# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Der Unendlichkeitsbegriff im Mathematik- und Philosophieunterricht – Fächerübergreifender Unterricht“

verfasst von / submitted by

Natalie Herold

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

| | |
|---|---|
| Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet: | A 190 406 299 |
| Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet: | Lehramtsstudium: UF Mathematik, UF Psychologie und Philosophie |
| Betreut von / Supervisor: | Doz. Dr. Franz Embacher |

# Vorwort

Da die Mathematik zu einen meiner großen Leidenschaften zählt, war von Beginn meines Lehramtsstudiums klar, dass ich auch meine Diplomarbeit über ein Thema der Mathematik schreiben werde. Großem Dank gebührt dem Betreuer meiner Diplomarbeit, Dr. Franz Embacher, der mich auf die Idee gebracht hat, auch mein Zweitfach Psychologie und Philosophie in die Arbeit mit einfließen zu lassen und einen Fächerübergriff zwischen Mathematik und Philosophie zu wagen.

Ich bin ihm Aufgrund seiner Unterstützung bei der Themenfindung und -eingrenzung und seiner Geduld während der Verfassung der Diplomarbeit zu Dank verpflichtet.

Außerdem möchte ich meinen Freunden und Freundinnen danken, die mich ständig zum Weiterschreiben der Arbeit animiert und motiviert haben und im Laufe des Studiums nie den Glauben an mich verloren haben. Des Weiteren gilt mein besonderer Dank meiner Studienkollegin und Freundin Thi Quach, die mich durch alle Semester meines Studiums begleitet hat, mir ständig mit Rat und Tat beigestanden hat und meine Studienzeit zu einer spannenden und lustigen Zeit gemacht hat. Wir waren ein tolles Team.

Zu besonderem Dank verpflichtet bin ich meinem Freund, Martin Schrödl, der immer hinter mir steht und mich in meinen Taten bestärkt. Er hat mir meine Zeit in Wien durch seine Anwesenheit versüßt und dadurch, dass er meine Leidenschaft zur Mathematik teilt, auch oft im Studium helfen können.

Last but not least verdanke ich meiner Familie die Möglichkeit, überhaupt eine Universität besuchen zu können. Sie haben mich im Laufe meines Studiums jederzeit finanziell und beratend unterstützt und standen stets hinter mir.

Ich bin ihnen allen zu UNENDLICHEM Dank verpflichtet.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Warum interessiert der Mensch sich eigentlich für das Unendliche? Nur durch das Unendliche wird das Endliche, auf das unsere Welt und der Mensch beschränkt ist, erst begreifbar. Wie Hermann Weyl einst sagte, ist gerade die Mathematik die Wissenschaft des Unendlichen. Wie kann das Unendliche also besser beschrieben und begriffen werden, als durch die Mathematik?[1]

Doch gerade der Begriff des Unendlichen wird im Unterricht oft nicht ausreichend behandelt. Schülerinnen und Schüler haben oft ein sehr vielseitiges, aber auch falsches Bild von der Unendlichkeit. Dem soll diese Diplomarbeit entgegenwirken. Im fächer- und jahrgangsübergreifenden Unterricht zwischen Mathematik und Philosophie soll der Begriff der Unendlichkeit verständlich gemacht und dadurch der Umgang mit dem Unendlichen im Mathematikunterricht erleichtert werden.

Die Diplomarbeit zielt darauf ab, sowohl für Mathematiklehrer und –lehrerinnen, die nicht Philosophie unterrichten, als auch für Philosophielehrerinnen und –lehrer die über ein gutes mathematisches Grundwissen verfügen, verständlich die verschiedenen mathematischen und philosophischen Theorien darzulegen, die im fächerübergreifenden Unterricht behandelt werden können. Beginnend in der Antike soll auf die Paradoxa des Zenon von Elea eingegangen werden, die Metaphysik des Aristoteles, in der sich Problematik des Unendlichen wiederfindet, auf Hilbert, der ein Hotel für unendlich viele Gäste errichtet, bis hin zu Cantor, der die Grundlagen der Mathematik ins Schwanken bringt, aus heutiger Sicht aber auch festigt.

Da in der Fachmathematik und auch in der Fachdidaktik vor allem zwei Sichtweisen des Unendlichkeitsbegriffs wichtig sind, liegt auch bei dieser Diplomarbeit das Hauptaugenmerk darauf. Einerseits ist dies die aktuale Unendlichkeit, wie Cantor sie in seiner Mengentheorie geprägt hat, und andererseits die potentielle Unendlichkeit, wie sie in der Analysis angewendet wird.[2]

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil soll eine Einführung sein in die verschiedensten Theorien zur Unendlichkeit, die für den zweiten Teil der Arbeit von Bedeutung sind. Der zweite Teil der Arbeit beinhaltet einen Vorschlag für den Mathematik- und Philosophieunterricht, wo der Begriff der Unendlichkeit behandelt werden kann, um das Verständnis des Unendlichen im Mathematikunterricht zu verbessern. Am Ende dieses Teils findet sich außerdem ein Aufgabenpool, der auf verschiedenste Positionen von Philosophen und Mathematikern und einige Probleme in der Geschichte der Mathematik abzielt und versucht, diese Positionen und Probleme zu behandeln und den Schülerinnen und

[1] Vgl. Lorenzo Martínez, 2001, 6
[2] Vgl. Wörner, 2014, 1373

Schülern einen Einblick zu geben, wie das heutige Verständnis des Unendlichen entstanden ist und sich von der Antike bis heute entwickelt hat. Denn obwohl der Unendlichkeitsbegriff weder im Lehrplan eine Rolle spielt, noch in den Grundkompetenzen für die standardisierte Reifeprüfung auffindbar ist, ist er ausgesprochen wichtig für das Verständnis vieler Themen im Mathematikunterricht, vor allem in der Analysis, die in der Oberstufe eine sehr bedeutende Rolle spielt.

# Teil I

# Theorie

# 2 Das Unendliche

Bevor auf verschiedene Positionen zum Unendlichen eingegangen wird, müssen einige Begriffe geklärt werden.

Georg Cantor unterschied zwischen mathematischer Unendlichkeit, die in dieser Arbeit die größte Rolle spielt, physikalischer und transzendentaler oder, wie er sie auch nannte, absoluter Unendlichkeit.[3] Auf das Unendliche in der Mathematik, soll hier näher eingegangen werden.

## 2.1 Mathematische Unendlichkeit

In der Mathematik werden die Begriffe des potentiellen und aktualen Unendlichen unterschieden.

Diese Unterscheidung geht auf den griechischen Philosophen Aristoteles zurück.[4] Er unterschied zwischen möglicher und wirklicher Unendlichkeit, heute auch bekannt als potentielle und aktuale Unendlichkeit. Diese Begriffe sind heute noch anerkannt und akzeptiert und erwiesen sich vor allem später bei Cantor als sehr nützlich.[5]

### 2.1.1 Das potentiell Unendliche

Das potentiell Unendliche findet sich am leichtesten im Prozess des Zählens. Es findet sich zu jeder natürlichen Zahl ein Nachfolger. Das Zählen hat jedoch ganz natürliche Grenzen. Irgendwann gehen uns die Zeit und die Wörter aus, um die großen Zahlen zu beschreiben. Es besteht jedoch trotzdem zu jeder Zeit die Möglichkeit der Erweiterung dieser Grenzen, denn zu jeder Zahl gibt es einen Nachfolger, auch wenn wir diesen nicht mehr aussprechen können. Aus diesem Grund sprach Aristoteles auch von der möglichen Unendlichkeit.[6]

Die Möglichkeit eines endlos fortschreitenden Prozesses findet sich nicht nur beim Zählen und wird oft durch „…“ gekennzeichnet.[7] Diese „…“ kennzeichnen, dass der Prozess des Zählens nie abgeschlossen ist. Die potentielle Unendlichkeit finden wir also nur in unserem Denken, nicht aber in der materiellen Natur.[8]

### 2.1.2 Das aktual Unendliche

Das aktual Unendliche wurde von Aristoteles für unmöglich gehalten. Dabei wird der oben genannte offene Zählprozess als abgeschlossen gedacht. Einige Philosophen wie Platon

---

[3] Vgl. Barrow, 2008, 101
[4] Vgl. ebd., 41
[5] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 39
[6] Vgl. ebd., 147
[7] Vgl. Beutelspacher/Weigand, 2002, 6
[8] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 147

und Kant haben die philosophische Spekulation über das aktual Unendliche zwar zugelassen, den entscheidenden Schritt hat jedoch erst Cantor gewagt. Er hat das aktual Unendliche zu einem wichtigen Teil der Mathematik gemacht. Zu seiner Zeit war der Aufruhr in der Mathematik, Theologie und Philosophie groß, doch heute ist diese Art zu denken weder in der Wissenschaft, noch in der Schule mehr wegzudenken.[9]

Thomas von Aquin behauptete, dass diejenigen, die es wagen zu glauben, das aktual Unendliche verstehen und beschreiben zu können, sich mit Gott auf eine Stufe stellen, denn nur Gott alleine kann das Unendliche überhaupt denken.[10]

Aber was ist eigentlich eine aktual unendliche Menge?

Georg Cantor verstand unter einer Menge eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Wahrnehmung und des Denkens zu einer Gesamtheit.[11]

Eine Menge ist genau dann unendlich, wenn es möglich ist, sie bijektiv, das bedeutet umkehrbar eindeutig, auf eine ihrer echten Teilmengen abzubilden. Diese Eigenschaft können endliche Mengen keinesfalls haben.[12] Diese Definition einer unendlichen Menge geht auf Richard Dedekind zurück.[13]

---

[9] Vgl. ebd., 147
[10] Vgl. Delahaye, 2001, 14
[11] Vgl. Schichl/Steinbauer, 2009, 117
[12] Vgl. Lorenzo Martínez, 2001, 10
[13] Vgl. Delahaye, 2001, 14

# 3 Die Entwicklung des Unendlichen

Die liegende 8 als Zeichen für das Unendliche wurde zum ersten Mal von John Wallis (1616-1703), einem Mathematiker aus Oxford, verwendet. Im Jahr 1656 verwendete er dieses Zeichen zum ersten Mal in einem seiner Bücher. Entstanden ist es aus dem Symbol ⊂|⊃, das von den Römern für die Zahl 1000 gelegentlich anstelle des M verwendet wurde. Zur damaligen Zeit war 1000 bereits eine sehr große Zahl.[14] Auch der niederländische Mathematiker und Philosoph Bernhard Nieuwentijt (1654-1718) verwendete den Buchstaben m um das Unendliche damit zu bezeichnen.

Anfang des 18. Jahrhunderts wurde $\infty$ im Zusammenhang mit dem unendlich Kleinen verwendet, das in der mathematischen und philosophischen Literatur diskutiert wurde. Damals entwickelte sich die Infinitesimalrechnung, die sowohl in der Mathematik, als auch in der Philosophie zu Problemen führte.[15] Auf die Infinitesimalrechnung wird in Kapitel 3.3 eingegangen.

Zu einem fixen Bestandteil der mathematischen Symbolsprache wurde die liegende 8 erst durch Leonhard Euler (1707-1783). Ab dem 19. Jahrhundert wurde das Symbol zur Beschreibung von Grenzprozessen bei Folgen und Reihen verwendet, die zusammen mit Stetigkeit, Konvergenz und den exakten Theorien der Differential- und Integralrechnung die Infinitesimalrechnung ablösten. Mit der liegenden Acht wurde, im Aristotelischen Sinne, die potentielle Unendlichkeit bezeichnet. Wie später in der Arbeit erklärt wird, hat auch Cantor das Symbol nur für das potentiell Unendliche verwendet. Die aktuale Unendlichkeit erhielt von ihm die Bezeichnung $\aleph$ (Aleph).[16](Siehe Kapitel 3.4.6)

## 3.1 Das Unendliche in der Antike

In der Antike stellte das Unendliche in der Mathematik ein Problem dar. Der Begriff „unendlich" wurde zumeist vermieden. Endlose Prozesse waren zwar anerkannt, die Paradoxa des Zenon beeinflussten jedoch die Einstellung zum Unendlichen.[17]

### 3.1.1 Zenon von Elea (490-430 v.Chr.)

Zenon von Elea war Schüler des Parmenides. Parmenides prägte den Begriff des „Seins" als unveränderlich und zeitlos. Daraus folgerte er, dass es Bewegung nicht gibt, denn es würde bedeuten, dass mehr als nur ein „Sein" existieren muss, nämlich eines vor und eines

[14] Vgl. ebd., 20f
[15] Vgl. Reményi, 2001, 41
[16] Vgl. ebd., 41
[17] Vgl., Barrow, 2008, 41

nach der Bewegung. Bewegungen, die wir wahrnehmen, sind bloß Illusionen, die zur Oberfläche des Seins gehören.[18]

Kaum einer war von dieser Theorie überzeugt, da es überall eindeutige Beweise gibt, dass Bewegung tatsächlich stattfindet. Um seinem Lehrer aus dieser Lage zu helfen, wollte Zenon zeigen, dass die Existenz von Bewegung gar nicht so eindeutig ist wie gedacht. Er war begeistert von Parmenides‘ Theorie und lieferte vier „Beweise“ für die Unmöglichkeit von Bewegung. Diese wurden bekannt als Zenons Paradoxa.[19]

Die ersten beiden Paradoxa handeln von der Unendlichkeit. Im ersten Paradoxon behauptet Zenon, dass Bewegung deshalb nicht möglich ist, weil man zuerst die Hälfte der Strecke zurücklegen muss, dann die Hälfte der verbliebenen Hälfte, dann die Hälfte davon und so weiter. Man kann also nicht mit endlich vielen Schritten am Ziel ankommen, es bleiben nach n Schritten noch $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ der Gesamtstrecke, die zurückgelegt werden müssen. Da Zenon nicht an die Existenz des Unendlichen glaubte, war auch die Existenz von Bewegung nicht möglich.[20]

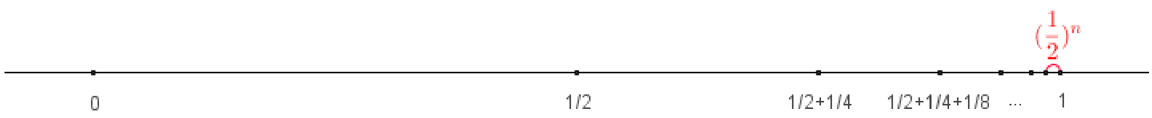


*Abbildung 1: Bewegung existiert nicht (vgl. Barrow, 2008, 37)*

Das zweite und weitaus berühmtere Paradoxon handelt von einem Rennen zwischen Achilles und einer Schildkröte. Da Achilles, der schnellste Läufer Griechenlands, schneller läuft als die Schildkröte, gewährt er ihr einen Vorsprung. Zenon behauptet, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen wird können, denn er müsse zuerst den Vorsprung, den er ihr gegeben hat, einholen, jedoch hat die Schildkröte in dieser Zeit einen neuen, aber kleineren, Vorsprung gewonnen. Nun muss Achilles diesen Vorsprung einholen. In der Zwischenzeit hat die Schildkröte erneut einen noch kleineren Vorsprung gewonnen usw. Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, bleibt jedoch stets vorhanden.

