte sie schon auf die richtigen Seiten bringen. Mit ein wenig mehr Aufwand für die Lehrperson kann auch ein WebQuest erstellt werden. Ein WebQuest ist eine von der Lehrperson selbst erstellte Internetseite, auf der man wiederum andere Seiten verlinken kann. So kann die Recherche der SuS gelenkt werden und sie bekommen genau die Informationen, die man ihnen abverlangt. Ich habe eine Seite mit Google Sites erstellt (`https://sites.google.com/site/willrogersphaenomen/`), Screenshots dazu befinden sich im Anhang.

Nach der Arbeitsphase werden die Ergebnisse im Plenum verglichen und diskutiert. Die Lehrperson kann am Ende der Einheit noch auf das Will-Rogers-Phänomen zu sprechen kommen und somit den Bogen spannen zwischen Gerrymandering und Will Rogers. Dazu können durchaus die Beispiele präsentiert werden, die oben genannt wurden, nur das Krebsbeispiel sollte in einen anderen Kontext gestellt werden.

Entdeckendes Lernen und Fehlvorstellungen

Gagné beschrieb, wie bereits ganz zu Beginn erwähnt, die Entdeckung als ein Konstrukt in Form beobachtbarer Ereignisse, Neber legte nach, dass es auch darum gehe, Wissen durch eigene Aktivität aufzubauen und Zusammenhänge selbständig zu suchen.

Das beobachtbare Ereignis in der Aufgabe sind die verschiedenen Wahlausgänge und die eigene Aktivität ist das selbständige bestimmen der Wahlbezirke und somit auch der Wahlausgänge. Das Interesse der SuS wird gleich zu Beginn geweckt, wenn es heißt, sie sollen die Bezirke noch einmal einteilen, damit die jeweils andere Partei gewinnt. Dadurch werden sie zu dem Zeitpunkt schon intrinsisch motiviert, eine neue Kombination von Teilgebieten zu finden und somit neue Wahlbezirke zu formen. Nach der zweiten

Einteilung arbeiten die SuS komplett eigenständig weiter, was die Eigeninitiative und das Aktivwerden der Lernenden fördert, wie von Friedlander beschrieben. Die Kinder erarbeiten sich ihr Wissen anhand von Informationen aus dem Internet selbst, wobei diese Informationen bereits für sie vorsortiert wurden (siehe eigene Google-Site und Linksammlung im Anhang). Dadurch, dass sie hier völlig frei arbeiten können, können sie die Informationen auch besser verarbeiten, speichern und wieder aufrufen. Die SuS bilden eigene Zusammenhänge und können bei ihren Recherchen eher den wissenschaftlicheren Ansatz verfolgen und sich Näheres über das Will-Rogers-Phänomen aneignen, oder aber sie informieren sich genauer über das US-Wahlsystem, bei dem Gerrymandering auch heute noch betrieben wird. Bei beidem werden neue Zusammenhänge in selbständiger, aktiver Auseinandersetzung erarbeitet und Ergebnisse im Gedächtnis verankert, ganz nach dem Sinne des entdeckenden Lernens.

Kompetenzen und Lernziele

Inhaltlich ist auch diese Aufgabe in Dimension I4, der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik anzusiedeln. Da es beim Will-Rogers-Phänomen eigentlich nur um eine neue Gruppierung von Daten und Mittelwertbildung geht, kann die Aufgabe durchaus schon in der 6.Klasse gemacht werden, sobald die SuS dem Umgang mit „Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik“ kennen gelernt haben.
Die Komplexitätsdimension ist beim Gerrymandering wieder K3 - Reflektieren, denn die SuS müssen nachdenken über „Interpretationen, Argumentationen oder Begründungen“. Würde man nur das Will-Rogers-Phänomen betrachten, wo es um reine Mittelwertbildung geht, so wäre die Komplexitätsdimension nur K1 - Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten, weil es dabei nur um leichte Rechnungen und leicht anwendbares Wissen geht.
Die Handlungsdimension ist wohl H4 - Argumentieren und Begründen, weil

die SuS hier nach eigener Recherche eine schlüssige Argumentation liefern müssen, wie es zu den verschiedenen Wahlausgängen kommen konnte und welches mathematische Phänomen dahinter steckt. (vgl. kompetenzorientierte Reifeprüfung, S. 13-17)

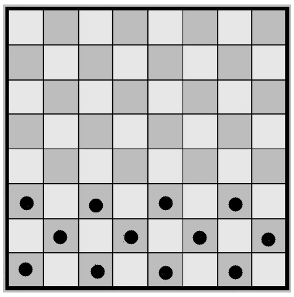
Die Lernziele, die durch diese Aufgabe erreicht werden, möchte ich wieder Listenartig aufzählen.

- Die SuS finden in eigenständiger Arbeit heraus, was das Will-Rogers-Phänomen ist.
- Die SuS ordnen eigenständig das Gerrymandering dem Will-Rogers-Phänomen unter.
- Die SuS entdecken, dass Wahlsysteme hinterfragt werden müssen und nicht immer die Partei mit mehr Stimmen gewinnt.
- Die SuS kombinieren einfache Gruppenbildung in Datenmengen mit statistischer Manipulation.
- Die SuS erarbeiten eine kurze Präsentation, und erläutern den MitschülerInnen die Ergebnisse ihrer Recherchen.

3.3 Dame

Christian Hesse betreibt in seinem Buch *Warum Mathematik glücklich macht* ein Ding der Unmöglichkeit. Er beschreibt ein Spiel, bei dem es nie jemand ins Ziel schaffen kann und beweist im Anschluss auch, warum das nicht geht. Genau damit werden wir uns in diesem Abschnitt auch beschäftigen.

Bei dem Spiel handelt es sich um eine Einzelspielervariante des Spieles Dame, wobei die Regeln ein wenig abgeändert und angepasst werden. Man braucht ein Damebrett und 12 Spielsteine. Zu Beginn des Spieles werden die Steine auf die schwarzen Felder in den ersten drei Reihen des Brettes aufgestellt. Das Ganze sollte so aussehen:



Die Steine können nun wie beim Spiel Dame bewegt werden. Das heißt, sie können einen diagonal vor sich liegenden Stein, falls das Feld dahinter frei ist, überspringen und dort dann zum Liegen kommen. Der übersprungene Stein wird entfernt. Wichtig ist, dass die Steine sich nur nach vor, nicht zurück, bewegen dürfen. Ziel des Spieles ist es, mindestens einen Stein in die letzte Reihe des Spielbrettes zu bringen.

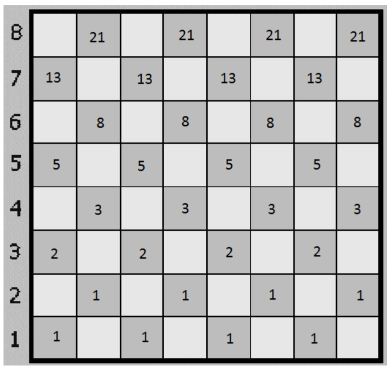
Damit sind die Spielregeln geklärt und wir können beginnen, zu spielen. Bald wird sich aber das Gefühl der Frustration einstellen, weil es nie gelingen wird, es in die letzte Reihe des Spielbrettes zu schaffen. Egal welche Strategien und Tricks man anwendet, solange man nur legale Züge durchführt, kommt man nicht ans Ziel. Doch wieso ist das so? Ist es wirklich unmöglich, einen Stein bis ganz nach hinten zu bringen? Und wenn ja, wie soll man das beweisen?

Die Antworten auf all diese Fragen liegen auf ein paar Seiten in Christian Hesses Buch begraben. Ich möchte versuchen, sie hier wiederzugeben.