---

[18] Vgl. Barrow, 2008, 36
[19] Vgl. ebd., 36
[20] Vgl. ebd., 36f

Zenon sorgte mit diesen Paradoxa seinerzeit für große Verwirrung. In beiden Paradoxa werden die zurückgelegten Strecken von Schritt zu Schritt kürzer, eine endliche Strecke wird unendlich oft geteilt. Dies ist jedoch nur in der Theorie möglich.[21]

Der Vollständigkeit halber sollen hier auch das dritte und vierte Paradoxon zur Unmöglichkeit von Bewegung nicht unerwähnt bleiben.

Das dritte Paradoxon handelt von einem fliegenden Pfeil. Es besagt, dass ein fliegender Pfeil sich zu jedem Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befindet, wenn er sich in einem Zeitintervall kontinuierlich fortbewegt. Die Begründung dafür liegt darin, dass ein Zeitpunkt keine Dauer hat und der Pfeil sich nicht an zwei Plätzen zugleich befinden kann. Dies bedeutet, dass der Pfeil zu jedem Zeitpunkt „stillsteht“. Daraus schließt Zenon, dass der Pfeil während des gesamten Zeitintervalls bewegungslos ist. Das Paradoxon trägt den Namen Pfeilparadoxon.[22]

Das vierte Paradoxon handelt von drei gleich großen Reihen X, Y und Z bestehend aus Körpern. Reihe X steht still, Reihe Y bewegt sich mit maximaler Geschwindigkeit in die eine, Reihe Z mit maximaler Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung. Zenon behauptet nun, dass sich die beiden Reihen relativ zueinander mit doppelter maximaler Geschwindigkeit bewegen. Geschwindigkeit kann aber nicht maximaler als maximal sein und damit ist Bewegung unmöglich.[23]

### 3.1.2 Aristoteles (384-322 v.Chr.)

Aristoteles verwendete für die Unendlichkeit das Wort „apeiron“, das für grenzenlos, unvorstellbar groß, unbestimmt, aber auch für das Chaos stand, aus welchem unsere Welt entstand. Das Unendliche stellte für ihn etwas Unvollkommenes dar.[24]
Wie bereits in Kapitel 2.1 erwähnt, unterschied Aristoteles zwischen wirklicher und möglicher Unendlichkeit. Seiner Ansicht nach kann das Unendliche nur in der Möglichkeit existieren, also potentiell. Ein Beispiel für die mögliche Unendlichkeit sind die natürlichen Zahlen. Wir können unendlich lang zählen und kommen doch zu keinem Ende. Es ist jedoch nur eine mögliche Unendlichkeit, denn kein realer Zähler hat sie jemals erreicht und wird sie jemals erreichen, das Zählen ist also lediglich ein Prozess des auf die Unendlichkeit Zusteuerns.[25] Folgen dieser Art gibt es viele. Dazu zählen auch jene, die aus der möglichen

[21] Vgl. ebd., 46
[22] Vgl. Smullyan, 1993, 171f
[23] Vgl. Barrow, 2008, 282
[24] Vgl. Reményi, 2001 ,40
[25] Vgl. Barrow, 2008, 42f

Unendlichkeit kommen und dafür ein Ende haben, wie z.B. die negativen ganzen Zahlen. Diese Folgen können nicht als Ganzes begriffen werden, sie sind, nach Aristoteles, endlich und nähern sich lediglich an die Unendlichkeit beliebig weit an.[26]
Das aktual Unendliche wurde von Aristoteles strikt abgelehnt. Er war der Überzeugung, dass das aktual Unendliche in der Mathematik überflüssig ist. Zwar akzeptierte er die unendliche Folge der natürlichen Zahlen, jedoch nie deren Menge. Die unendliche Fortsetzbarkeit bedeutete für Aristoteles nicht ihre fertige Gesamtheit.[27]
Nach Aristoteles kann es keine materiellen Dinge geben, die unendlich groß sind. Die Existenz beliebig langer Zeiten konnte er jedoch nicht ausschließen, denn sonst müssten auch die Zeit, die natürlichen und die negativen ganzen Zahlen Anfang und Ende haben. Außerdem würde dies bedeuten, dass es einen kleinsten Baustein der Materie gibt, der nicht mehr halbiert werden kann, was für Aristoteles so absurd war, wie dass es eine größte Zahl geben könnte.[28]
Es ist wichtig zu klären, was es bei Aristoteles bedeutet, wenn etwas möglich ist. Er selbst erklärt dies am Beispiel der Olympischen Spiele. Wenn man sagt „die Olympischen Spiele finden statt“, steckt in dieser Aussage sowohl Möglichkeit, als auch Wirklichkeit. Tatsächlich finden die Olympischen Spiele in einem Vierjahreszyklus statt, dass die nächsten Spiele stattfinden, ist jedoch nur möglich, denn sie liegen noch in der Zukunft, können aber wirklich werden. Anders aber ist es bei der Unendlichkeit, denn sie ist zwar möglich, nach Aristoteles kann sie jedoch nicht wirklich werden. Ein Baumstamm kann theoretisch in unendlich viele Stück Holz zerlegt werden, praktisch jedoch wird der Prozess des Hackens in einer endlichen Zeit niemals zum Ende kommen. Eine unendliche Folge an Aufgaben kann nicht zu Ende gebracht werden.[29]
Im Gegensatz zu den früheren Ansichten, nach denen das Unendliche als etwas galt, das alles enthält, was überhaupt vorstellbar ist, ist das Unendliche bei Aristoteles genau das Gegenteil, es kann immer noch etwas dazugegeben werden. Das Unendliche ist ein Teil des tiefsten Wesens der Materie, denn sie kann beliebig oft geteilt werden. Dadurch ist das Unendliche überall in unserer Welt zu finden und kann unterschiedliche Formen annehmen. Das tiefste Wesen der Materie kann vom menschlichen Verstand nicht erkannt werden.[30]
Obwohl Aristoteles das potentiell Unendliche akzeptierte, war es für ihn etwas Unbefriedigendes. In seinem Weltbild hatte alles ein Ziel, ein „letztes Ende“, wo jede Bewegung ein Ende findet. Durch dieses Ziel erhielt alles einen Sinn und eine Bedeutung. Das potentiell

[26] Vgl. ebd., 43
[27] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 39
[28] Vgl. Barrow, 2008, 43
[29] Vgl. ebd., 43f
[30] Vgl. ebd., 44f

Unendliche hat dieses Ziel nicht, es fehlt der letzte Schritt, der ihr einen Sinn verleiht. Unendliches können wir nicht erklären, die Welt können wir nur erkennen, weil sie endlich ist und nur endliche Dinge enthält. Die Anzahl der Eigenschaften, die diese Dinge bestimmen, müssen endlich sein, denn sonst könnten wir sie nicht wissen.[31] Aus diesem Grund schließt Aristoteles das aktual Unendliche aus, denn es gibt in der Natur keine unendlichen Dinge.[32] Auch über die Unendlichkeit der Zeit hat Aristoteles sich Gedanken gemacht. Jedes Zeitintervall enthält die Unendlichkeit, denn es kann in immer kleiner werdende Intervalle geteilt werden. Für Aristoteles ist es aber dieses endlose Fließen der Zeit, das ihr die Möglichkeit der Unendlichkeit zu eigen macht. Wie schon bei den unendlichen Folgen, wo die Unendlichkeit vom Zähler nie erreicht werden kann, kann auch die unendlich weit entfernte Zukunft nie erreicht werden. Nach Aristoteles besteht die Welt schon ewig, doch der Vorrat an Materie und der Raum, in dem sie sich bewegt, sind endlich und die Zeit ist ein Maß für den Ablauf von Prozessen. Der Begriff der Zeit würde nicht existieren, wenn nicht der Mensch die Fähigkeit besäße, sie zu messen und zu erleben. Aristoteles begründet seine Annahme, dass die Welt unendlich alt ist, damit, dass man den ersten Moment, wenn es einen gegeben hätte, um die gleiche Anzahl an Jahren nach hinten verschieben könnte, wodurch der erste Moment noch früher wäre, usw.[33]

### 3.1.3 Archimedes (ca. 287-212 v.Chr.)

Archimedes von Syrakus wird aufgrund seiner bisher bekannten Schriften als der größte Mathematiker der Antike bezeichnet. Er war nicht nur Mathematiker, sondern auch Astronom, Physiker, Architekt und war mit den von ihm gebauten Abwehrwaffen am Krieg um Syrakus beteiligt. Bei der Einnahme der Stadt wurde Archimedes schließlich 212 v.Chr. getötet.[34]

Eine wichtige Eigenschaft der natürlichen und reellen Zahlen wird Archimedes zugeschrieben. Die so genannte „archimedische Eigenschaft" besagt, dass die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind. Dies ist leicht zu zeigen, denn für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n + 1$ eine größere natürliche Zahl, d.h. es kann keine größte natürliche Zahl geben. Die archimdische Eigenschaft kann auch auf die rellen Zahlen ausgeweitet werden und lautet dann wie folgt: Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $n > x$. Daraus lässt sich wiederum folgern, dass es zu jedem $a \in \mathbb{R}^{+}$ und $b \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt sodass $na > b$. Auch dies ist leicht gezeigt, denn würde es so ein n nicht geben, würde für alle natürlichen

[31] Vgl. ebd., 45
[32] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 150
[33] Vgl. Barrow, 2008, 45f
[34] Vgl. Schneider, 1979, 1f

Zahlen $n \leq \frac{b}{a}$ gelten und die natürlichen Zahlen wären beschränkt, was einen Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft bedeutet.[35]
Das Wort „unendlich“ benutzte Archimedes im Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen jedoch nicht, er bezeichnete sie lediglich als unbeschränkt. „Unendlich“ benutzte er in seinen Schriften nur einmal, zu Beginn seiner Schrift „Die Sandzahl“.[36]
In dieser Schrift befasste sich Archimedes mit sehr großen Zahlen. Sie war gerichtet an König Gelon von Syrakus. Archimedes deutete darauf hin, dass ein großer Teil der Menschheit glaube, dass die Anzahl der sich auf der Erde befindenden Sandkörner unendlich ist. Diejenigen, die anderer Meinung sind, würden aber zumindest sagen, dass es keine so große Zahl gebe, die die Anzahl der Sandkörner übersteigen würde. Archimedes zeigte in seiner Schrift, dass er sogar eine nennen kann, die nicht nur die Anzahl der Sandkörner auf der Erde übertreffen würde, sondern den gesamten Kosmos mit Sandkörnern ausfüllen würde. Als Kosmos wurde zur damaligen Zeit eine Kugel bezeichnet, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde und sein Radius die Verbindungslinie zwischen Erde und Sonne war.[37]
Archimedes begann mit der Konstruktion großer Zahlen mit der Zahl $10000 = 10^4$, die damals als sehr groß bezeichnet wurde. Die Zahlen von 1 bis $10^4 \times 10^4 = 10^8 = a$ bezeichnete er als die „1. Achtheit“. Als „2. Achtheit“ bezeichnetet er die Zahlen von $a$ bis $10^8 a = a \times a = a^2$. Die weiteren „Achtheiten“ werden genauso gebildet wie bisher, bis zur a-ten „Achtheit“, die bei der Zahl $a^a$ endet. $a^a = p$ ist eine 1 mit 800 Millionen Nullen. Die Zahlen von 1 bis $p$ nannte Archimedes die „1. Periode“. Die „2. Periode“ reichte dann von $p$ bis $10^8 p = p \times a$. Genauso bildete Archimedes weitere „Achter-Perioden“ bis zur Zahl $p^a$, die eine 1 mit $8 \times 10^{16}$ Nullen ist. Archimedes hätte noch größere Zahlen konstruieren können, doch reichten die bisher gebauten für seine Sandrechnung aus. Aus den damals üblichen Vorstellungen des Durchmessers eines Sandkornes und dem Durchmesser des Kosmos berechnete er, dass die Anzahl der Sandkörner, die im gesamten Kosmos Platz finden, in der 1. Periode liegen und damit nicht einmal annähernd als „unendlich“ oder „nicht mit einer Zahl beschreibbar“ bezeichnet werden kann.[38]
Archimedes gilt außerdem als ein Vorläufer der Infinitesimalrechnung, ohne dass Leibniz Kenntnis von seinen Schriften hatte.[39](Siehe Kapitel 3.3.5)
In seiner Methodenlehre teilt Archimedes ein Dreieck in Strecken. Er vergleicht diese Strecken mit Parabelsegmenten, indem er sie wiegt. Da zur damaligen Zeit die Ansicht üblich war, dass eine Strecke unendlich oft geteilt werden kann, wird davon ausgegangen, dass

---

[35] Vgl. Arens/Busam/Hettlich/Karpfinger/Stachel, 2013,121f
[36] Vgl. Schneider, 1979, 53f
[37] Vgl. Heuser, 2008, 6f
[38] Vgl. ebd., 7
[39] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 177

Archimedes der Auffassung war, dass ein Dreieck aus unendlich vielen Strecken besteht, die unendlich schlmale und unteilbare Streifen sind.[40]

### 3.1.4 Augustinus (354-430)

Auch in der Theologie spielte das Unendliche eine große Rolle. Ein großer Teil in Augustinus Schriften „De civitate Dei" widmete sich der Frage, ob die Unendlichkeit etwas sei, was nicht einmal Gott begreifen kann. Als einer der bedeutendsten Kirchenväter seiner Zeit befasste er sich mit der Lösung des Problems, ob Gott die endlose Folge der natürlichen Zahlen begreifen kann, oder ob er ebenso, wie wir Menschen, nicht alle Zahlen wissen kann. Er spekulierte damit, dass dasjenige, was für den Menschen unendlich ist, für Gott endlich ist, denn Gottes Erkenntnis selbst ist unendlich.[41]
Auch in späterer Folge wurde Gott von der Unendlichkeit bedroht. In der Renaissance waren vor allem zwei der Attribute Gottes im Vordergrund: seine Existenz als Wesen und seine Unendlichkeit. Dadurch, dass im Laufe der Jahre das Unendliche von den Mathematikern und Philosophen immer deutlicher verstanden wurde, entwickelte sich die Fragestellung, ob Gott nun auf das Attribut, nur ein Wesen zu sein, herabgestuft wird. Von den Theologen wird Gott nicht zwingend mit Unendlichkeit in Verbindung gebracht, jedoch wird er auch nicht für endlich gehalten. Es wird aber von ihnen klargestellt, dass Gott nicht herabgestuft wird, weil wir gelernt haben, das Unendliche zu verstehen.[42]

## 3.2 Eigenschaften unendlicher Mengen

Proklos Diadochus, Albert von Sachsen und Galileo Galilei erkannten bereits Eigenschaften unendlicher Mengen, die später zu Richard Dedekinds Definition unendlicher Mengen führen sollte.

### 3.2.1 Proklos Diadochus (410-485)

Als einer der berühmtesten Vertreter der athenischen Schule, die zu den neuplatonischen Schulen gehörte, diskutierte auch Proklos Diadochus das Problem des Unendlichen. Er entdeckte, dass eine unendliche Menge genauso viele Elemente haben kann wie eine echte Teilmenge dieser Menge. Er ließ, wie Aristoteles, nur das potentiell Unendliche zu und lehnte die aktuale Unendlichkeit ab.[43]
Er begründete dies folgendermaßen:

---

[40] Vgl. ebd., 165f
[41] Vgl. Barrow, 2008, 47
[42] Vgl. ebd,, 48
[43] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012,42f

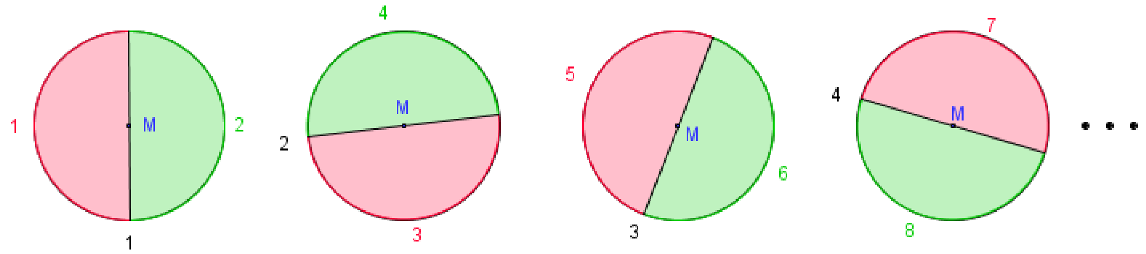


*Abbildung 2: Durchmesser eines Kreises (vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 44)*

Der Durchmesser eines Kreises teilt diesen in zwei gleich große Halbkreise. Da durch den Mittelpunkt eines Kreises unendlich viele Durchmesser gelegt werden können und durch einen Durchmesser zwei Halbkreise entstehen, entstehen durch unendlich viele Durchmesser doppelt so viele Halbkreise. Es werden jedoch niemals aktual unendlich viele Durchmesser sein, denn man wird niemals unendlich viele Durchmesser zeichnen können. Damit sind auch die doppelt so vielen Halbkreise immer endlich und die unendliche Teilung von Größen potentiell unendlich.[44]

## 3.2.2 Albert von Sachsen (1316-1390)

Geboren in Rickmersdorf bei Helmstedt war Albert von Sachsen einer der wichtigsten Logiker des Mittelalters. Er studierte in Prag und Paris, war Rektor der Universität von Paris und später Gründungsrektor der Universität Wien. Außerdem war er Bischof von Halberstadt. In seinem Buch „Sophismata" beschäftigte er sich mit den Paradoxien des Unendlichen und wurde vor allem durch seine Aussage „Nur Gott ist unendlich" bekannt. Eines seiner Beispiele hatte großen Einfluss auf die spätere Definition unendlicher Mengen und führte zu vielen Diskussionen über die Unendlichkeit.[45]

Eine unendlich lange Stange, mit einem quadratischen Querschnitt von 1x1 cm, wird in Bauklötze gleicher Größe zerschnitten. Legt man die unendlich vielen entstandenen Einheitswürfel in einer bestimmten Weise aneinander, kann man mit ihnen den gesamten Raum füllen. Zuerst baut man einen Würfel mit $2^3 = 8$ Bauklötzen. Im nächsten Schritt erweitert man den Würfel mit Seitenlänge 2 cm um weitere 15 Bauklötze. Somit entsteht ein Würfel mit Seitenlänge 3 cm, bestehend aus $2^3 + 15 = 27 = 3^3$ Bauklötzen. In einem weiteren Schritt entsteht ein Würfel mit Seitenlänge 4 cm, bestehend aus $4^3$ Bauklötzen.

[44] Vgl. ebd. 44
[45] Vgl. Barrow, 2008, 67f

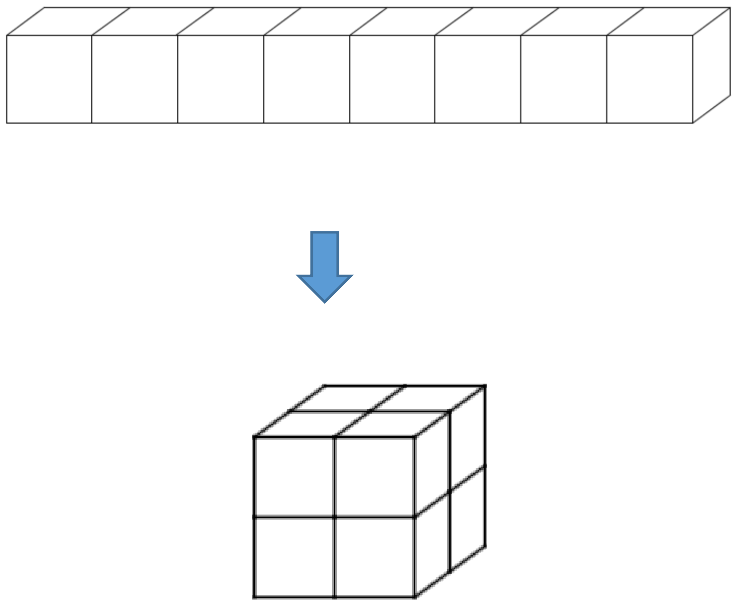

*Abbildung 3: Anordnung 1x4 wird zu einem 2x2 Würfel (vgl. Barrow, 2008, 69)*

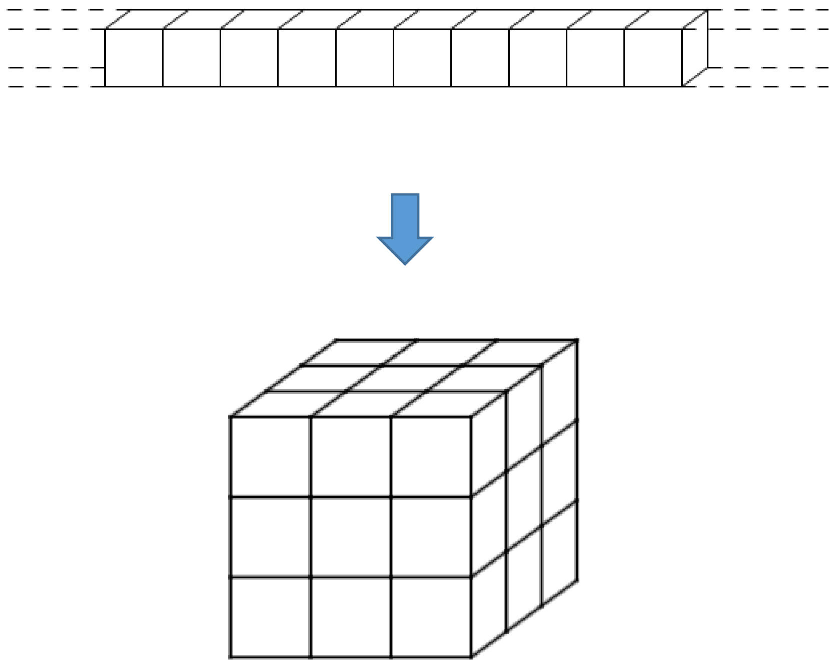

*Abbildung 4: Anordnung 1x27 wird zu einem 3x3 Würfel (vgl. Barrow, 2008, 69)*

Baut man immer so weiter, so entsteht ein unendlich großer Würfel, der den gesamten dreidimensionalen Raum ausfüllen kann. Dies bedeutet, dass der dreidimensionale Raum

aus gleich vielen Bauklötzen besteht, wie die unendlich lange Stange, die eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes ist.
Das Beispiel zeigt, dass bereits im 14. Jahrhundert die Eigenschaft unendlicher Mengen bekannt war, dass man jedem Element einer unendlichen Menge bijektiv ein Element aus einer echten unendlichen Teilmenge zuordnen kann. Mit seinem Beispiel legte Albert von Sachsen den Grundstein für Cantors Definition der abzählbaren Unendlichkeit.[46]

### 3.2.3 Nicolaus Cusanus (1401-1464)

Das Unendliche ist bei Cusanus das Unerkennbare, es ist dem Bewusstsein nicht zugänglich. An Cusanus‘ Definition des Unendlichen ist die Unzulänglichkeit unseres Bewusstseins deutlich zu erkennen. Er bezeichnete alles, was unser Bewusstsein wahrnehmen kann, dessen Eigenschaften wir erkennen und mit anderen Eigenschaften vergleichen können, als „Wissen“. Alles andere, was dem höheren Bewusstsein zuzuordnen war, das Wesen, das von allen Eigenschaften und Umkleidungen befreit ist, als „Nicht-Wissen“. Das „Wissen“ kann am leichtesten in der Mathematik überwunden werden. Sie ebnet den Weg zum „Nicht-Wissen“, das wir anstreben. Das „Nicht-Wissen“ offenbart sich in der Qualität des Mathematisierens. In diesem Bereich des „Nicht-Wissens“ befindet sich auch das Göttliche. Das Wissen und Vorstellen ist endlich, die Einsicht in das Wesen, welches das Ziel aller Erkenntnis ist, ist das Unendliche.[47]
Cusanus verglich das Verhältnis unseres Verstandes zur Wahrheit mit dem Verhältnis eines Polygons zum Kreis. Unser Verstand wird nie ganz an die Wahrheit herankommen, es wird aber immer ein noch näheres Erfassen der Wahrheit geben.

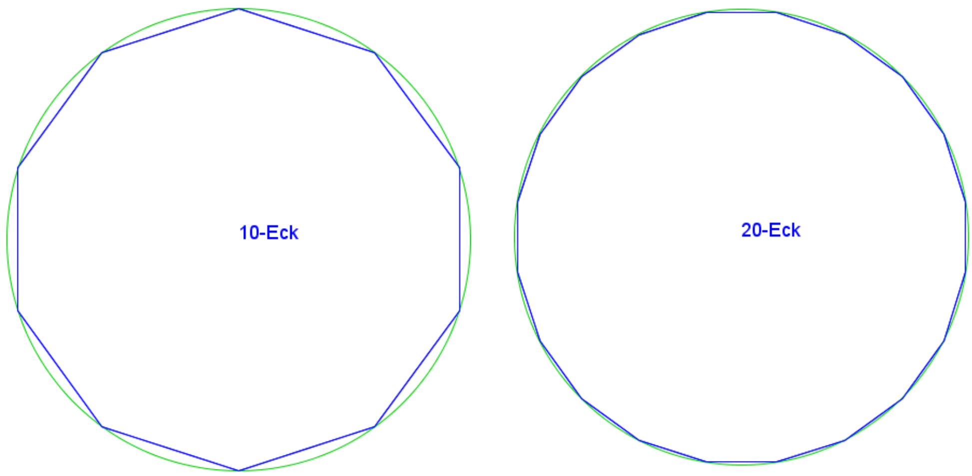


*Abbildung 5: Annäherung des Polygons an den Kreis*

[46] Vgl. ebd., 68
[47] Vgl. Ziegler, 1992, 69f

Egal wie sehr sich das Polygon an den Kreis annähert, es wird ihn nie vollständig erreichen.[48] So viele Eigenschaften der Mensch auch zu erkennen lernt oder wie sehr er sein Bewusstsein auch schärft, er wird die wahre Einsicht niemals erreichen und das Wesen von etwas erkennen können. Das Wesen ist der Kern, der von jeglichen Eigenschaften, Vorstellungen und Vergleichen befreit ist und der daher in seiner reinsten Form nie erkannt werden kann. Das Unendliche ist deshalb schon unerkennbar, weil es mit nichts verglichen werden kann. Der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen ist auf der Stufe des Wissens nicht möglich.[49] Eher, behauptet Cusanus, dass alles Endliche im Unendlichen seinen Ursprung hat. Nur mit Hilfe des Unendlichen kann man das Endliche begreifen.
Cusanus untersuchte das Unendliche in der Mathematik in erster Linie, um die Unendlichkeit Gottes zu erkennen. Für ihn ist das Unendliche in der Mathematik gleichzusetzen mit dem Unendlichen in der Philosophie.[50]
Cusanus' Überlegungen zur Annäherungen des Kreises mit Polygonen veranlasste Johannes Kepler (1571-1630) dazu, einen Kreis mit einem Polygon mit unendlich vielen Seiten gleichzusetzen und so die Kreisfläche durch Radius und Umfang des Kreises auszudrücken, indem er die Summe der unendlich vielen Dreiecke des Polygons berechnete. (Abb. 6)[51]