Um zu zeigen, dass kein Stein es in die letzte Reihe schaffen kann, müssen wir das Spiel erst ein wenig mathematisieren. Dazu geben wir jedem schwarzen Feld, auf dem zu Beginn ein Stein steht, eine Zahl, der Stein darauf bekommt dieselbe Zahl. Wir nennen diese Zahl die *Energie* des Steines bzw. des Feldes. Außerdem nummerieren wir die Reihen von 1 bis 8.
Wichtig ist, dass diese Energie, die zu Beginn durch die Steine in den ersten drei Reihen bestimmt wird, sich während des Spielverlaufs nicht ändert.
Bei einem legalen Zug springt ein Stein von Reihe n in Reihe $n+2$, wobei der Stein dazwischen in Reihe $n+1$ übersprungen und entfernt wird. Reihe n und $n+1$ haben somit jeweils einen Stein weniger und Reihe $n+2$ hat einen mehr. Deswegen muss die Energie der Steine in der $(n+2)$-ten Reihe aus den Energien der n-ten und $(n+1)$-ten Reihe zusammengesetzt sein.
Da das für jede Reihe gilt, müssen die Energiewerte von der ersten bis zur letzten Reihe nach oben hin gestaffelt sein. Der Einfachheit halber bestimmen wir, dass die Energiewerte der Felder einer Reihe jeweils gleich sind. Der Energiewert eines Feldes der Reihe $n+2$ setzt sich aus den Energiewerten der Reihe n und $n+1$ zusammen, wobie $E_1 = 1$ und $E_2 = 1$.

$$E_{n+2} = E_n + E_{n+1}$$

Hier noch einmal in einer Grafik verdeutlicht:



Die Energie, die durch die Spielsteine zu Beginn des Spieles bestimmt wird, ändert sich laut Voraussetzung nicht. Wir nennen sie die *Gesamtenergie*. Diese *Gesamtenergie* der Ausgangssituation können wir leicht berechnen. Es stehen jeweils 4 Steine in einer Reihe. Die 4 Steine der ersten Reihe haben jeweils Energie 1, die vier Steine der zweiten Reihe auch und jeder der Steine der dritten Reihe hat Energie 2. Damit haben wir die Anfangsbedingungen

$$E_1 = 1, E_2 = 1$$

und somit eine Gesamtenergie von

$$E_{gesamt} = 4 \cdot E_1 + 4 \cdot E_2 + 4 \cdot E_3 = 4 + 4 + 8 = 16.$$

Die Gesamtenergie aller Steine zu Beginn des Spieles beträgt 16 und verändert sich im Laufe des Spieles nicht. Der Energiewert der letzten Reihe ist aber $E_8 = 21$. Das bedeutet, dass ein einziger Stein in dieser Reihe mehr Energie haben müsste, als das Brett von Anfang an zur Verfügung hatte, was schlicht und einfach unmöglich ist(vgl. Hesse 2013, S. 64-69).[5] Damit haben wir nun bewiesen, dass es unmöglich ist, auch nur einen der Steine in die letzte Reihe zu bringen.

Hintergrund dieser Methode ist, dass diese *Energie*, die man betrachtet, eine *Invariante* ist. „Invarianten sind einfache mathematische Objekte (z.B. Zahlen) oder Eigenschaften, die sich unter gewissen Operationen auf den betrachteten Objekten nicht oder nur kontrolliert verändern.“ (Löh 2008, S.1) Invarianten werden dazu verwendet, schwierige Ausgangsprobleme in leichtere Probleme zu verwandeln, deren Lösung einfacher zu finden ist, wobei die Invariante natürlich sorgfältig und passend gewählt werden muss. (vgl. Löh 2008, S.1)

[5] gesamte Idee und Beweisführung entnommen aus Christian Hesse - Warum Mathematik glücklich macht

Clara Löh zählt in einem Paper über Invarianten bekannte Beispiele von Invarianten auf:

- In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Längen der Katheten immer genau so groß wie die das Quadrat der Hypothenuse. (Satz von Pythagoras)
- Die Winkelsumme im Dreieck beträgt immer $\pi = 180°$
- Seien A und B die Endpunkte einer Strecke und K ein Halbreis über dieser Strecke. Für jeden Punkt C auf K gilt, dass der Winkel ACB 90° beträgt. (Satz von Thales)

(vgl. Löh 2008, S. 5)

Dame im Unterricht

Die Aufgaben, die bisher besprochen wurden, waren alle gleich aufgebaut. Den SuS wurde ein Problem gestellt, bei dessen Lösung sie auf paradoxe Situationen stießen und bestimmte Phänomene selbst entdeckten. Diese Aufgabe ist nun anders, denn diesmal bekommen sie kein Arbeitsblatt, auf dem ein Problem zu lösen ist, sondern die Einheit beginnt mit einem Spiel.

Zu Stundenbeginn bekommen die SuS Spielbrette und Steine (das Spielbrett kann natürlich auch auf Papier ausgedruckt werden). Ob einzeln oder zu zweit gearbeitet wird, kann in der jeweiligen Situation selbst entschieden werden. Aufgabe der Lehrperson ist es, den Spielverlauf zu erklären und dabei nicht zu verraten, dass das Ziel des Spieles nicht erreicht werden kann. Die SuS sollen zuerst selbst ein wenig ausprobieren, um ein Gefühl für das Spiel zu bekommen.
Wahrscheinlich wird sich von selbst irgendwann ein wenig Frustration breit machen und die Vermutung: „Das geht überhaupt nicht!“wird in den Raum geworfen.
An dieser Stelle kann die Lehrperson nun intervenieren und zugeben, dass es

tatsächlich keine Lösung gibt. Sie kann nun beginnen, den Unmöglichkeitsbeweis langsam aufzurollen.

Mein Vorschlag ist, dabei wie folgt vorzugehen:
Zuerst erklärt man den SuS die Idee, die schwarzen Felder des Brettes zu nummerieren, und diese Nummern als *Energie* zu bezeichnen. Man kann dann mit ihnen die ersten beiden Reihen mit lauter 1-ern nummerieren und dann erklären, dass die jeweils darauf folgende Reihe die Summe der zwei vorherigen darstellen muss. Es ist klar, dass in der dritten Reihe überall die Zahl 2 stehen muss. Nun lässt man sie die *Gesamtenergie* aller Steine berechnen, die in den ersten drei Reihen liegen. Ist dies geschafft, kann man sich gemeinsam überlegen, dass sich diese Energie nun nicht weiter verändern wird, wenn man legale Züge macht.
Die SuS können den Rest des Brettes dann selbst mit den richtigen Zahlen/Energiewerten versehen und entdecken, dass in der letzten Reihe die Zahl 21 steht. Daraus sollten sie selbst in der Lage sein, zu folgern, dass sie mit ihrer „Anfangsenergie“ nicht so weit kommen können.

Die Erkenntnis, die sich für die SuS in dieser Aufgabe verbirgt, ist, dass ganz alltägliche Dinge, wie beispielsweise ein Spiel, mit ein wenig Kreativität und einer guten Idee mathematisiert und dadurch erklärt werden können. Der Großteil der Menschen würde bei der Aufgabe, herauszufinden, ob es bei dem Spiel möglich ist, einen Stein in die letzte Reihe zu bekommen, beginnen, auszuprobieren. Sie würden nie zum Ziel kommen und für sich „wissen“, dass es nicht geht. Nur die wenigsten beginnen, sich bei der Aufgabenstellung ein passendes Konzept zu überlegen, wie man das Ganze auf logische Art und Weise begründen könnte.
Den SuS wird durch das Spiel und den darauf folgenden Beweis aufgezeigt, wie man auch anders an Probleme herangehen kann, als durch bloßes Probieren.

Bei der Aufgabe gibt es aber noch viel mehr zu entdecken. Erstens kann man den SuS die Theorie einer *Invarianten* erklären und sie dann selbst

nach weiteren suchen lasssen. Alle oben genannten Beispiele von Invarianten kennen die SuS zum Zeitpunkt, wenn dieses Spiel gespielt wird, bestimmt schon. In Schulbüchern finden sie auch schnell viele weitere Beispiele.
Als zweiten Anreiz liefert die Aufgabe die Fibonacci-Folge. Die SuS dazu im Internet selbst recherchieren zu lassen, wäre wohl eine Überforderung, weil sie die mathematischen Formalitäten vieler Erklärungen nicht verstehen würden. Mit passenden Schulbüchern bzw. einer weiteren selbst erstellten Internetseite kann die Fibonacci Folge und ihre Anwendungen durchaus in selbständiger Arbeit erschlossen werden.