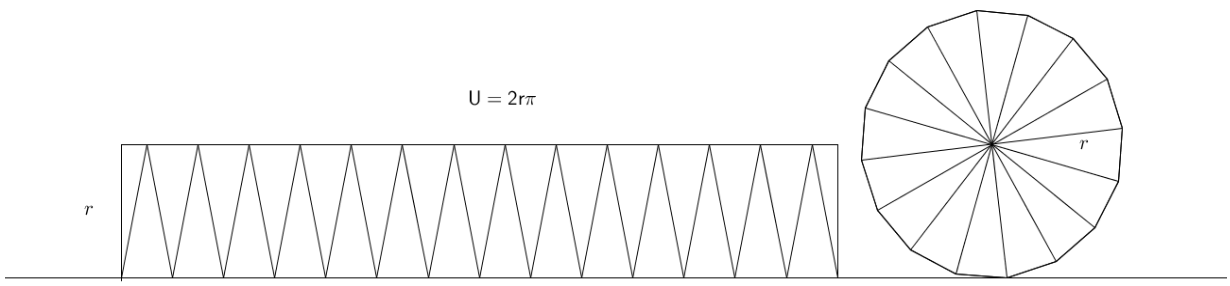


*Abbildung 6: Kepler's Herleitung des Flächeninhalts des Kreises*

### 3.2.4 Galileo Galilei (1564-1642)

Galileo Galilei war sehr interessiert an den Überlegungen der Mathematiker und Philosophen des Mittelalters zum Unendlichen. In seinem Werk „Unterredungen“ stellt er grundlegende Paradoxien unendlicher Mengen vor und zeigt einige ihrer besonderen Eigenschaften auf, die sie von endlichen Mengen unterscheiden.[52]

---

48 Vgl. Barrow, 2008, 54f
49 Vgl. Ziegler, 1992, 73f
50 Vgl. Bedürftg/Murawski, 2012, 46f
51 Vgl. Reményi, 2001, 40
52 Vgl. Barrow, 2008, 69

Zu Beginn der „Unterredungen“ wird mit dem Argument der Nachfolgerbildung geklärt, dass die natürlichen Zahlen unendlich sind. Danach wird die Folge der Quadratzahlen den natürlichen Zahlen zugeordnet. (Abb. 7) Welche der beiden Folgen hat nun mehr Elemente? Jeder Quadratzahl kann eine natürliche Zahl zugeordnet werden. Dies bedeutet, es gibt genauso viele Quadratzahlen wie natürliche Zahlen. Allerdings ist jede Quadratzahl in der Folge der natürlichen Zahlen enthalten. Die natürlichen Zahlen müssen also „zahlreicher“ sein, da zwischen den Quadratzahlen immer weitere natürliche Zahlen liegen. Galilei konnte dieses Paradoxon nicht aufklären und schloss lediglich daraus, dass die Attribute „größer“, „kleiner“ und „gleich“ nur für endliche Mengen gelten können.[53]
Aus heutiger Sicht würde man sagen, dass beide Mengen abzählbar unendlich viele Elemente beinhalten und somit gleich mächtig sind. (Siehe Kapitel 3.4.6)

| Natürliche Zahlen | → | Quadratzahlen |
|---|---|---|
| 1 | → | 1 |
| 2 | → | 4 |
| 3 | → | 9 |
| 4 | → | 16 |
| 5 | → | 25 |
| 6 | → | 36 |
| 7 | → | 49 |
| 8 | → | 64 |
| 9 | → | 81 |
| 10 | → | 100 |
| … | usw. | … |

*Abbildung 7: Zuordnung der Quadratzahlen an die natürlichen Zahlen (vgl. Barrow, 2008, 72)*

Dasselbe kann mit den geraden Zahlen gemacht werden: Jede gerade Zahl ist das Doppelte einer natürlichen Zahl und kann somit dieser natürlichen Zahl zugeordnet werden. Genauso können die ungeraden Zahlen den natürlichen Zahlen zugeordnet werden. Jedoch würde man intuitiv sagen, dass es nur halb so viele gerade oder ungerade Zahlen geben kann wie natürliche Zahlen. Galilei zeigte mit seinem Paradoxon, das dem von Albert von Sachsen entspricht, eine Eigenschaft von ausschließlich unendlichen Mengen. Diese können echte Teilmengen haben, die selbst unendlich sind.[54]

[53] Vgl. ebd., 71
[54] Vgl. ebd., 71f

## 3.3 Die Indivisiblen oder das unendlich Kleine

### 3.3.1 Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Bonaventura Cavalieri war Schüler Galileo Galileis. Er vertrat, wie Galilei, die Annahme, dass für unendliche und endliche Größen unterschiedliche Gesetze gelten.[55] Er versuchte, die Probleme mit der Unendlichkeit unter Zuhilfenahme geometrischer Interpretationen zu lösen. 1635 veröffentliche er in Bologna sein Werk „Geometrie der Indivisiblen“, was so viel bedeutet wie „Geometrie der unteilbaren Größen“.[56] Cavalieri nahm an, dass eine Linie aus unendlich vielen kleinen Linienstücken besteht, die nicht mehr weiter geteilt werden können. Diese unteilbaren Linienstücke sind Punkte, d.h. eine Linie besteht aus unendlich vielen Punkten. Die Indivisiblen von Körpern sind Flächen, jene von Flächen sind Linien und jene von Linien sind Punkte. Diese sind unendlich klein, infinitesimal, und unendlich viele.[57]

Aus diesen Überlegungen entstand das sogenannte Cavalieri’sche Prinzip. Dabei werden Körper in unendlich viele Flächen geteilt und miteinander verglichen. Haben diese Schnittflächen zweier Körper in derselben Höhe denselben Flächeninhalt, haben die Körper das gleiche Volumen.[58]

Das Cavalieri’sche Prinzip wird in der Schule heute noch unterrichtet. Es wird damit das Volumen von schiefen Körpern (Prismen, Pyramiden etc.) und anderen ungewöhnlichen Körpern berechnet. Zum Beispiel wird auch das Volumen einer (Halb)kugel mit dem Cavalieri’schen Prinzip hergeleitet.


*Abbildung 8: Cavalieri'sches Prinzip Herleitung der Volumsformel für die Halbkugel (Vgl. Arens/Busam/Hettlich/Karpfinger/Stachel, 2013,930)*

[55] Vgl. Reményi, 2001, 40
[56] Vgl. Blay, 2001, 42f
[57] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 177f
[58] Vgl. ebd., 2012, 178

Das Volumen der Halbkugel kann mit dem Volumen eines Zylinders mit ausgeschnittenem Kegel gleichgesetzt werden. Zylinder und Kegel haben den gleichen Radius r wie die Halbkugel und auch die gleiche Höhe r. Die Querschnittsflächen dieser Körper lassen sich leicht berechnen.


*Abbildung 9: Längsschnitt der Halbkugel und dem Zylinder mit eingeschriebenem Kegel*

Im Zylinder entsteht eine Kreisfläche, da durch den Kegel ein kleinerer Kreis ausgeschnitten wird. Der Flächeninhalt lässt sich wie folgt berechnen (Abb. 9):
Mit Hilfe des Strahlensatzes lässt sich der Radius der Querschnittsfläche des Kegels berechnen.

$$r : r = r_1 : h$$

$$r_1 = h$$

Der Flächeninhalt der Schnittfläche des Zylinders mit eingeschriebenem Kegel ist also $r^2\pi - h^2\pi$.
Der Radius der Querschnittsfläche der Halbkugel kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden.

$$r^2 = a^2 + h^2$$

$$a^2 = r^2 - h^2$$

$$a = \sqrt{r^2 - h^2}$$

Der Flächeninhalt des Schnittkreises ist also $a^2\pi = (r^2 - h^2)\pi = r^2\pi - h^2\pi$ und somit gleich groß wie die Querschnittsfläche des Vergleichskörpers. Somit haben die beiden Körper nach Cavalieri dasselbe Volumen, das sich wie folgt herleiten lässt:

$$Volumen\ des\ Zylinders - Volumen\ des\ Kegels = r^3\pi - \frac{r^3\pi}{3} = \frac{2r^3\pi}{3}$$

$$= Volumen\ der\ Halbkugel$$

Das Volumen der Kugel ist dann $\frac{4r^3\pi}{3}$.[59]

[59] Vgl. Arens/Busam/Hettlich/Karpfinger/Stachel, 2013,930

### 3.3.2 John Wallis (1616-1703)

Wie bereits zu Beginn der Arbeit erwähnt, war Wallis der Erste, der „unendlich" durch das Symbol ∞ abgekürzt hat. Nach dem College wirkte er in London als Geistlicher und engagierte sich politisch. Während des Englischen Bürgerkriegs arbeitete er als sehr erfolgreicher Dechiffrierer geheimer Nachrichten und wurde 1649 zum Savilian Professor of Geometry an der University of Oxford ernannt. Diese Professur erlangte er nicht aufgrund seiner Leistungen im Bereich der Mathematik, sondern als Belohnung für sein politisches Engagement. Wallis erwies sich jedoch sehr schnell als für diese Lehrstelle sehr geeignet.
Heute zählt er als der wohl wichtigste Vorläufer Newtons in Sachen Infinitesimalrechnung. Durch sein Hauptwerk „Arithmetica Infinitorum" beeinflusste er sehr stark Newtons Arbeit.[60]
John Wallis führte Cavalieris Arbeit weiter. Wie Cavalieri teilte er Figuren in Teile, jedoch nicht in Linien und weiterführend in Punkte, sondern in unendlich viele Parallelogramme gleicher Größe.[61]

### 3.3.3 Blaise Pascal (1623-1662)

Blaise Pascal befasste sich ebenfalls mit Cavalieris Indivisibilienmethode und wandte eine Version davon auf den Viertelkreis an. Er betrachtete die unendlich kleinen Strecken am Viertelkreis, die Teil der Tangenten an den Kreis sind, als die Hypotenusen unendlich kleiner Dreiecke, die die Steigung der Tangenten ausdrücken (Abb. 10). Je kleiner diese Dreieck wird, desto mehr nähert sich die Hypotenuse an den Berührpunkt von Tangente und Viertelkreis an. Eine Indivisibilie war für ihn etwas, das keine Teile hat.[62]

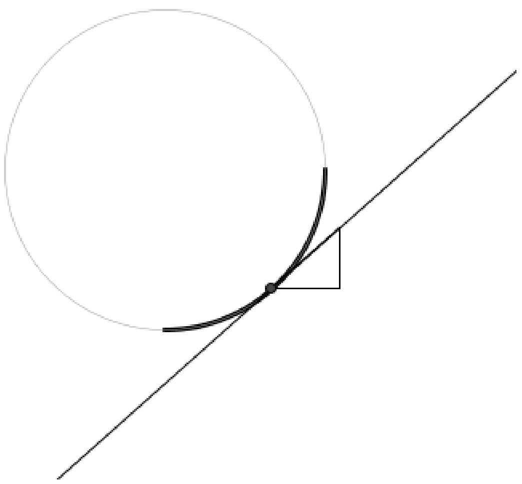

*Abbildung 10: Tangente an den Viertelkreis*

---

[60] Vgl. REményi, 2001, 40f
[61] Vgl. ebd., 41
[62] Vgl. Bedürftig/Murawski,2012,178

Pascal befasste sich außerdem mit Theologie und wollte einen Beweis für die Existenz Gottes liefern. Er untersuchte, welche Rolle Ungewissheit und Zufall in praktischen Problemen haben und zählt zu den Pionieren der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder Gott existiert oder er existiert nicht. Außerdem gibt es die zwei Möglichkeiten, dass wir an Gott glauben oder nicht. Pascal sagt nun, dass es am besten ist, an Gott zu glauben, da der unendliche Gewinn, wenn Gott tatsächlich existiert, größer ist als der endliche Verlust, den wir erleiden, wenn er nicht existiert, durch die Zeit, die wir im Glauben an Gott verloren haben. Im Vergleich dazu, wenn wir nicht an Gott glauben und er trotzdem existiert ist der Verlust unendlich, der Gewinn jedoch endlich, wenn er nicht existiert. (Siehe Tabelle 1)[63] Diese Aussage Pascals ist kein Beweis für die Existenz Gottes. Es ist lediglich eine Empfehlung, um den Verlust zu mindern, der entsteht, wenn nicht an Gott geglaubt wird.

| | **Gott existiert** | **Gott existiert nicht** |
|---|---|---|
| **Glaube an Gott** | Gewinn unendlich | Verlust endlich |
| **Unglaube an Gott** | Verlust unendlich | Gewinn endlich |

*Tabelle 1: Verhältnis zwischen der Existenz Gottes und dem Glauben an ihn (Vgl. Barrow, 2008, 50)*

Unendlichkeiten sind nach Pascal auf der ganzen Welt zu finden, jedoch durch den Menschen nicht vollständig wahrnehmbar. Die Erkenntnis des Übernatürlichen, des nicht vom Menschen Wahrnehmbaren, ist Sache des Herzens.[64]

Laut Pascal gibt es eine sogenannte doppelte Unendlichkeit. Er meint damit einerseits das bereits erwähnte unendlich Große. Pascal behauptete jedoch, dass es dieses unendlich Große nicht nur in der Mathematik gibt, sondern dass auch z.B. Geschwindigkeiten über alle Grenzen hinauswachsen können. Andererseits gibt es auch das unendlich Kleine, das in allen Dingen enthalten ist, da sie immer wieder geteilt werden können, ohne eine Grenze zu erreichen. Diese doppelte Unendlichkeit findet sich in Bewegung, Raum und Zeit und kann in allen Dingen enthalten sein. Pascal nahm an, dass der Raum unendlich sein müsse, denn er könnte nicht immerzu wachsen, wenn das Universum endlich wäre. Ähnlich argumentiert er mit Geschwindigkeit.

Beide Unendlichkeiten, das unendlich Kleine und das unendlich Große, sind nach Pascal mögliche Unendlichkeiten, wie schon Aristoteles sie nannte. Die Existenz des Menschen

[63] Vgl. Barrow, 2008, 49f
[64] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 51

liegt zwischen diesen Extremen. Sie sind jedoch dem menschlichen Verstand nicht zugänglich. Die natürlichen Zahlen aber sind für Pascal ein Beweis dafür, dass das Unendliche existiert, was aber nicht bedeutet, dass wir es begreifen können.[65]
Die aktuale Unendlichkeit kann nach Pascal nicht erfasst werden, da sie kein Vernunftbegriff und somit der Mathematik nicht zugänglich ist.[66]

### 3.3.4 Isaac Newton (1642-1727)

Isaac Newton unterrichtete ab 1969, auf Empfehlung seines Professors Isaac Barrow, am Trinity College an der Universität Cambridge. Später wurde er zum Verwalter der königlichen Münze ernannt.[67]
Zur Unendlichkeit machte er ähnliche Entdeckungen wie schon Proklos und Galileo zuvor. Eine unendliche Menge kann mit keiner der Relationen größer, kleiner oder gleich mit einer anderen unendlichen Menge verglichen werden.[68]
Wie im folgenden Kapitel beschrieben wird war, Newton ein wichtiger Vertreter der Infinitesimalrechnung und entwickelte diese zeitgleich mit Leibniz.

### 3.3.5 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz war einerseits Vertreter der aktualen Unendlichkeit. Er war der Meinung, dass die Natur von ihr völlig durchdrungen wird, um die Vollkommenheit des Schöpfers zu offenbaren, der sie gemacht hat.[69] Andererseits lehnte er die aktuale Unendlichkeit aber ab, mit der Ausnahme des unendlich Kleinen, denn wenn eine Linie aus unendlich kleinen Stücken besteht, von denen es unendlich viele geben muss, dann wird die gesamte Linie als eine aktuale Gesamtheit gesehen.[70]
Leibniz prägte die sogenannte Infinitesimalrechnung, die von großer Bedeutung für die heutige Analysis war. Wichtige Vorreiter waren Blaise Pascal und Bonaventura Cavalieri. Leibniz übertrug Pascals Überlegungen auf allgemeine Kurven. Neben den unendlich kleinen Dreiecken, die Pascal betrachtete, untersuchte er auch die unendlich kleinen Flächen unter den Kurven. Deren unendliche Summe bezeichnete er mit $\int$. Die Seiten der unendlich kleinen Dreiecke, deren Hypotenusen Teile der Tangenten an die Kurve sind, nannte er $dx, dy$ und $ds$. (Abb. 11) Je kleiner $dx$ wird, desto mehr nähert $ds$ sich an den Berührpunkt der Tangente an die Kurve an. Aus diesen Überlegungen entwickelte sich die Differential- und Integralrechnung, wie sie heute noch in der Schule unterrichtet wird. Die unendlich

[65] Vgl. Barrow, 2008, 50f
[66] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 221
[67] Vgl. Taschner, 2006, 49f
[68] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 245
[69] Vgl. Delahaye, 2001, 14
[70] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 221

kleinen Linienstücke nannte Leibniz die Infinitesimalen, die seiner Meinung nach auch noch teilbar sind, sie sind also keine Punkte.[71]

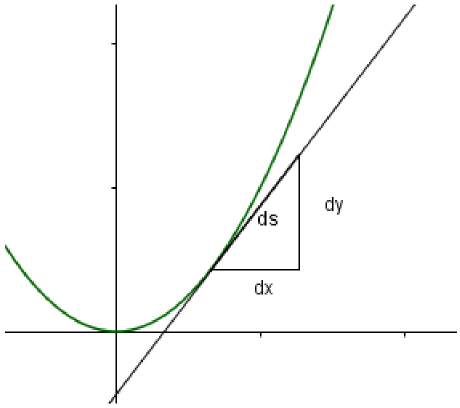


*Abbildung 11: Tangente an die Kurve*

Unabhängig von Leibniz entwickelte auch Newton zeitgleich eine Infinitesimalrechnung, die der von Leibniz sehr ähnlich war. Er nannte sie Fluxionsrechnung. Zur damaligen Zeit warf Leibniz Newton vor, abgeschrieben zu haben, lang nach ihrem Tod konnte nachgewiesen werden, dass beide dieselbe Theorie unabhängig voneinander entwickelten.[72]

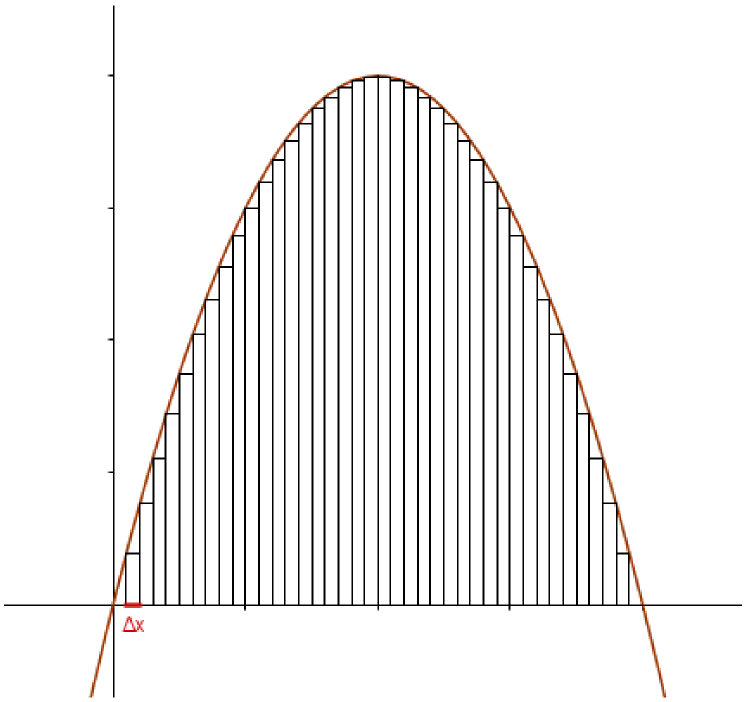


*Abbildung 12: Leibniz' Idee des Integrals (vgl. Danckwerts/Vogel, 2006, 118)*

[71] Vgl. ebd., 177f
[72] Vgl. Clegg, 2015, 164f

Das von Leibniz eingeführte Integralzeichen $\int$ soll an die Summe erinnern. Der Grenzwert der Summe der beliebig schmal werdenden Flächenstücken $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ für $x_i \in [a, b]$ ist das Integral $\int_a^b f(x)dx$. Je kleiner $\Delta x$ wird, desto besser nähert sich die Summe der Flächenstücke an die Fläche unter der Kurve an (Abb.12). Das $dx$ soll dabei an die beliebig klein werdende Flächenbreite $\Delta x$ erinnern.[73]

## 3.3.6 Bewegungslehre im 17. Jahrhundert

Im 17. Jahrhundert beschäftigten die Paradoxien des Zenon von Elea nach wie vor Philosophen und Physiker. Besonders Galileo Galilei, sein Schüler Bonaventura Cavalieri und Blaise Pascal arbeiteten an einer Theorie, wie Bewegung gedeutet und erklärt werden kann. Bei der Untersuchung der Bewegung tritt sofort das Thema Unendlichkeit auf, wodurch sie sich als schwierig erweist. Pascal sagte dazu, dass egal wie schnell Bewegung auch sein kann, es ist immer vorstellbar, dass es eine noch schnellere gibt. Wie bei der Nachfolgerbildung der natürlichen Zahlen kann man zu jeder Bewegung eine noch schnellere finden, bis ins Unendliche. Ebenso funktioniert es aber auch in die andere Richtung. Egal wie langsam die Bewegung ist, man kann sie immer noch weiter abbremsen. Ebenfalls bis ins Unendliche, denn man kann immer noch langsamer werden, ohne dass Ruhe eintritt. Galileo Galilei hatte ähnliche Probleme. Er erläuterte diese in seinen „Unterredungen und mathematischen Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend". Er nutzt dabei das Beispiel eines Steines, der hinabfällt. Dabei muss die Zunahme der Geschwindigkeit der Bewegung stetig ablaufen. Der Stein bleibt dabei nicht für eine endliche Zeit bei einer bestimmten Geschwindigkeit. Bei einer beschleunigten Bewegung nimmt der Stein mehrere, genauer gesagt unendlich viele, Grade der Geschwindigkeit in einem Zeitintervall an, das unendlich viele Augenblicke enthält, egal wie klein es auch immer sein mag. Ebenso verhält es sich, wenn ein Stein in die Höhe geschleudert wird. Dabei wird die Geschwindigkeit verringert und muss unendlich viele Grade der Langsamkeit durchlaufen. Galileo stellte sich die Frage, ob es nicht unendlich lange dauern würde, all diese Grade der Geschwindigkeit zu durchlaufen, um beim Herabfallen auch nur die geringste Geschwindigkeit oder beim Hochschleudern den Ruhezustand zu erreichen, da das Durchlaufen der unendlich vielen Grade unendlich viel Zeit in Anspruch nehmen müsste. Aber gerade die Beobachtungen aus dem Alltag sprechen gegen diese Theorie.[74]

---

[73] Vgl. Danckwerts/Vogel, 2006,123
[74] Vgl. Blay, 2001, 42f

Edme Mariotte (1620-1684) vertrat die Theorie, dass es keinen Ruhezustand gibt und somit auch keinen Beginn der Bewegung. Er war der Ansicht, dass es bereits zu Beginn der Bewegung eine sehr kleine Geschwindigkeit gibt. Niklas Hartsoeker (1656-1725) argumentierte jedoch, dass der Übergang zwischen Bewegung und Ruhe nicht ein unendliches Durchlaufen von unendlich vielen Grade der Langsamkeit bedeutet und verweist dabei auf einen sich bewegenden Körper, der durch einen Stoß sofort in den Ruhezustand versetzt werden kann, ohne langsam Grade der Geschwindigkeit verlieren zu müssen.
Leibnitz verfasste 1670 ein Werk mit dem Titel „Theorie der abstrakten Bewegung“. Er sieht Bewegung als stetig an, sie wird also nicht durch Ruhepausen unterbrochen. Dies bedeutet, dass die Bewegung in unendlich viele Grade der Geschwindigkeit teilbar ist und diese unendlich vielen Teile aktual existieren. Eine Strecke jeder Länge besteht aus unendlich vielen Punkten, die ein aktual unendliches Ganzes bilden. In Bezug auf Bewegung führte Leibniz seinen eigenen Indivisibilen-Begriff ein. Raum, Zeit und Bewegung sind aus diesen Indivisiblen aufgebaut, sind jedoch von anderer Gegebenheit als die aus ihnen zusammengesetzten Gesamtheiten. Der Beginn von Bewegung gehört selbst zur Bewegung, ist jedoch nicht teilbar, also eine Indivisible, denn der Gedanke an einen teilbaren Beginn führte bei Leibniz zu Widersprüchen. Die Indivisible, die den Anfang der Bewegung bildet, ist die Kraft. Sie steht im selben Verhältnis zur Bewegung wie der Punkt zum Raum und bildet Anfang und Ende von Bewegung. Dies verhindert, laut Leibniz, dass die Grade der Geschwindigkeit unendlich lang durchlaufen werden müssen.[75]

## 3.4 Das Unendliche vom 18. bis zum 20. Jahrhundert

### 3.4.1 Immanuel Kant (1724-1804)

Immanuel Kant hat die Philosophie vor allem durch seine Unterscheidung von Möglichkeit, Wirklichkeit und Notwendigkeit geprägt.
Kant unterscheidet, ebenso wie Aristoteles, das potentiell Unendliche und das aktual Unendliche. Das aktual Unendliche ist, wie bei Cusanus beschrieben, das nicht mit den Sinnen wahrnehmbare. Kant bezeichnet das aktual Unendliche als eine Idee der Vernunft. Idee ist nach Kant etwas, das allen Dingen zugrunde liegt, was jedoch durch empirische Erfahrungen nicht wahrgenommen werden kann, da es weder beobachtet noch konstruiert werden kann.[76] Wie Cusanus betrachtete Kant das Universum als ein Unendliches, in welchem sich Gott wiederspiegelt. Ebenso sagt er, dass dieses Unendliche unserer Wahrnehmung entzogen ist, denn alles Wahrgenommene ist endlich, unserer Wahrnehmung sind Grenzen

---

[75] Vgl. ebd. 44f
[76] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 60f

gesetzt. Nach Kant bedeutet dies, dass zwar wirkliche Unendlichkeiten existieren, wir sie jedoch nur als endliche Wahrnehmung verstehen können.[77]

Kant war der Ansicht, dass das aktual Unendliche auf einer höheren Ebene liegt, nämlich auf der Ebene der Vernunft. Beispielsweise kann man ein räumlich Ganzes zwar unendlich oft teilen, jedoch kann man nicht sagen, dass es aus unendlich vielen Teilen besteht. Diese Teile sind zwar alle im Ganzen enthalten, jedoch nicht die Reihe der Teilung, denn sie ist niemals ganz und somit keine unendliche Menge. Die aktuale Unendlichkeit sieht Kant lediglich als eine Idee, von der man nicht wissen kann, ob sie auch in der Realität möglich ist.[78]

### 3.4.2 Bernhard Bolzano (1781-1848)

Bernhard Bolzano, Philosoph, Mathematiker und Theologe aus Prag, verfasste ein Buch über die Paradoxien des Unendlichen, das nach seinem Tod veröffentlich wurde. Ein Großteil der Paradoxien der Mathematik enthält den Begriff des Unendlichen, weshalb er besonders unter die Lupe genommen werden muss. In diesem Buch definiert Bolzano eine unendliche Menge (er bezeichnet sie als unendliche Vielheit) als eine Menge, die größer ist als jede endliche Menge, für die also jede endliche Menge nur ein Teil ist.[79]