Entdeckendes Lernen und Fehlvorstellungen

Ausubel spricht bei entdeckendem Lernen davon, dass dadurch effektive Problemlösestrategien entwickelt und wissenschaftliche Methoden gelehrt werden.
Bei diesem Spiel geht es genau darum. Viele würden durch bloßes Probieren an dieses Problem herangehen und irgendwann nicht weiterkommen. SuS entdecken mit dieser Aufgabe, dass es auch andere Strategien gibt, wie man Probleme lösen kann. Besonders in der heutigen Zeit, in der wir uns vom automatisierten Rechnen weg und hin zu Verständnis und Problemlösestrategien entwickeln, ist es wichtig, dass die SuS verschiedene solcher Strategien kennen lernen. Mit dem Spiel haben sie gesehen, wie durch geschicktes Einsetzen einer Invariante die Lösung plötzlich kinderleicht wurde. Durch eigene Recherchen können sie herausfinden, welche Probleme noch durch Invarianten gelöst werden können und sehen, dass es dafür unzählige Beispiele gibt.
Bruner verlangt, dass SuS zu selbständigen und spontanen Denkern erzogen werden, dazu gehört auch, dass sie außerhalb der typischen Schemata denken.
Wie auch bei den Beispielen davor sei erwähnt, dass die SuS bei der Lösungsfindung ständig selbst aktiv sind und die Erkenntnisse selbst im Gedächtnis einord-

nen können. Es ist wahrscheinlicher, dass sie sich ein halbes Jahr später noch an das Spiel erinnern, in dem sie die Verwendung einer Invariante entdeckt haben, als an irgendeinen Merktext, der nur passiv ins Heft abgeschrieben wurde.
Bei der Ausarbeitung dieser Aufgabe zeichnen sich sehr schön die Phasen des Probierens und die des planvollen Handelns ab, die Karin Ernst beschrieben hat. Ebenfalls spielen hier, noch viel mehr als bei den anderen Beispielen, Fragen eine große Rolle. Besonders am Anfang, wenn die meisten noch in der Pobierphase sind, ob sie vielleicht doch einen Stein ans Ende des Feldes hieven können, werden sie viele Fragen stellen, die von der Lehrperson aufgegriffen und während der Erklärung später wieder eingebunden werden sollten.

Kompetenzen und Lernziele

Im Lehrplan steht: „Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden.“ Außerdem: „Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.“(AHS Lehrplan Mathematik, S. 1)
Damit ist die Aufgabe ganz klar im Lehrplan verankert. Die SuS lernen durch dieses Spiel zwar keinen neuen Rechenalgorithmus und eine solche Aufgabe wird es bei der Zentralmatura sicher auch nicht geben. Dennoch ist es wichtig, und steht deswegen auch im Lehrplan, dass auch das mathematische Denken gefördert wird und die SuS Problemlösetechniken außerhalb des BIFIE-Fragenkatalogs kennen lernen.

Trotzdem kann die Aufgabe auch mit dem Kompetenzmodell argumentiert werden, denn schon die Handlungsdimension H1 - Darstellen, Modellbilden wird erfüllt. Ein Unterpunkt davon ist nämlich: „ein für die Problemstellung geeignetes mathematisches Modell verwenden oder entwickeln." Auf Komplexitätsebene werden Verbindungen hergestellt (K3), weil im Lösungsprozess mehrere Begriffe und Sätze auftauchen, wie zum Beispiel die Invarianten und die Fibonacci-Zahlen. Nur in der Inhaltsdimension haben wir ein Problem, die Aufgabe unterzubringen, weil sie keine der vier Dimensionen anspricht. Das ist so, weil die Aufgabe nicht darauf ausgerichtet ist, die SuS inhaltlich weiterzubringen, sondern die Problemlösestrategie lehren will. (vgl. kompetenzorientierte Reifeprüfung, S. 13-17)

Die konkreten Lernziele, die ich in der Aufgabe sehe, sind folgende:

- Die SuS lernen einen abstrakten Gedankengang zu einem sehr simplen Spiel kennen, indem sie das Spiel mithilfe der Lehrperson mathematisieren.
- Die SuS konstruieren ein Modell für die Lösung eines Problems.
- Die SuS finden heraus, was Invarianten sind und wozu sie in der Mathematik verwendet werden.
- Die SuS entdecken, dass die Nummerierung des Spielfeldes eine Fibonacci-Folge bildet.
- Die SuS kombinieren die Fibonacci-Folge mit den Energiewerten der Felder und merken sie sich dadurch leichter.

3.4 Spielerfehlschluss

Als Geburtsstunde dieses Phänomens wurde der 18. August 1913 verzeichnet, ein sehr denkwürdiger Tag für das Casino von Monte Carlo. An jenem Abend wurde nämlich am Roulettetisch ein Vermögen eingenommen. Die Farbe *Schwarz* hatte einen Run und erschien 26 Mal in Folge. Während dieser Serie setzten die Spieler immer öfter auf *Rot*, weil sie der Meinung waren, dass nach so viel *Schwarz* auch wieder einmal *Rot* kommen muss. Die Farbe *Rot* war so lange ausgeblieben, dass es nun echt an der Zeit war, dass sie wieder erscheint. Genau dieser Gedanke wurde als der *Spielerfehlschluss* definiert (in der Wirtschaftsmathematik auch bekannt als *Gambler's fallacy* oder *Monte Carlo fallacy*). (vgl. Hesse 2011, S. 135)

Dieser Fehlschluss wird des Öfteren begangen und wurde dementsprechend oft bearbeitet und beschrieben. Ich beziehe mich in dem Kapitel insbesondere auf Rudolf Taschner, Gero von Randow und Christian Hesse.

Rudolf Taschner beginnt in seinem Buch *Zahl Zeit Zufall. Alles Erfindung?* das Kapitel zu diesem Thema mit „Hinter dem puren Zufall, wie er zum Beispiel beim Fallen der Kugel auf eine der 37 Nummern des Roulettekessels regiert, verbirgt sich Mathematik. Das Gesetz der großen Zahl."(Taschner 2007, S.118)

Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses sich bei vielen Wiederholungen eines Zufallsexperiments der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses langfristig annähert. Wenn also ein Zufallsexperiment genügend oft hintereinander ausgeführt wird, dann „nähern sich die Anteile der einzelnen möglichen Ausgänge des Experiments ihren theoretischen Mittelwerten an. (vgl. Hesse 2011, S.139)
Taschner erklärt dies an zwei einfachen Beispielen. Er schreibt, dass mit mathematische Präzision beweisbar ist, „dass sich die Häufigkeit, mit der ein Würfel beim ziellosen Werfen auf eine bestimmte Augenzahl fällt, immer enger an die vorhergesagte Wahrscheinlichkeit von einem Sechstel annähert,

je mehr Würfe man durchführt.
Ebenso ist mit mathematischer Präzision beweisbar, dass sich die Häufigkeit, mit der die Roulettekugel auf einer bestimmten Nummer zwischen zero und 36 zu liegen kommt, immer mehr an die vorhergesagte Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{37}$ annähert, je länger das Roulettespiel dauert.“(Taschner 2007, S.118)

Was ist es nun aber, das den Spielerfehlschluss verursacht? Das ist leicht zu beantworten, es handelt sich nämlich um eine Fehlvorstellung des Gesetzes der großen Zahlen. Im Gesetz der großen Zahlen wird von relativen Häufigkeiten gesprochen, die nicht zu verwechseln sind mit den absoluten Häufigkeiten. Bei vielen Wiederholungen eines Versuches stabilisieren sich zwar die relativen Häufigkeiten, das heißt aber nicht, dass auch die absoluten Häufigkeiten dasselbe tun.
Beim Spielerfehlschluss glaubt man nun, dass beispielsweise beim Werfen einer Münze langfristig gesehen genauso oft *Kopf* fallen muss wie *Zahl*.
Es ist aber genau das Gegenteil der Fall: Die Differenz zwischen der absoluten Häufigkeit eines Ereignisses und der erwarteten Anzahl (der Hälfte aller Würfe) wird auf Dauer immer größer. Je mehr Versuche man macht, desto größer ist der Unterschied (vgl. Hesse 2011, S. 142).

Christian Hesse hat das anhand eines kurzen Experiments getestet. Er hat eine Münze 200 Mal geworfen und dabei jedes Mal eine 0 notiert, falls das Ergebnis *Kopf* war und eine 1, falls *Zahl* eingetreten ist. Er hat sich dann die relativen und absoluten Häufigkeiten des Ereignisses *Kopf* angesehen und das Ganze in einer Tabelle notiert (siehe Hesse 2011, S. 143).