Bolzano verglich seinen Unendlichkeitsbegriff mit dem der Philosophen, insbesondere mit dem von Hegel. Hegel war der Überzeugung, dass die mathematische Unendlichkeit eine „schlechte" Unendlichkeit ist und nur die Philosophen sich einer qualitativ hochwertigen Unendlichkeit bewusst seien. Diese Unendlichkeit ist ausschließlich in Gott und dem Absoluten zu finden. Bolzano entdeckt den Fehler in Hegels Denken darin, dass Hegel die mathematische Unendlichkeit nur als potentiell betrachtete. Bolzano selbst jedoch erkennt die wahre mathematische Unendlichkeit in der aktualen Unendlichkeit, die nicht veränderlich ist.[80]

Bolzano war also der Überzeugung, dass es das aktual Unendliche in der Mathematik gibt und behauptete sogar, seine Existenz beweisen zu können. Voraussetzung dafür ist ein Gott, der allwissend ist, und dieses Wissen ist eine unendliche Menge von Wahrheiten. Er bezeichnet also die Menge aller Wahrheiten als aktual unendliche Menge. Es war für ihn eine paradoxe Eigenschaft unendlicher Mengen, dass man alle Elemente zweier unendlicher Mengen eindeutig miteinander in Beziehung setzen kann, sodass kein einziges Element ohne Verbindung bleibt oder mehrmals vorkommt. Außerdem ist es möglich, dass eine dieser Mengen eine echte Teilmenge der anderen ist.[81]

---

[77] Vgl. Barrow, 2008, 54f
[78] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 153
[79] Vgl. ebd., 66f
[80] Vgl. ebd., 67
[81] Vgl. ebd., 67f

Damit war er ein Vorreiter für Richard Dedekind, der später eine Definition für unendliche Mengen entwickelte. Eine unendliche Menge ist genau dann unendlich, wenn es eine bijektive Zuordnung zu einer seiner echten Teilmengen gibt.[82]

Bolzano war also der Meinung, dass alle Unendlichkeiten die gleiche „Größe" haben. Er zeigte dies mit einem von Galileo Galileis Paradoxa. Dazu wird ein Halbkreis mit 1 m Durchmesser gezogen. Unter diesem Halbkreis verläuft eine Gerade, die parallel zum Durchmesser des Halbkreises liegt. Nun wird ein Punkt auf dieser Geraden gewählt und mit dem Mittelpunkt des Halbkreises verbunden.

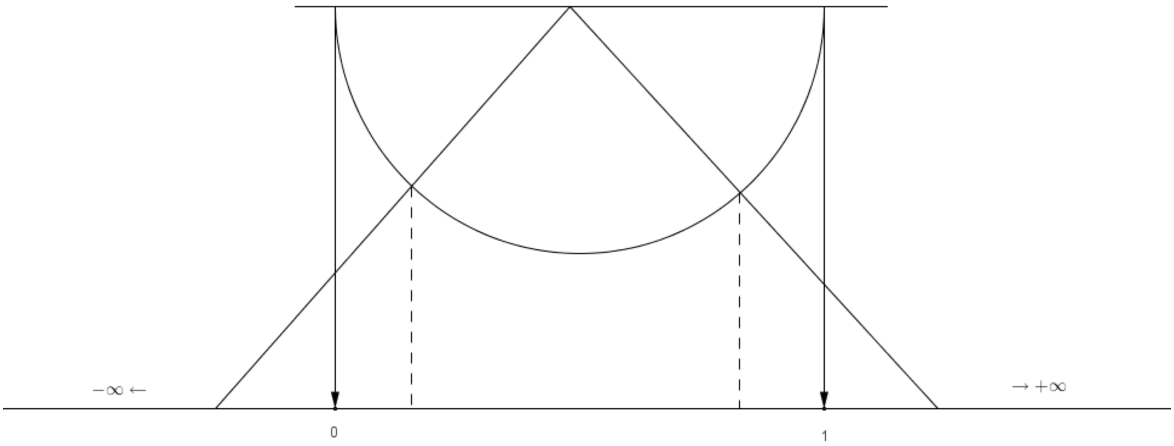


*Abbildung 13: Bolzanos Beweis, dass alle unendlichen Mengen einander zugeordnet werden können. (Vgl. Barrow, 2008, 83)*

Diese Verbindungslinie schneidet den Halbkreis. Senkrecht zur unendlichen Geraden kann eine Strecke zum Schnittpunkt gelegt werden (Abb. 13). So wird jedem beliebigen Punkt auf der unendlichen Geraden sowohl ein Punkt auf dem Halbkreis, als auch ein Punkt zwischen 0 und 1, einem endlichen Intervall, zugeordnet. Das bedeutet, dass auf der unendlichen Geraden, dem Halbkreis und dem endlichen Abschnitt zwischen 0 und 1 gleich viele Punkte liegen. Bolzano schloss also daraus, dass alle unendlichen Mengen gleich mächtig sind und einander zugeordnet werden können. Dies würde bedeuten, dass z.B. auch die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge der reellen Zahlen gleich mächtig sind. Dass dies nicht der Fall ist wird in Kapitel 3.4.6 gezeigt.[83]

---

[82] Vgl. Delahaye, 2001, 14
[83] Vgl. Barrow, 2008, 82f

## 3.4.3 Leopold Kronecker (1823-1891)

Leopold Kronecker war Universitätsprofessor Georg Cantors an der Universität in Berlin. Er war ein großer Kritiker von Cantors Mengenlehre.[84] Kronecker war einer der größten Mathematiker seiner Zeit und hatte eine vorherrschende Position im geistlichen, gesellschaftlichen und vor allem im wissenschaftlichen Leben Berlins. So war es für Cantor eine sehr negative Erfahrung, dass gerade sein ehemaliger Professor einer seiner größten Kritiker war, der Mensch, dessen Urteil in der Gesellschaft Berlins ein sehr wichtiges war. Die Vermutung liegt nahe, dass Cantor aufgrund dieser Gegnerschaft niemals die Professur für Mathematik in Berlin angeboten wurde.[85]

Kroneckers Macht war sogar so groß, dass er die Publikation eines von Cantors Werken in einer der damals wichtigsten Fachzeitschriften für Mathematik verzögerte und Cantor es dann völlig aufgab, in dieser Zeitschrift zu publizieren.[86]

Aus Kroneckers Sicht bestand die Mathematik nur aus Sätzen und Beweisen, die im endlichen durchgeführt werden können und von den natürlichen Zahlen ausgehen. Die Unendlichkeit lehnte er strikt ab, denn das Arbeiten mit ihr würde ihre Existenz erfordern, die er strikt ablehnte.[87]

## 3.4.4 Richard Dedekind (1831-1916)

Wie bereits erwähnt, war es Richard Dedekind, der eine Definition für unendliche Mengen fand. Er definierte eine unendliche Menge als Menge, die echte Teilmengen besitzt, die dieselbe Mächtigkeit aufweisen wie sie selbst. Ist dies nicht der Fall, so ist die gegebene Menge endlich.[88]

Im Gegensatz zu Kronecker war Dedekind ein guter Freund Cantors und Vertreter seiner Mengenlehre. Dedekind sah die natürlichen Zahlen als eine aktual unendlich vorgegebene Menge. Sie werden nicht mehr durch den natürlichen Zählprozess konstruiert, denn sie sind bereits da. Aktual unendliche Mengen sind für Dedekind selbstverständlich gegeben. Neben seiner Definition der unendlichen Mengen versuchte er auch, ihre Existenz zu beweisen. Sein Beweisversuch hat Ähnlichkeit mit dem von Bolzano, nur dass er es nicht mit einem theologischen Ansatz versucht, sondern mit einem Ansatz aus der Psychologie und Philosophie. Er beginnt mit der Annahme, dass die Gedankenwelt des Menschen unendlich

---

[84] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 72
[85] Vgl. Taschner, 2006, 70f
[86] Vgl. Delahaye, 2001, 17
[87] Vgl. Barrow, 2008, 89
[88] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 44

ist, man also unendlich viele Dinge denken kann. Dies genügte für ihn als Beweis, dass unendliche Mengen existieren.[89]

## 3.4.5 David Hilbert (1862-1943) und sein Hotel Unendlichkeit

Die mathematische Analysis ist nichts anderes als eine Symphonie über das Unendliche. So lautete eine Aussage von David Hilbert, einem der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts.[90]

David Hilbert wurde in Königsberg, Kants Heimatstadt, geboren. Er zählte zu den bedeutendsten Mathematikern seiner Zeit, vergleichbar mit Henri Poincaré (1854-1912).[91]

Sein Beitrag zur Diskussion über das Unendliche war ein Aufsatz mit dem Titel „Über das Unendliche“, in dem er schreibt, dass das Unendliche ein in der Mathematik unverzichtbares Element ist. Jedoch ist es nicht in der Realität vorhanden, weder in der Natur, noch als Grundlage unseres Denkens. Für Hilbert gab es zwei Möglichkeiten. Entweder man lehnt die klassische Mathematik ab und baut eine neue Mathematik auf, die auf das aktual Unendliche vollständig verzichtet, oder man versucht die Mathematik, so wie sie ist, zu begründen. Er entschied sich für den zweiten Weg, denn er konnte sich eine Mathematik ohne das Unendliche nicht vorstellen.

Das Unendliche betrachtet Hilbert wie Kant. Es ist eine Idee, die in der Realität nicht erkennbar ist. Es übersteigt alle Erfahrungen. In der Mathematik kann jedoch nicht darauf verzichtet werden, da es das Endliche ergänzt. [92]

### 3.4.5.1 Das Hotel Unendlichkeit

Es gibt keinen schriftlichen Beleg dafür, dass die Geschichte vom Hotel Unendlichkeit tatsächlich von David Hilbert stammt. Zugeschrieben wird es ihm trotzdem, da er von George Gamows (1904-1968) in dessen Buch „Eins, zwei, drei … Unendlichkeit“ als Quelle dafür angegeben wird.[93] Es sei hier angemerkt, dass das Wort „unendlich“ in der gesamten Geschichte für „abzählbar unendlich“ steht. Die Bedeutung von „abzählbar unendlich“ wird in Kapitel 3.4.6 erklärt.

Das Hotel Unendlichkeit ist kein gewöhnliches Hotel. Es hat unendlich viele Zimmer, die mit 1,2,3,4,… nummeriert und alle belegt sind. Trotzdem findet der Manager des Hotels einen Platz für einen weiteren Gast. Er schickt den Gast aus Zimmer 1 in Zimmer 2, den von Zimmer 2 in Zimmer 3 usw. Somit ist die 1 frei, und der neue Gast kann einziehen. In einem

---

[89] Vgl. ebd., 74f
[90] Vgl. Lorenzo Martínez, 2001, 8
[91] Vgl. Taschner, 2006, 75
[92] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 107f
[93] Vgl. Barrow, 2008, 57

weiteren Zug möchte nicht nur ein Gast ein Zimmer, sondern unendlich viele neue Gäste. Auch das ist kein Problem für den Manager des Hotels. Es wird einfach der Gast von Zimmer 1 auf Zimmer 2 gebracht, der Gast von 2 auf 4, der von 3 auf 6 usw. Dadurch werden alle ungeraden und somit unendlich viele Zimmer frei, und die unendlich große Reisegruppe findet Platz in dem Hotel. Was passiert nun, wenn die Gäste aus allen Zimmern mit gerader Nummer ausziehen wollen? Für den Manager ist das ein großes Problem, denn er hat nun nur noch eine Auslastung von 50% und muss, wenn sich daran nichts ändert, damit rechnen, dass das Hotel geschlossen wird. Die Lösung des Problems ist denkbar einfach. Alle verbliebenen Gäste rücken zusammen. Der Gast von Zimmer 3 zieht in Zimmer 2, der Gast aus 5 in Zimmer 3, der Gast von Zimmer 7 in Zimmer 4 usw. Nur der Bewohner der Nummer 1 kann bleiben, wo er ist. Nun sind wieder alle Zimmer belegt und das Hotel ausgebucht, ohne dass ein neuer Gast dazugekommen ist.[94]

| Hotel 1 | Hotel neu | Hotel 2 | Hotel neu | Hotel 3 | Hotel neu | Hotel … | Hotel neu |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0001 | 1 | 0002 | 1 | 0003 | 1 | … |
| 2 | 1001 | 2 | 1002 | 2 | 1003 | 2 | … |
| 3 | 2001 | 3 | 2002 | 3 | 2003 | 3 | … |
| 4 | 3001 | 4 | 3002 | 4 | 3003 | 4 | … |
| 5 | 4001 | 5 | 4002 | 5 | 4003 | 5 | … |
| … | … | … | … | … | … | … | … |

*Tabelle 2: Hilberts Hotel Unendlichkeit (vgl. Barrow, 2008,61)*

Die Geschichte vom Hotel Unendlichkeit geht auf einem höheren Level weiter, denn es gehört zu einer Kette von unendlich vielen Hotels mit jeweils unendlich vielen Zimmern. Jedes Hotel befindet sich in einer Galaxie des unendlichen Universums.

Bis auf das eine Hotel aus unserer Geschichte sollen aber alle anderen Hotels geschlossen werden. Daher müssen alle unendlich vielen Gäste aus den unendlich vielen Hotels untergebracht werden. Auch dafür gibt es eine Idee vom Hotelpersonal. Die Gäste sollen wie in Tabelle 2 untergebracht werden. Hotel 1 entspricht dem Hotel aus der bisherigen Geschichte, Hotel 2, 3,… sind die Hotels die geschlossen wurden und „Hotel neu“ beschreibt die neue Aufteilung der Gäste auf die Zimmer.[95]

[94] Vgl. ebd., 58f
[95] Vgl. ebd., 60f

Das Problem bei dieser Aufteilung der Hotelgäste ist jedoch, dass für die Gäste des 1001. Hotels kein Platz mehr bleibt, denn die Gäste der Hotels 1-1000 haben bereits alle Zimmer belegt. Dass es auch nicht funktionieren kann, wenn man alle Zimmernummern von Hotel 1 mit 2 multipliziert, die aus Hotel 2 mit 3, die aus Hotel 3 mit 4 usw., stellt sich auch sehr schnell heraus, denn dann würden manche Zimmer doppelt belegt. Die entscheidende Idee liefert letztendlich ein als Küchenjunge jobbender Mathematikstudent. Er schlägt vor, die unendliche Menge der Primzahlen zu verwenden, denn jede ganze Zahl lässt sich nur auf eine einzige Art und Weise als Produkt von Primzahlen darstellen.[96]

So sieht die neue Zimmerverteilung folgendermaßen aus:

| Hotel 1 | Hotel neu | Hotel 2 | Hotel neu | Hotel 3 | Hotel neu | Hotel … | Hotel neu |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2^1$ | 1 | 3 | 1 | 5 | 1 | … |
| 2 | $2^2 = 4$ | 2 | 9 | 2 | 25 | 2 | … |
| 3 | $2^3 = 8$ | 3 | 27 | 3 | 125 | 3 | … |
| 4 | 16 | 4 | 81 | 4 | 625 | 4 | … |
| 5 | 32 | 5 | 243 | 5 | 3125 | 5 | … |
| … | … | … | … | … | … | … | … |

*Tabelle 3: Hilberts Hotel Unendlichkeit Zimmerverteilung nach Primzahlen (vgl. Barrow, 2008, 61)*

Damit wird kein Zimmer doppelt belegt. Die Angestellten können die Aufteilung sogar noch vereinfachen. Der Gast des m-ten Zimmers aus dem n-ten Hotel zieht in das Zimmer Nummer $2^m \times 3^n$. So kommt zum Beispiel der Gast aus dem 3. Zimmers des 5. Hotels in das Zimmer $2^3 \times 3^5 = 8 \times 243 = 1944$.

Jedoch bleiben bei der Aufteilung nach Primzahlen sehr viele Zimmer ungenutzt und leer, nämlich alle, die nicht als $2^m \times 3^n$ dargestellt werden können. Mit Hilfe eines Unternehmensberaters konnte der Manager auch dieses Problem lösen. Jeder Gast erhält ein Zahlenpaar, bestehend aus der alten Zimmernummer und der alten Hotelnummer (m,n) und wird in ein quadratisches Schema eingetragen. Gast (1,1) erhält nun Zimmer 1, (1,2) Zimmer 2, (2,2) Zimmer 3 und (2,1) Zimmer 4. Somit ist das 2x2 Quadrat in Tabelle 4 links oben auf ihre Zimmer zugeteilt. Dank dieses Schemas wird jeder Gast ein Zimmer bekommen und kein Zimmer wird leer bleiben. [97]

[96] Vgl. ebd., 61
[97] Vgl. ebd., 62f

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,1) in Zimmer 1 | (1,2) in Zimmer 2 | (1,3) in Zimmer 5 | (1,4) in Zimmer 10 | (1,5) in Zimmer 17 | … | (1,n) |
| (2,1) in Zimmer 4 | (2,2) in Zimmer 3 | (2,3) in Zimmer 6 | (2,4) in Zimmer 11 | (2,5) in Zimmer 18 | … | (2,n) |
| (3,1) in Zimmer 9 | (3,2) in Zimmer 8 | (3,3) in Zimmer 7 | (3,4) in Zimmer 12 | (3,5) in Zimmer 19 | … | (3,n) |
| (4,1) in Zimmer 16 | (4,2) in Zimmer 15 | (4,3) in Zimmer 14 | (4,4) in Zimmer 13 | (4,5) in Zimmer 20 | … | (4,n) |
| (5,1) in Zimmer 25 | (5,2) in Zimmer 24 | (5,3) in Zimmer 23 | (5,4) in Zimmer 22 | (5,5) in Zimmer 21 | … | (5,n) |
| … | … | … | … | … | … | … |
| (m,1) | (m,2) | (m,3) | (m,4) | (m,5) | … | (m,n) |

*Tabelle 4: Hilberts Hotel Unendlichkeit Zahlenpaare (vgl.Barrow, 2008, 62f)*

### 3.4.6 Georg Cantor (1845-1918)

Georg Cantor war der Pionier, der die aktuale, die wirkliche, Unendlichkeit zu einem wichtigen Teil in der Mathematik gemacht hat. Es war eine bahnbrechende Theorie, die zu damaliger Zeit jedoch von heftiger Kritik begleitet wurde.[98]

Cantors Auffassung einer Menge war intuitiv. Er verstand unter einer Menge eine Zusammenfassung von Objekten unserer Wahrnehmung oder unseres Denkens zu einer Gesamtheit.[99]

Die potentielle Unendlichkeit bezeichnete er auch als „unechte Unendlichkeit". Er war der Meinung, dass sie keine Unendlichkeit im bisherigen Sinne ist, denn sie ist eine „variable Menge", die entweder über das Endliche hinauswächst oder kleiner als jede noch so kleine Grenze wird. Das aktual Unendliche hingegen ist eine „konstante Menge", die als ein Ganzes betrachtet werden kann. Nach Cantor wird die aktuale Unendlichkeit von der potentiellen vorausgesetzt. Für ihn waren die drei Punkte „…", die den fortlaufenden Zählprozess symbolisieren, ein Zeichen dafür, dass eine Zusammenfassung zu einer Menge überhaupt möglich ist. Des Weiteren teilte er die aktuale Unendlichkeit in drei Formen. Zwei der Formen gelten als vermehrbar. Dies ist die Unendlichkeit, die in der realen Welt auftaucht, und die Unendlichkeit, die in unseren Gedanken existiert, jene, in der mathematische Größen

[98] Vgl. ebd., 80
[99] Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 148

ad abstractum erfasst werden, er nennt sie Transfinitum. Die dritte Form ist die absolute Unendlichkeit, die nur Gott innewohnt und daher nicht vermehrt werden kann.[100]
Aus mathematischer Sicht definierte er die abzählbare und die nicht abzählbare Unendlichkeit. Abzählbar unendlich nannte er jene Mengen, deren Elemente den Elementen der natürlichen Zahlen zugeordnet werden können. Alle abzählbar unendlichen Mengen sind gleich mächtig. Gleichzeitig sind sie diejenigen unendlichen Mengen mit den „wenigsten" Elementen. Cantor bezeichnet sie mit $\aleph_0$ (Aleph-Null).[101] Zu diesen abzählbar unendlichen Mengen zählen die geraden Zahlen, so wie die ungeraden, aber auch die rationalen Zahlen. Um dies zu zeigen, entwickelte Cantor das so genannte Diagonalverfahren, mit dem er fähig war, die positiven rationalen Zahlen so anzuordnen, dass man sie abzählen konnte (Abb. 14).[102]

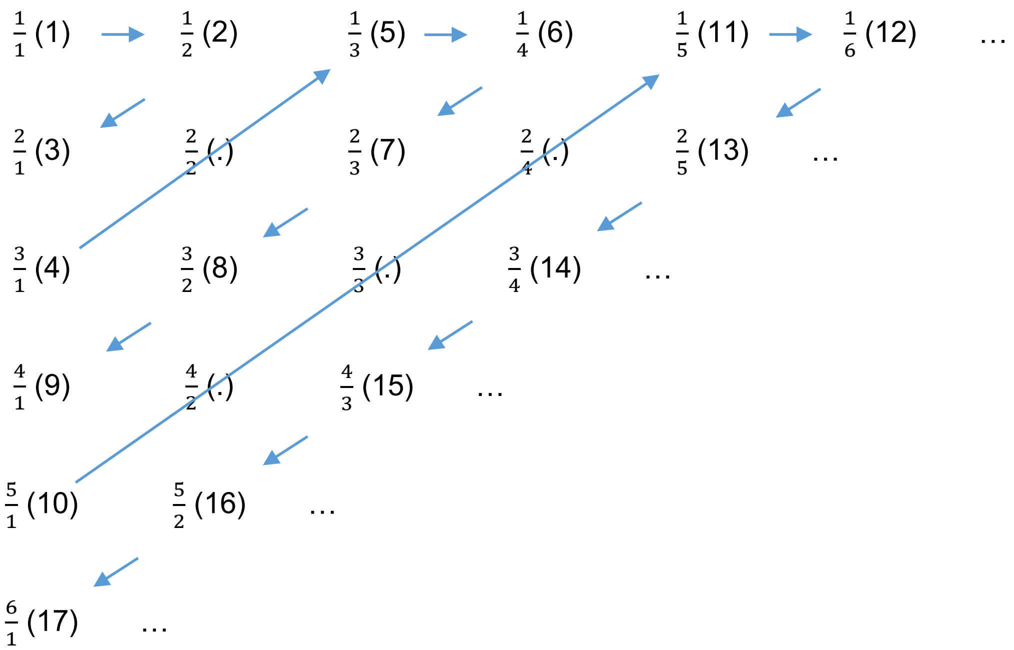


*Abbildung 14: Cantors Diagonalverfahren (vgl. Richter, 2002, 12)*

Der Trick dabei ist, dass in den diagonalen Reihen alle Brüche stehen, deren Summe von Zähler und Nenner gleich sind. So ist zum Beispiel in der 3. Diagonale die Summe jeweils 4 (1+3,2+2,3+1).[103] Nun beginnt man in der linken oberen Ecke zu zählen. Um Mehrfachnennungen zu vermeiden, werden ungekürzte Brüche übersprungen. Zum Mitzählen der

[100] Vgl. ebd., 71f
[101] Vgl. Barrow, 2008, 80
[102] Vgl. Richter, 2002, 11f
[103] Vgl. Barrow, 2008, 80

negativen rationalen Zahlen werden die jeweils entsprechenden negativen Brüche zu den positiven dazugeschrieben und ebenfalls gezählt.[104]

Cantor war der Meinung, dass es Mengen der Mächtigkeit $\aleph_0$ in der wirklichen, materiellen Welt gibt, sie nicht nur im Denken oder in der Möglichkeit existieren, wie Aristoteles behauptet hatte.[105]

Cantor zeigt auch, dass es noch „größere" unendliche Mengen gibt und bezeichnete diese als nicht abzählbare Unendlichkeiten. Ein Beispiel dafür sind die reellen Zahlen. Die reellen Zahlen können nicht mehr, wie die rationalen oder die natürlichen Zahlen, systematisch abgezählt werden. Cantor zeigt dies, indem er mit der Annahme beginnt, dass es auch ein Verfahren gibt, um diejenigen Dezimalzahlen zu zählen, die rationale Zahlen sind, die also nicht als Bruch dargestellt werden können. Dies könnte z.B. so aussehen:

$$
\begin{gathered}
1 \rightarrow 0{,}58920963\ldots \\
2 \rightarrow 0{,}37869547\ldots \\
3 \rightarrow 0{,}15398658\ldots \\
4 \rightarrow 0{,}21587016\ldots \\
5 \rightarrow 0{,}69012795\ldots \\
6 \rightarrow 0{,}33768531\ldots \\
\ldots \\
\ldots \\
\ldots
\end{gathered}
$$

*Abbildung 15: Versuch des Abzählens der reellen Zahlen (vgl. Barrow, 2008, 81)*

Aus diesen Zahlen wird eine neue reelle Zahl generiert. Dafür wird von der ersten Zahl die erste Nachkommastelle genommen, von der zweiten die zweite und so weiter. Dadurch entsteht die Zahl 0,573825… . Dann wird zu jeder der unendlich vielen Dezimalstellen 1 hinzugefügt (wobei 9 dabei zu 0 wird) und es entsteht 0,684936… . Diese Zahl ist insofern besonders, als sie mit keiner Zahl in der angeblich vollständigen Liste übereinstimmt. Sie unterscheidet sich in mindestens einer Stelle von jeder in der Liste vorkommenden Zahl. So beweist Cantor, dass die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar unendlich ist. Cantor bezeichnete Mengen, die dieser Ordnung angehören, mit $\aleph_1$ (Aleph-Eins). Zeit seines Lebens versuchte er, seine Vermutung zu beweisen, dass es keine unendlichen Mengen gibt, die größer als $\aleph_0$, aber kleiner als $\aleph_1$sind.[106] Diese Annahme wurde Kontinuumshypothese genannt und warf für die Mathematiker der Zukunft viele Fragen auf. Für Cantor war klar,

---

104 Vgl. Richter, 2002, 12
105 Vgl. Bedürftig/Murawski, 2012, 70
106 Vgl. Barrow, 2008, 81f

dass wenn diese Hypothese stimmt, jede unendliche Teilmenge der reellen Zahlen entweder bijektiv auf die natürlichen oder auf die reellen Zahlen abgebildet werden können muss. Trifft die Hypothese nicht zu, wäre der nächste Schritt, herauszufinden, wie viele Ordnungen des Unendlichen es gibt und wie sie aufgebaut sind. Es gelang Cantor nicht, seine Hypothese zu beweisen. Cantor war sich Zeit seines Lebens sicher, dass die Lösung aus der Mengenlehre herleitbar sein muss. Auch Kurt Gödel (1906-1978) war dieser Ansicht. Gödel bewies aber auch, dass durch Hinzufügen des Axioms, dass die Hypothese wahr ist, zur Mengenlehre, diese nicht zu Fall bringt. Paul Cohen (1937-2007) zeigte später, dass auch das Hinzufügen des Axioms, dass die Hypothese falsch ist, die Mengenlehre widerspruchsfrei lässt. Die Mengenlehre kann also keine Antwort liefern, ob die Kontinuumshypothese richtig oder falsch ist.[107]