Um das Ganze zu überprüfen, habe ich das Experiment nachgemacht und dabei folgende Ergebnisse erhalten:

Wurffolge:

1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0
0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0
0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1
0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0

Nach n Würfen	**Anzahl der Zahlwürfe**	**Abweichung von $\frac{n}{2}$**	**Relative Häufigkeit der Zahlwürfe**	**Abweichung von 0,5**
20	11	1	0,55	0,05
40	19	1	0,475	0,025
60	26	4	0,433	0,067
80	36	4	0,45	0,05
100	47	3	0,47	0,03
120	54	6	0,45	0,05
140	62	8	0,443	0,057
160	73	7	0,456	0,044
180	86	4	0,478	0,022
200	95	5	0,475	0,025

Zum Vergleich hier noch die Ergebnisse von Christian Hesse (Hesse 2011, S. 143)

Nach n Würfen	**Anzahl der Kopfwürfe**	**Abweichung von $\frac{n}{2}$**	**Relative Häufigkeit der Kopfwürfe**	**Abweichung von 0,5**
20	14	4	0,7	0,2
40	26	6	0,65	0,15
60	36	6	0,6	0,1
80	47	7	0,5875	0,0875
100	56	6	0,56	0,06
120	66	6	0,55	0,05
140	77	7	0,55	0,05
160	89	9	0,55625	0,05625
180	100	10	0,5556	0,0556
200	111	11	0,555	0,055

In beiden Münzwurfserien erkennt man nun schön, dass die absoluten Häufigkeiten eines Ereignisses immer mehr von $\frac{n}{2}$, also der Hälfte aller Würfe, abweicht und diese Abweichung immer größer wird. Man muss bei diesen beiden Serien natürlich im Hinterkopf behalten, dass es mit nur 200 Würfen sehr kurze Folgen sind und die Ergebnisse bei längeren Experimenten noch viel deutlicher wären. So muss man sich bei unseren kurzen Wurffolgen die Ausreißer wegdenken und sehen, dass die absoluten Abweichungen wirklich zu immer größer werdenden Beträgen tendieren.

Gleichzeitig sieht man auch, dass die Abweichungen der relativen Häufigkeiten vom Wert $\frac{1}{2}$ immer kleiner werden (auch hier wieder ohne die Ausreißer). Wir folgern daraus, dass die Annäherung an den Erwartungswert nur bei den relativen Häufigkeiten stattfindet, nicht aber bei den absoluten Häufigkeiten. Damit ist gezeigt, dass der Spielerfehlschluss, also die Verwechslung der relativen und absoluten Häufigkeiten, tatsächlich eine Fehlvorstellung ist.

Das Fazit: „Nachdem zum tausendsten Male in einer Folge *Kopf* geworfen wurde (und die sorgfältige Untersuchung der Münze zeigt, dass sie *fair* ist) - hat dann beim tausenundersten Wurf die *Zahl* bessere Chancen?
Nur wenn die Münze ein Gedächtnis und eine Steuerung hätte. Gleiches gilt für die Lottotrommel und das Roulette: Sie erinnern sich an nichts.“(von Randow 1992, S. 70)

Eine etwas andere Herangehensweise an dasselbe Problem präsentiert Gero von Randow in *Das Ziegenproblem - Denken in Wahrscheinlichkeiten*. Er spricht nämlich nicht vom *Gesetz der großen Zahlen*, das oft fehlinterpretiert wird, sondern vom *Gesetz der kleinen Zahlen*, das irrtümlicherweise angenommen wird. Als *Gesetz der kleinen Zahlen* beschreibt er „[das Gesetz] wonach sich Eigenschaften eines Zufallsprozesses auch in kurzen Sequenzen widerspiegeln oder sich eine statistische Verteilung auch aus kleinen Stichproben ablesen lässt.“(von Randow 1992, S. 68)
Als Beispiel zitiert er ein Problem von Kahnemann und Tversky:
„In einer Stadt gibt es zwei Krankenhäuser. Im größeren Krankenhaus werden täglich etwa 45 Babies geboren, im kleineren rund 15. Sie können davon ausgehen, dass ungefähr 50% aller Babies Jungen sind. Freilich variiert der genaue Prozentsatz von Tag zu Tag. Manchmal liegt er über, manchmal unter 50%. Ein Jahr lang notierte man in jedem der beiden Krankenhäuser die Tage, an denen mehr als 60% der Neugeborenen Jungen waren. Was meinen Sie, welches Krankenhaus notierte mehr solcher Tage?“
Von 95 Befragten meinten 21, dass das größere Krankenhaus mehr solcher Tage hat, 21 meinten das kleinere und 53 meinten es wäre in beiden Krankenhäusern ungefähr gleich. Das bedeutet, dass 74 von 95 Befragten nicht er-

kannten, dass die Wahrscheinlichkeit im kleineren Krankenhaus höher liegt. Im größeren Krankenhaus ist die Stichprobe größer, das heißt, dass es wahrscheinlicher ist, dass dort die Gesamtverteilung sich den 50% annähert. Das kleinere Krankenhaus hingegen stellt eine kleinere Stichprobe dar, weswegen die Wahrscheinlichkeit für Ausreißer, also Tage mit 60%, höher liegt. (vgl. von Randow 1992, S. 69)
Auch der Spielerfehlschluss trägt seine Wurzeln laut Kahnemann und Tversky in der irrtümlichen Annahme eines *Gesetzes der kleinen Zahlen*, nämlich „dass jede Sequenz eines Zufallsprozesses die Gesamtverteilung widerspiegeln müsse - und wenn sie das nicht tut, dann wird eine Ausgleichsmechanismus erwartet, der bald in die andere Richtung wirke. “(von Randow 1992, S. 70)

Spielerfehlschluss im Unterricht

Eine Idee, wie das Ganze im Unterricht präsentiert werden kann, lieferte o. Univ.-Prof. Mag. Dr. Walter Schachermayer in der Vorlesung zu Finanzmathematik. Er ließ uns Zweierteams bilden und stellte uns dann folgende Aufgabe: Ein Teammitglied sollte eine Münze 200 Mal werfen und dabei die Ergebnisse notieren - eine 0 für *Kopf* und eine 1 für *Zahl*. Das andere Teammitglied sollte sich, unabhängig vom Partner, eine Liste ausdenken. Es kamen also immer zwei Wurffolgen zustande, wobei eine echt zufällig und die andere ausgedacht war. Professor Schachermayer behauptete, er könne, wenn er beide Listen vor sich liegen habe, sofort entscheiden, welches die echte und welches die gefälschte war. Er hatte tatsächlich immer Recht. Wie hatte er das nun angestellt?

Er hat ganz einfach unsere menschliche Schwäche ausgenutzt, mit Zufall nicht umgehen zu können. Wenn man sich eine Wurfserie ausdenkt, so denkt man, dass es eher unwahrscheinlich wäre, dass öfter als drei oder vier Mal in Folge dasselbe Ereignis eintritt. Professor Schachermayer musste also nur schauen, welche der beiden Listen „regelmäßiger“aussah, das heißt schnellere

Wechsel von *Kopf* und *Zahl* hatte. Die Liste mit den längeren Sequenzen von *Kopf* oder *Zahl* war die echte, die andere die gefälschte.

Betrachten wir noch einmal das Ergebnis meiner Münzwürfe:

1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0

0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0

0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0

0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1

0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0

Christian Hesse schreibt, die Wahrscheinlichkeit, ein Teilstück von mindestens sechsmal hintereiander *Kopf* oder *Zahl* bei 200 Würfen zu erreichen, liege bei 0,8. (vgl. Hesse 2011, S. 150)
Tatsächlich finden wir in der Liste vier Teilstücke, in denen die 0 sechsmal hintereiander auftaucht, das längste Teilstück enthält sogar achtmal die 1.

Genau dasselbe Experiment kann man auch mit SuS in der Schule durchführen. Allerdings bedarf es ein wenig Vorbereitung. Da man als Lehrperson nicht sehen sollte, welches Teammitglied die Münze wirft und welches fälscht, bittet man die SuS, das Experiment zu Hause durchzuführen und die Ergebnisse zur nächsten Einheit mitzubringen. Die Schulstunde beginnt dann damit, dass die Listen eingesammelt und von der Lehrperson inspiziert werden. Dann kommt der große Auftritt der Lehrperson, in dem sie die falschen von den richtigen Wurffolgen unterscheidet. Die SuS werden ziemlich erstaunt sein, genauso wie wir damals im Hörsaal bei Professor Schachermayer. Dieses Staunen und die Neugierde nutzt man aus, um die SuS selbst überlegen zu lassen, woran man die richtigen und falschen Listen erkennen kann.

Die SuS kennen die Liste ihres Partners/ihrer Partnerin vorher auch nicht. Nun können sich die Zweierteams zusammensetzen und die Listen vergleichen. Was fällt ihnen auf? Welche signifikanten Unterschiede gibt es in der Liste?

Die Idee ist, dass die Kinder selbst erkennen, dass in den echten Listen

längere Sequenzen auftreten, als in den ausgedachten.
Sobald diese Entdeckung gemacht worden ist, setzt die Lehrperson wieder ein und erklärt, warum so lange Folgen des gleichen Ereignisses passieren können. Dabei reicht es, das Gesetz der großen Zahlen zu erklären, ohne die genaue mathematische Schreibweise einzuführen.

Den Kindern soll in dieser Einheit klar werden, dass der Zufall oft anders handelt, als wir es uns intuitiv vorstellen können. So könnte es rein theoretisch passieren, dass die Münze 100 Mal nacheinander auf *Kopf* fällt, ohne einmal *Zahl* anzuzeigen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze bei insgesamt 200 Würfe irgendwann sechsmal hintereinander auf dieselbe Seite fällt, liegt sogar bei 0,8 (siehe Hesse 2011, S. 150).

Als nächste Aktivität, die diesen Widerspruch zu unserer Intuition darstellen soll, kann man das Spiel *Schere - Stein - Papier* verwenden. Die Frage an die SuS ist, ob es eine gewinnbringende Strategie in dem Spiel gibt?

Rudolf Taschner beantwortet diese Frage in *Zahl Zeit Zufall* mit einem klaren: „Ja!“. Und zwar sei die beste Strategie der pure Zufall. Er begründet das auch mit dem menschlichen Unvermögen, mit Zufall umzugehen. Sobald man nämlich krampfhaft versucht, völlig zufällig zwischen den drei Möglichkeiten zu entscheiden, baut man irgendein Muster ein, das in dem Moment intuitiv am besten wirkt. Das Gegenüber kann, wenn er/sie aufmerksam ist, dieses Muster erkennen und gegen den Kontrahenten verwenden. Leichte Muster, wie zum Beispiel einen ständigen Wechsel von *Schere* zu *Stein* zu *Papier* und dann wieder von vorne, erkennt man sehr schnell, während komplexere Muster länger unerkannt bleiben. Dennoch wird man früher oder später entlarvt und spätestens dann funktioniert die Strategie nicht mehr. Würde man gegen einen Computer spielen, so würde dieser auch die komplexeren Muster schnell erkennen. (vgl. Taschner 2007, S. 121-123)

Man kann die SuS also ausprobieren lassen, wie schnell ein Muster vom Gegenüber erkannt werden kann, wenn eine/r mit Muster spielt und der/die andere völlig zufällig. Völlig zufällig könnte es zum Beispiel sein, wenn man mit der zweiten Hand würfelt und bei 1 und 2, 3 und 4 und 5 und 6 jeweils *Schere, Stein* oder *Papier* zeigt.

Die Frage ist jetzt nurmehr, was die SuS aus einer solchen Unterrichtsstunde denn mitnehmen.
Erstens hören sie vom *Gesetz der großen Zahlen*, das ihnen vielleicht bis dahin unbekannt war. Auch wenn man keine korrekte mathematische Schreibweise verwendet und die Konvergenzen nicht erklärt, so ist die Idee dennoch klar, dass sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei sehr vielen Versuchen an die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses annähert. Wenn die Klasse schon im Computereinsatz geübt ist und mit Excel umgehen kann, kann man sogar eine Simulation am PC durchführen, wo beispielsweise das Werfen eines Würfels simuliert wird. Die SuS können sich dann die relativen Häufigkeiten recht leicht bestimmen und mit den Wahrscheinlichkeiten vergleichen.
Zweitens wird ihnen bewusst, dass sie sich auf ihre Intuition nicht immer verlassen können, wenn es um den Zufall geht. Früher oder später werden manche vielleicht einen Gang ins Casino wagen, und da ist es sicher von Vorteil, wenn sie sich an die eine Unterrichtsstunde erinnern, in der die Lehrperson sie vor dem Roulette gewarnt hat. Sie werden wissen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel auf *Rot* fällt, nicht größer wird, wenn davor öfter *Schwarz* gefallen ist, weil die Kugel kein Gedächtnis hat.
Die Schulstunde steht also ganz unter dem Motto: „Wir lernen für das Leben, nicht für die Schule oder die Zentralmatura."

Entdeckendes Lernen und Fehlvorstellungen

Diese Unterrichtseinheit ist wieder ein sehr schönes Beispiel für die Entdeckung als Konstrukt beobachtbarer Ereignisse nach Gagné. Die SuS können beobachten, wie die Münzen geworfen werden und was für Ergebnisse dabei heraus kommen. Sie rechnen hier nicht nur mit den Daten irgendwelcher Zufallsexperimente, sondern führen es sogar selbst durch. Ebenso wird Bruners Forderung, die Lernenden bis zum Ende der Schulzeit zu selbständigen, spontanen Denkern zu machen, erfüllt. Durch die Auseinandersetzung mit diesem Beispiel entdecken die SuS den häufigen Fehlschluss, der gemacht wird und den sie ganz offensichtlich beim Erfinden einer Münzwurfserie auch gemacht haben. Die Tabellen mit den relativen und absoluten Häufigkeiten von *Kopf* oder *Zahl* verdeutlichen ihnen auch, wie diese Fehlvorstellung zustande kommen und viel wichtiger, wie sie richtig gestellt werden kann. Vor allem wenn die Kinder die Tabellen auch selbst erstellen und sehen, dass die absoluten Häufigkeiten sich bei vielen Versuchen immer weiter von $\frac{n}{2}$ entfernen, die relativen Häufigkeiten jedoch gegen $\frac{1}{2}$ konvergieren, merken sie sich diese Ergebnisse besser, womit wir wieder bei der Verankerung im Gedächtnis sind. Wenn man dem Entstehungsprozess eines Zufallsexperiments zusehen kann und sogar aktiv daran teil nimmt, verknüpft man es an mehreren Orten im Gedächtnis und kann später vielleicht eher darauf zurückgreifen.

Bei dieser Aufgabe besteht auch nicht die Gefahr, dass die Kinder auswendig lernen, was das Gesetz der großen Zahlen ist, weil ihnen durch das selbständige Ausarbeiten vielmehr die Ideen vermittelt wird. Ausubel sagt zwar, durch entdeckendes Lernen könne überprüft werden, ob Ideen verstanden oder nur auswendig gelernt wurden, ich finde aber, dass es durchaus auch zur Vermittlung der Ideen verwendet werden kann.
Nicht zu vergessen ist bei der Aufgabe auch die intrinsische Motivation, den „Zaubertrick" der Lehrperson zu verstehen und herauszufinden, warum er/sie die beiden Münzwurfserien so schnell und leicht voneinander unterschieden konnte.

Kompetenzen und Lernziele

In der 6. Klasse Oberstufe einer AHS lernen die Kinder in Mathematik das „Kennen des Begriffes Zufallsversuch, Beschreiben von Ereignissen durch Mengen“ und das „Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen“ (AHS Lehrplan Mathematik, S. 5)
Weiter oben im Lehrplan steht auch, dass der Unterricht aufzeigen soll, in wie vielen Bereichen des Lebens Mathematik vorkommt und dabei auch eine wichtige Rolle spielt. (AHS Lehrplan Mathematik, S. 2)

Durch diese Aufgabe wird den SuS der Begriff des Zufallsversuchs vermittelt und zwar, indem sie ihn sogar selbst durchführen. Auch die Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffes wird besprochen, insbesondere die Fehlvorstellung, dass Münzen, Würfe, Roulettespiele uvm. ein Gedächtnis hätten. Es wird der Zufall thematisiert, mit dem der intuitive Umgang vielen SuS (auch Studenten und LehrerInnen) besonders schwer fällt.

Um das Kompetenzmodell wieder heranzuziehen, befinden wir uns auch hier in Inhaltsdimension I4 - Wahrscheinlichkeit und Statistik. Die Komplexitätsdimension ist K2 - das Herstellen von Bedingungen, weil die Ausarbeitung vielschichtig ist. Erst einmal brauchen die Kinder den Begriff des Zufallsversuchs, dann spricht man von relativen Häufigkeiten, absoluten Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten und die SuS müssen alle diese Begriffe zuordnen, um danach bei der Erstellung der Tabellen damit rechnen zu können. Die Handlungsdimension ist auf H3 - Interpretieren festzulegen, denn die SuS müssen Zusammenhänge bzw. eigentlich Unterschiede zwischen den relativen und absoluten Häufigkeiten erkennen und sie im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechung und Zufallsversuche deuten. Sie müssen zutreffende und unzutreffende Interpretationen erkennen und verstehen. (vgl. kompetenzorientierte Reifeprüfung, S. 13-17)

Somit ergeben sich für mich folgende Lernziele:

- Die SuS erkennen die eigene Fehlvorstellung des Spielerfehlschlusses, indem sie ein Zufallsexperiment durchführen.
- Die SuS lernen, die Begriffe der relativen und absoluten Häufigkeit zu deuten und damit umzugehen.
- Die SuS setzen sich mit dem Gesetz der großen Zahlen auseinander.
- Die SuS führen einen Zufallsversuch selbst durch und analysieren danach die Ergebnisse.
- Die SuS interpretieren ihren eigenen Fehlschluss und stellen ihn richtig.

3.5 Zusammenfassung

Wir haben nun vier verschiedene Aufgaben betrachtet, die auf den ersten Blick völlig unterschiedlich erscheinen. Dennoch haben sie einige Gemeinsamkeiten, auf die ich hier noch aufmerksam machen möchte. Alle Aufgaben haben jeweils eine Besonderheit an sich. Beim Simpson Paradoxon stoßen die SuS auf einen Widerspruch, der sich dann als kein solcher entpuppt, beim Will-Rogers-Phänomen lernen sie durch das Gerrymandering ein Beispiel von Manipulation durch Gruppierung von Daten kennen. Das Spiel Dame benötigt eine besondere Problemlösestrategie und beim Spielerfehlschluss beschäftigt man sich mit einer häufigen Fehlvorstellung, die in vielen Köpfen falsch verwurzelt ist.
Wir sehen also, dass die Aufgaben alle den Moment der Überraschung gemeinsam haben, der sich als roter Faden durch die Ausarbeitungen zieht. Die SuS entdecken diesen Überraschungsmoment bei ihren Auseinandersetzungen damit und können ihn für sich nutzen, um entweder Fehlvorstellungen aufzuheben, oder aber um neue Techniken zu erlernen, die ihnen beim Lösen

von Problemen helfen. Das wichtigste ist wohl bei all den Beispielen das selbständige Denken der Lernenden, das gefördert wird und ihnen in jeder Lebenslage von Nutzen sein kann.
Ein weiteres Merkmal, das alle Beispiele gemeinsam haben, ist die Auflockerung, die dadurch in den Unterricht kommt. Bei diesen Aufgaben verspüren die SuS keinen Druck, dass sie sie unbedingt verstehen müssen, sei es für Prüfungen oder sonst irgendetwas. Hier wissen sie, dass sie sich mit ihren eigenen Gedanken zu dem Thema auseinandersetzen, auf eigene Faust recherchieren können und damit auch wirklich für sich lernen, um selbst etwas für später mitzunehmen. Das ist wohl der größte Mehrwert dieser Aufgaben.

4 Schlusswort

In der Schule wird von SuS immer mehr verlangt, der Mathematikunterricht bewegt sich weg von bloßen Rechenaufgaben, die mit eingeübten Rechenalgorithmen gelöst werden können, hin zu Verständnisaufgaben, in denen mehr Theorie überprüft wird. Die SuS finden sich oft in schwierigen Situationen wieder, wo sie selbständig Wege finden müssen, um diese zu bewältigen. Es ist also wichtig, ihnen neben dem Faktenwissen auch Strategien mit auf den Weg zu geben, die ihnen bei solchen Problemen helfen.

In dieser Arbeit habe ich versucht, ein paar Aufgaben zu entwickeln, durch die verschiedene Denkprozesse in Gang gesetzt werden, die es bei den üblichen Schulaufgaben nicht gäbe. Das entdeckende Lernen schien mir dafür die beste Methode zu sein, in der Hoffnung, dass die SuS dabei selbst aktiv werden und mehr von den Aufgaben behalten, wenn sie eigenstädig auf die Tücken gestoßen sind und sich Gedanken über die Lösung gemacht haben.

Natürlich werden sie nicht immer alleine zum Ziel kommen und auch falsche Hypothesen aufstellen. Das ist völlig in Ordnung und sogar erwünscht, denn genau darauf kann die Lehrperson ihre Erklärungen danach aufbauen und den SuS aufzeigen, wo ihre Gedankengänge in die falsche Richung gegangen sind. Durch das entdeckende Lernen sollte das Interesse und Verständnis der SuS größer sein und gleichzeitig sollte der Druck geringer sein, eine gute Performance abliefern zu müssen. Nichtsdestrotz werden aber auch wichtige Kompetenzen trainiert, die spätestens bei der Matura wichtig sein werden.

Wir haben gesehen, welche verschiedenen Fehlvorstellungen vor allem in der Stochastik auftreten können und wie man ihnen entgegen wirken kann.

Die Arbeit bietet somit viele Ideen und Beispiele, wie die Aufgaben im Unterricht gestaltet werden können und auch Ausblicke, was aufbauend auf die jeweiligen Unterrichtsstunden gemacht werden kann.
Wichtig dabei zu beachten ist, dass solche Unterrichtseinheiten viel mehr Vorbereitung seitens der Lehrperson erfordern. Erstens braucht man im Vor-

hinein viel mehr Material, zweitens muss man während der Entdeckungsphasen der SuS stets mit Fragen rechnen, auf die man spontan reagieren muss. Das heißt, dass die Lehrperson sich mit der Materie wirklich gut auseinandergesetzt haben muss, um auch tiefgründigere Fragen kompetent beantworten zu können.

Ich hoffe, dass ich bald selbst die Chance haben werde, einige der Beispiele im Unterricht auszuprobieren und zu sehen, wie gut Lernende mit meinen ausgearbeiteten Aufgaben zurecht kommen und ob sie davon so viel mitnehmen, wie ich es mir erhoffe.

Abstract

Die vorliegende Arbeit behandelt das entdeckende Lernen und wie es im modernen Mathematikunterricht eingesetzt werden kann. Sie ist unterteilt in zwei Teile, der erste ist theoretisch gehalten, während der zweite praktische Beispiele enthält.

Zu Beginn der Arbeit werden verschiedene Definitionen entdeckenden Lernens gegeben, Vor- und Nachteile abgewogen und ein kurzer Einblick in Fehlvorstellungen gewährleistet.

Den Hauptteil der Arbeit stellen für den Unterricht ausgearbeitete Beispiele dar, die gewisse Fehlvorstellungen ansprechen und die vorher erklärte Methode in die Praxis umsetzen. Alle Beispiele enthalten erst eine mathematische Erklärung, gefolgt von einer Ausarbeitung für den Unterricht und enden mit der Einbindung der Aufgabe in den Lehrplan bzw. das Kompetenzmodell der Reifeprüfung.

Im Anhang befinden sich Kopiervorlagen zu den ausgearbeiteten Beispielen.

5 Literaturverzeichnis

Literatur

[1] Barke, Hans-Dieter (2006). Chemiedidaktik - Diagnose und Korrektur von Schülervorstellungen. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag

[2] Bundesministerium für Bildung und Frauen (2012). Die kompetenzorientierte Reifeprüfung Mathematik AHS - Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben. URL: `https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_lfmath.pdf?4k21fr` - Download am 10.06.2016

[3] Bundesministerium für Bildung und Frauen (2007). Lehrplan für Mathematik der AHS Oberstufe. URL: `https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf` - Download am 10.06.2016

[4] Ernst, Karin (1998). Lernen mit Sinn und Verstand - neuere Erkenntnisse zum Entdeckenden Lernen. In: Angela Bolland u.a. (Hrsg.): Lernwege zum Thema Balance. Dokumentation der 10. bundesweiten Fachtagung der Lernwerkstätten, 22.-26.9.1997 in Bredbeck bei Bremen. - Bremen: Universität Bremen und Pädagogik-Kooperative, August 1998, S. 116 – 131. URL: `http://www.entdeckendes-lernen.de/3biblio/theorie/Sinn.pdf` - Download am 09.06.2016

[5] Golder, W.A. (2008). Das Will-Rogers-Phänomen und seine Bedeutung für die bildgebende Diagnostik (Troyes, Frankreich: Springer Medizin Verlag). Der Radiologe, 49(4), 348-354.

[6] Henze, Norbert (2013). Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls (10. Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.

[7] Hesse, Christian (2011). Achtung Denkfalle! - Die erstaunlichsten Alltagsirrtümer und wie man sie durchschaut. München: C.H.Beck oHG.

[8] Hesse, Christian (2013). Warum Mathematik glücklich macht - 151 verblüffende Geschichten. München: C.H.Beck oHG.

[9] Liebig, Sabine (2002). Entdeckendes Lernen – wieder entdeckt?. In: Bönsch, Manfred/Kaiser, Astrid. Basiswissen Pädagogik. Unterrichtskonzepte und –techniken. Band 4. Entdeckendes, Forschendes und Genetisches Lernen. Hohengehren: Schneider Verlag 2002, 4-16.

[10] Löh, Clara (2008). (In)Varianten - Warum Drachen überlegen und Ufos kollidieren. URL: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/clara.loeh/invarianten.pdf` - Download am 19.06.2016

[11] Martin, Edwin (1981). Simpson's Paradox Resolved: A reply to Hintzman. (American Psychological Association, Hrsg.). Psychological Review, 88(4), 372-374.

[12] Morisse, Hauke (19. März 2009). Bedingte Wahrscheinlichkeiten - Fehlschlüsse und Irritationen. URL: `haukemorisse.de/uni/stochastik.pdf` - Abgerufen am 11. April 2016

[13] Neber, Heinz (1973). Entdeckendes Lernen. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

[14] Reisner, Angelika (Oktober 1995). Elementare Fehlvorstellungen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Universität Wien: Hochschulschrift

[15] Schulz, Robert (2004). Beeinflussung des Wahlergebnisses durch unterschiedliche Zuschneidung der Wahlkreise/Gerrymandering. URL: `http://www.caerleon.de/science/gerrymandering.pdf` - Abgerufen am 19. April 2016

[16] Taschner, Rudof (2007). Zahl Zeit Zufall. Aller Erfindung?. Salzburg: Ecowin Verlag GmbH.

[17] von Randow, Gero (1992). Das Ziegenproblem - Denken in Wahrscheinlichkeiten. Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH.

[18] Winter, Heinrich (2016). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. (3.Auflage) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.

[19] Zocher, Ute (2000). Entdeckendes Lernen lernen - Zur praktischen Umsetzung eines pädagogischen Konzepts im Unterricht und Lehrerfortbildung. (Jörg Petersen & Gerd-Bodo Reinert, Hrsg.). Donauwörth: Auer Verlag GmbH

6 Anhang

1. Kopiervorlagen zum Simpson Paradoxon
2. Kopiervorlagen zum Gerrymandering
3. Screenshots der selbst erstellten Google-Site zu Gerrymandering
4. Kopiervorlage Dame-Spielfeld und Spielsteine zum Ausschneiden

Medikamententest

Du bist im Vorstand eines Pharmakonzerns, in dem gerade zwei neue Medikamente entwickelt wurden, und bekommst folgende E-Mail:

Löschen | Spam | Antworten | Weiterleiten | Verschieben | Mehr Speicherplatz

Medikamententest

Von: Forschungsteam — 10.06.2016 um 16:23 Uhr

Vollansicht schließen

Sehr geehrte Damen und Herren des Vorstandes,

unsere zwei neuen Produkte, Medikament A und Medikament B, wurden inzwischen getestet. Im Anhang finden Sie zwei Tabellen mit den Ergebnissen. Die erste ist recht allgemein gehalten, in der zweiten haben wir die Daten für Sie ein wenig aufgespalten.
Wir bitten um kurze Rückmeldung, welches der Medikamente auf den Markt kommen soll.
Die PR-Abteilung hat schon Ideen für die Werbekampagne und wartet nur noch auf Ihre Entscheidung.

Mit freundlichen Grüßen,
das Forschungsteam

Deine Aufgabe als Vorstand ist es nun, anhand dieser Zahlen zu entscheiden, welches Medikament das Bessere ist und unter dem Namen deines Konzerns verkauft werden soll.
Für welches der beiden entscheidest du dich?
Begründe deine Antwort!

Anhang:

Ergebnisse der Testung der beiden Medikament A und B - ein Vergleich

	wirkt	wirkt nicht
Medikament A	2037	63
Medikament B	784	16

	Patient in gutem Zustand		Patient in schlechtem Zustand	
	Testpersonen	wirkt	Testpersonen	wirkt
Medikament A	600	594	1500	1443
Medikament B	600	592	200	192

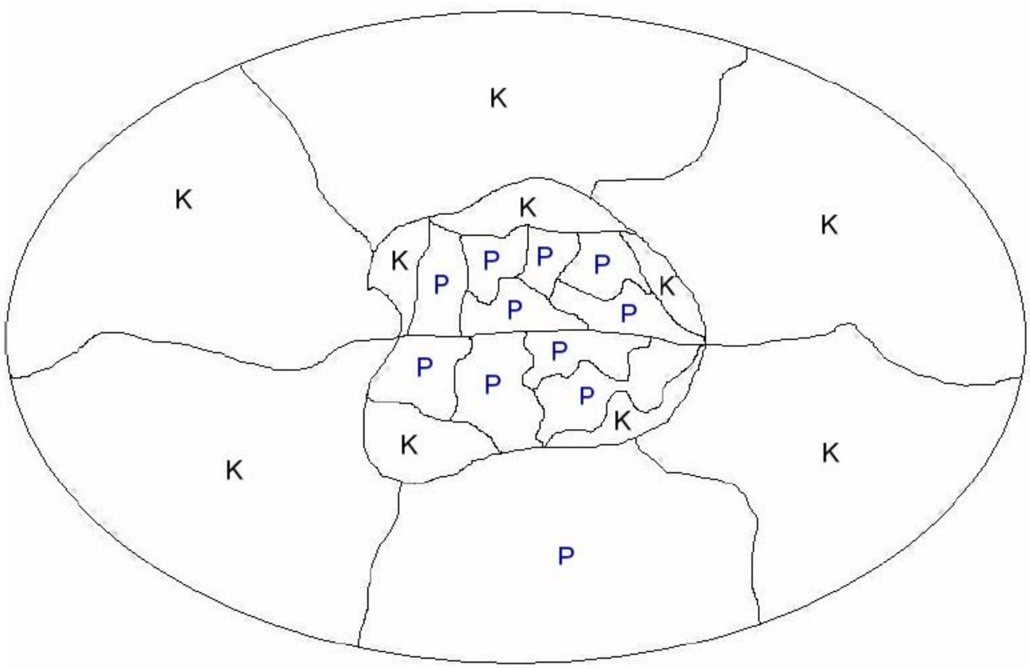
Wahlbezirke

In der untenstehenden Abbildung sieht man den Landstrich einer Stadt im Zentrum und einer ländlicheren Peripherie. Insgesamt gibt es in dem Gebiet 21 Teilgebiete, die alle in etwa dieselbe Einwohnerzahl haben.
Für die Wahl der Regionsvertretung sind die beiden Parteien **P** und **K** aufgestellt. Es müssen Wahlbezirke aus jeweils drei Teilgebieten geformt werden.

Die Partei **K** ist in der ländlichen Gegend stärker, während die Partei **P** in der Stadt ihre Hochburg hat.

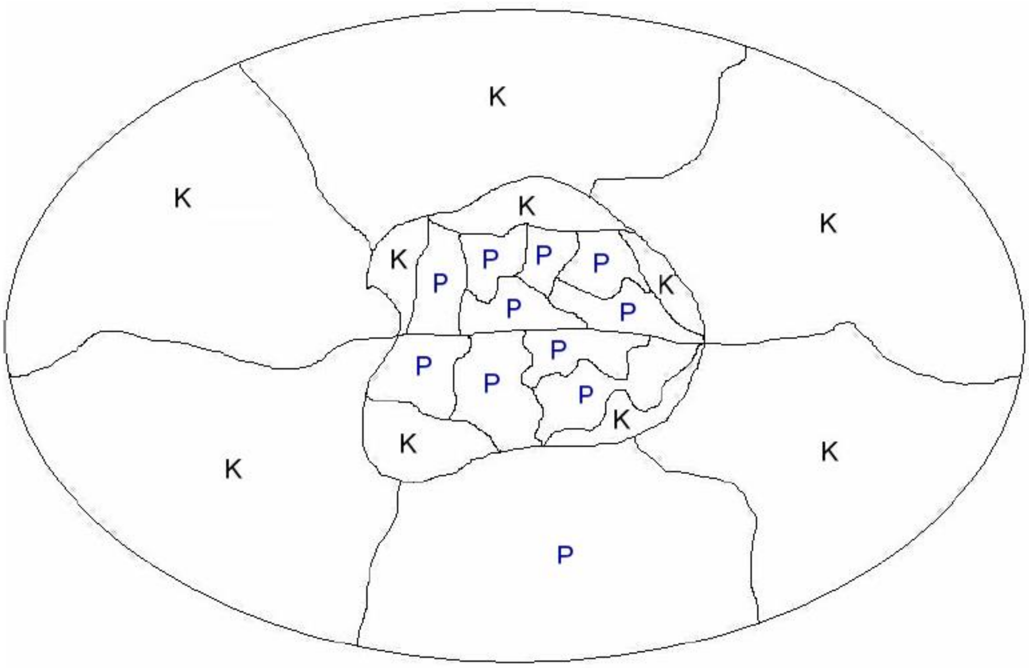
Die Wahlen gewonnen hat diejenige Partei, die die meisten Wahlbezirke für sich entscheidet. Einen Wahlbezirk hat eine Partei für sich entschieden, wenn sie in 2 der 3 Teilgebiete, die den Bezirk formen, gewonnen hat.

<u>Aufgabe:</u>
Teile die 21 Teilgebiete in 7 Wahlbezirke mit je 3 Teilgebieten. Welche der beiden Parteien gewinnt die Wahlen?



Die Bestimmung der Wahlbezirke ist nicht eindeutig. Das heißt, es gibt auch andere Arten, die Teilgebiete zu Wahlbezirken zu formen.

Versuche nun, die Wahlbezirke neu zu definieren, und zwar so, dass die andere Partei gewinnt.



Warum ist das so? Wie kann es sein, dass in ein und derselben Stadt rein durch Neubestimmung der Wahlbezirke ein anderer Wahlausgang möglich ist?

Nähere Informationen findest du unter:

https://sites.google.com/site/willrogersphaenomen/

Aufgabe:

Notiere dir alle wichtigen Erkenntnisse und Informationen in der Form, dass du sie später deinen MitschülerInnen präsentieren kannst. Stell dir dabei vor, dass sie überhaupt nichts zu dem Thema wüssten und du ihnen zum ersten Mal davon erzählst.

Startseite
Das Will-Rogers-Phänomen
Gerrymandering
Sitemap

Startseite

In der Statistik ist nicht immer alles ganz eindeutig. Schon durch Gruppierung oder sehr leichter Veränderung der Daten einer Menge, können Informationen verfälscht und die Ergebnisse manipuliert werden.
Ein besonderer Fall einer solchen Veränderung ist das **Will-Rogers-Phänomen**. Was genau das dieses Phänomen ist und wofür es in bestimmten Situation verwendet wird, erfährst du auf dieser Seite.

Untergeordnete Seiten (2): Das Will-Rogers-Phänomen Gerrymandering

Will Rogers Phänomen

Diese Site durchsuchen

Das Will-Rogers-Phänomen

"When the Olkies left Oklahoma and moved to California, they raised the average intelligence level in both countries."
(Will Rogers)

William Penn Adair Rogers (1879 - 1835) stammte aus Oklahoma und war ein Star am Broadway. Er arbeitete für Zeitung und Rundfunk und war besonders wegen seiner Sprüche landesweit in den USAbekannt. Während der Wirtschaftskrise der 1930er Jahre schrieb er einen Kommentar über die Wanderbewegungen in Nordamerika.
Dabei schrieb er obiges Zitat. 50 Jahre später wurde aus dieser Aussage das sogenannte **Will-Rogers-Phänomen**.

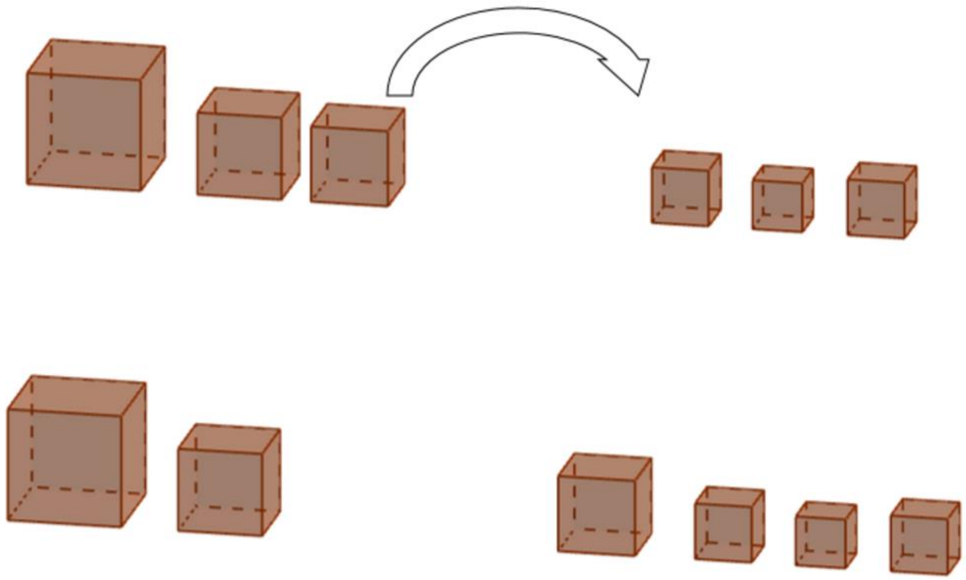
Es geht darum, dass er meinte, der Durchschnitts-IQ würde sich in beiden Ländern erhöhen, wenn eine Menschenmenge vom einen ins andere Lang umzieht.

Allgemein spricht man vom Will-Rogers-Phänomen, wenn dieVerschiebung eines Elements (oder mehrerer Elemente) von einer Gruppe in eine andere den Durchschnittswert beider Gruppen erhöht.
Der Effekt tritt aber nur dann ein, wenn 2 Voraussetzungen erfüllt sind:

- Erstens muss das verschobene Element einen kleineren Wert als der Durchschnitt der Elemente der Gruppe, aus der es verschoben wird, haben. Damit wird der Durchschnitt der verbleibenden Elemente erhöht.

- Zweitens muss das verschobene Element einen größeren Wert als der Durchschnitt der Elemente der Gruppe, in die es verschoben wird, haben. Damit wird der Durchschnitt der Elemente der Empfängergruppe erhöht.

Bildlich kann man sich das folgendermaßen vorstellen:



In der ersten Reihe gibt es zwei Gruppen, in der einen sind größere Würfel, in der anderen kleinere.
Der Übergang von der ersten in die zweite Reihe zeigt, dass der kleinste Würfel aus der ersten Gruppe, in die zweite verschoben wurde.
Dieser Würfel hatte in der ersten Gruppe ein Volumen, das kleiner als der Mittelwert war. In der zweiten Gruppe jedoch ist sein Volumen größer als der Mittelwert der Gruppe. Somit haben sich durch sein Verschieben beide Mittelwerte vergrößert.

Will Rogers Phänomen

Diese Site durchsuchen

Startseite >

Gerrymandering

In Zusammenhang mit dem *Will-Rogers-Phänomen* ist vor allem **Gerrymandering** zu erwähnen.
Gerrymandering ist ein Weg, jegliche Wahlen zu manipulieren, allein durch Veränderung der Grenzen der Wahlkreise.
Der Begriff ist auf den amerikanischen Gouverneur Elbridge Gerry im Bundesstaat Massachusetts zurückzuführen, der seinen eigenen Wahlbezirk so zugeschnitten hat, dass er am Ende einem Salamander glich. Er konnte somit die Wahlen mit 51% für sich entscheiden, obwohl er nur in 11 von 40 Wahlbezirke gewählt worden war.
Aus *Gerry* und *Salamander* wurde *Gerrymandering*.

Auf den folgenden Web-Seiten gibt es nähere Informationen zum Gerrymandering, insbesondere wo solche Wahlsysteme noch existieren, und wie sie geschickt manipuliert werden können.

http://www.heise.de/tp/artikel/16/16306/1.html

http://www.caerleon.de/science/gerrymandering.pdf

http://www.wahlrecht.de/lexikon/gerrymander.html

http://www.uswahl2016.at/usa-teil1/politiksystem.html