Cantor konnte jedoch zeigen, dass es eine aufsteigende Hierarchie unendlicher Mengen gibt, die kein Ende hat. Zu jeder unendlichen Menge kann man eine neue Menge bilden, die um das unendlichfache größer ist. Dies funktioniert, indem man Potenzmengen betrachtet. Eine Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller Teilmengen dieser Menge. Zur Menge $\{X, Y, Z\}$ kann die folgende Potenzmenge gebildet werden:

$$\{\{\}, \{X\}, \{Y\}, \{Z\}, \{X, Y\}, \{X, Z\}, \{Y, Z\}, \{X, Y, Z\}\}$$

Eine Potenzmenge besitzt $2^n$ Elemente, wenn n die Anzahl der Elemente der Ausgangsmenge ist. Bilden wir also eine Potenzmenge einer Menge mit Mächtigkeit $\aleph_0$ erhalten wir eine Potenzmenge $P[\aleph_0]$, die eine unendlichmal größere Menge bildet als die Ausgangsmenge. Dieser Prozess kann immer weitergeführt und die Potenzmenge der Potenzmenge gebildet werden. Somit gibt es eine endlos aufsteigende Hierarchie an Unendlichkeiten.[108]

Cantor entdeckt auch, dass die Menge der Punkte einer Strecke und die Menge der Punkte einer Fläche die gleiche Mächtigkeit besitzen. Das bedeutet, egal ob Gerade, Ebene oder n-dimensionaler Raum, die Mengen ihrer Punkte sind gleich groß. Dies konnte er selbst kaum glauben.[109]

Georg Cantor war der festen Überzeugung, dass seine Theorie der Mengenlehre ein Teil der Metaphysik ist und in der Philosophie und Theologie große Bedeutung hat. Tatsächlich fanden seine Theorien bei Philosophen und katholischen Theologen große Anerkennung, von vielen Mathematikern wurden sie jedoch nicht gebilligt. Cantor zweifelte oft daran, ob seine Theorie tatsächlich wissenschaftlich bedeutsam war. Es wird vermutet, dass seine

[107] Vgl. Delahaye, 2001, 18
[108] Vgl. Barrow, 2008, 84f
[109] Vgl. Delahaye, 2001, 17

eigenen Zweifel, und auch die seiner Kollegen, zu einer schweren psychischen Erkrankung führten, der er Zeit seines Lebens nicht mehr entrinnen konnte.[110]

[110] Vgl. Bedürftig/Musawski, 2012, 72f

# 4 Was verstehen Schülerinnen und Schüler unter Unendlichkeit?

In einer Studie von Andreas Marx, veröffentlicht 2013 im Journal für Mathematik-Didaktik, wurden Schülerinnen und Schüler über ihre Vorstellungen zu unendlichen Prozessen untersucht.

Für die Studie wurden Schülerinnen und Schüler der 10. Schulstufe ausgewählt. Sie haben mit der Analysis noch keine Bekanntschaft gemacht und können somit mit eigenen Worten Antworten auf die gestellten Aufgaben geben, ohne dabei mit Begriffen zu operieren, die in der Analysis behandelt werden. Die Untersuchung wurde in Einzelfallstudien durchgeführt. Es wurden jeweils zwei Schülerinnen und Schüler von einem Interviewer befragt. Dabei wurde die Methode des problemzentrierten offenen Interviews gewählt. Dies bedeutet, es gibt eine konkrete Problemstellung, von der das Interview ausgehen soll. Es soll sich dabei ein offenes Gespräch entwickeln, das durch den Interviewer geleitet wird, seine vorbereiteten Fragen passt er dem Gesprächsverlauf an.[111]

Als Gesprächsgrundlage bekamen die Schülerinnen und Schülern zwei Aufgaben gestellt. Die erste Aufgabe lautete wie folgt:

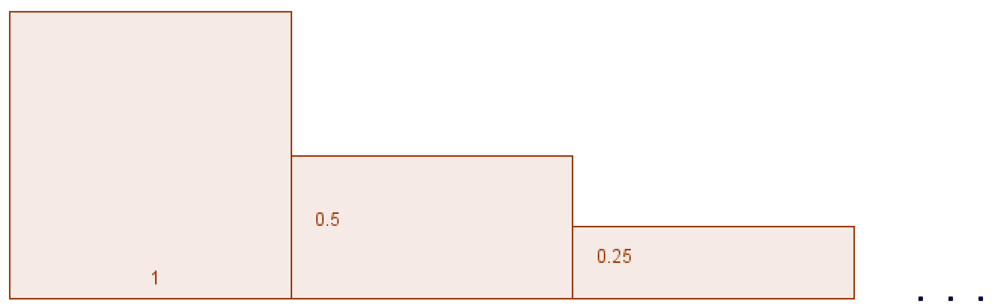


*Abbildung 16: Geometrisches Rätsel (Vgl. Marx, 2006, 81)*

„Die Rechtecke sind 1dm breit. Das erste Rechteck hat die Höhe 1dm, das Zweite ½ dm, das Dritte ¼ dm usw. Die Fläche der Rechtecke ist immer halb so groß wie die Fläche des Rechtecks davor. Wie groß ist die Fläche aller Rechtecke zusammen?“[112]

---

[111] Vgl. Marx, 2013, 78f
[112] ebd., 81

Die zweite Aufgabe lautete folgendermaßen:

Teile die Strecke auf der Zahlengerade zwischen den Punkten 0 und 1 in 10 gleich lange Teilstrecken. Die vierte dieser Strecken von 0,3 bis 0,4 teile erneut in 10 Teilstrecken. Teile die vierte Teilstrecke, also von 0,33 bis 0,34 erneut in 10 Teile, usw.
Gibt es Punkte die auf all diesen Strecken liegen? Wenn ja welche? [113]

Beide Aufgaben sind typische Beispiele, wie sie in der Analysis im Mathematikunterricht vorkommen. Die Studie untersucht ob Jugendliche die Existenz unendlicher Prozesse akzeptieren, ob sie bereits vor Behandlung der Analysis im Unterricht Konzepte zu unendlichen Prozessen haben und wenn ja, wie diese aussehen.
Die Schülerinnen und Schüler versuchen die vorgegebenen Aufgaben der Außenwelt oder der Mathematikwelt zuzuordnen. In der Außenwelt gelten Prozesse als möglich, wenn sie als Handlung durchgeführt werden können, das bedeutet, sie haben eine Handlungsvorschrift, nach der sie starten und einen Punkt, an dem sie zu Ende gehen, wenn das Ergebnis eines Prozesses erreicht wurde. Es kann aber auch sein, dass ein Prozess abgebrochen werden muss, weil die Zeit eine weitere Durchführung nicht ermöglicht. (Zum Beispiel die schriftliche Division von 1 durch 3 in Dezimalschreibweise.)[114]
In der Mathematikwelt ist das anders. Hier kann es Prozesse geben, die nicht abbrechen müssen. Die Division von 1 durch 3 in Dezimalschreibweise ($1:3 = 0{,}333 \ldots.$) kann immer weiter gehen, es gibt keinen Grund, warum sie abgebrochen werden müsste.
Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studie konnten die Aufgaben nicht direkt einer der beiden Welten zuordnen. Beim geometrischen Rätsel können die Rechtecke aus Pappe zu einer Fläche gelegt werden, jedoch kann der Prozess nicht zu Ende gebracht werden. In der Mathematikwelt kann dieser Prozess weitergeführt werden, sodass es bei dieser Aufgabe zu einer Vermischung der Mathematik- und Außenwelt kommt. Zur Lösung der Aufgabe kann sie jedoch rein innermathematisch betrachtet werden. [115]
Auch das Zahlenrätsel konnte nicht direkt zugeordnet werden. Für die Schülerinnen und Schüler ist die Welt der Geometrie der Außenwelt sehr nahe. Der Zahlenstrahl kann auf dem Papier gezeichnet und die Strecken können geteilt werden. Jedoch kann dies nicht unendlich lang passieren, denn die Abstände der Punkte werden zu eng und es kann nichts mehr eingefügt werden. Der Prozess kann also nur in der Mathematikwelt weitergeführt werden.

[113] Vgl. ebd., 80f
[114] Vgl. ebd., 81f
[115] Vgl. ebd., 81f

Die Jugendlichen empfinden diese nicht enden wollenden Prozesse als sehr störend. Die Aufgaben sind so angelegt, dass sie ihren Schwerpunkt in der Welt der Mathematik haben und in ein Problem der Außenwelt eingebettet werden. Der Standpunkt der Schülerinnen und Schüler ist genau anders herum. Sie interpretieren die Aufgaben als Probleme der Außenwelt mit Elementen der Mathematikwelt, die sie eher als störend betrachten. Die Mathematik bietet eher die Möglichkeit, die Außenwelt zu beschreiben, anstatt als freie, von Anwendungen unabhängige Wissenschaft zu agieren. Die Erfahrungen der Außenwelt werden von den Schülerinnen und Schülern herangezogen, um Eigenschaften der Mathematikwelt zu begründen. Die Trennung von Mathematikwelt und Außenwelt ist ihnen fremd.[116]
Schülerinnen und Schüler haben bisher nur Erfahrung mit abbrechenden oder endenden Prozessen gemacht. Deshalb versuchen sie, Beobachtungen bei endlichen Prozessen auf die unendlichen anzuwenden.

Viele Schülerinnen und Schüler gaben an, dass sie das Konzept der Unendlichkeit ablehnen. Konkret bedeutet dies, dass sie beim Geometrierätsel nicht an die Möglichkeit glaubten, eine Gesamtfläche berechnen zu können. Beim Zahlenrätsel wurde daran gezweifelt, dass es möglich ist $0,\dot{3}$ auf dem Zahlenstrahl einzuzeichnen oder aber auch, dass es diese Zahl nicht gibt, da man sie nicht als Dezimalzahl aufschreiben kann.

Andere Schülerinnen und Schüler wiederum stellen die Frage der Existenz nicht. Sie sehen die Aufgaben aus der Sicht der Mathematikwelt, in der es unendliche Prozesse geben kann. Sobald sie die Situation mit Objekten aus der Mathematik beschreiben können, stellt sich die Frage der Existenz nicht mehr. [117]

Um unendliche Prozesse zu beschreiben, nutzen die Jugendlichen ihre Erfahrungen über endliche Prozesse und übertragen diese. Gilt eine Eigenschaft im Endlichen, gilt der unendliche Prozess als Vermittler und trägt sie weiter in die Unendlichkeit, wo sie dann auch gelten muss.[118]

Einige sind andererseits der Meinung, dass auch unendliche Prozesse irgendwann abbrechen, aber man nicht weiß, wann. Über dem Ende des Prozesses liegt ein undurchschaubarer Schatten.[119]

Marx zieht aus seiner Untersuchung Konsequenzen, die ich ebenfalls kurz erwähnen möchte.

Zunächst muss der Begriff „unendlich“ geklärt werden. Die Unterscheidung zwischen aktual und potentiell Unendlich ist dabei zu beachten. Die Schülerinnen und Schüler verbinden mit endlichen Prozessen konkrete Handlungen, erkennen aber schnell, dass diese als unendliche Prozesse nicht fortzuführen sind. Ein Prozess ohne dazugehörige Handlung ist für die

---

116 Vgl. ebd., 82
117 Vgl. ebd., 82f
118 Vgl. ebd., 86
119 Vgl. ebd., 82f

Schülerinnen und Schüler nur schwer vorstellbar. Diese unendlichen Prozesse, die nicht mit Handlungen in Verbindung gebracht werden, können mit der potentiellen Unendlichkeit beschrieben werden. Durch die Unendlichkeit wird eine Aufgabe der Mathematikwelt zugeordnet. [120]

In der Studie hat sich ebenfalls herausgestellt, dass oft nicht klar ist, was eigentlich eine Zahl ist. Einige Schülerinnen und Schüler waren sich nicht einig, ob periodische Dezimalzahlen tatsächlich existieren, denn ihrer Meinung nach kann es keine Zahl geben, die wir nicht (vollständig) aufschreiben können, wie z.B. unendliche Dezimalzahlen.[121]

Die Eigenschaften von Zahlen hängen für Schüler meist von der Art ab, wie sie aufgeschrieben werden. Obwohl $\frac{1}{3} = 0,\dot{3}$ ist und die Jugendlichen dies auch akzeptieren, werden diese Zahlen doch mit unterschiedlichen Eigenschaften beschrieben. Die Problematik besteht darin, dass den Schülerinnen und Schülern die Eigenschaften der einzelnen Zahlenbereiche zu wenig bekannt sind, insbesondere die rationalen und reellen Zahlen, und dass auch die Zusammenhänge zwischen den Zahlenbereichen nicht klar sind. Die Jugendlichen haben sehr unterschiedliche Vorstellungen von Zahlen und ihren Eigenschaften. Das heißt, es müssen die Eigenschaften der Zahlenbereiche und ihre Zusammenhänge im Analysis-Unterricht wiederholt werden, da viele Eigenschaften in der Sekundarstufe I noch nicht so verstanden werden können, wie sie in der Sekundarstufe II gebraucht werden.[122]

Eine Möglichkeit, um die Gleichheit zweier Zahlen wie $0,\dot{3}$ und $\frac{1}{3}$ den Schülerinnen und Schülern klar zu machen, ist die Intervallschachtelung.[123]

Zu Beginn des Analysis-Unterrichts sollte auch die Unterscheidung von Mathematikwelt und Außenwelt thematisiert werden. Es sollten dabei endliche und unendliche Prozesse voneinander abgegrenzt, aber gleichzeitig auch beides in einem Gedankenstrang zusammengeführt werden. Dies kann mit ähnlichen Beispielen wie den beiden in der Studie verwendeten gemacht werden.[124]

Eine weitere Studie zum Thema Unendlichkeit stammt von Tabea Schimmöller. Sie hat untersucht, welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler vom Begriff Unendlichkeit haben und wie sie diese Vorstellungen auf Probleme im Mathematikunterricht anwenden können. Außerdem versuchte sie herauszufinden, ob und wie sich das Verständnis der Unendlichkeit bei Schülerinnen und Schüler durch pädagogische Interventionen verändern lässt.[125]

---

[120] Vgl. Marx, 2006, 107
[121] Vgl. ebd., 91f
[122] Vgl., ebd. 108
[123] Vgl., ebd. 114
[124] Vgl., ebd. 119
[125] Vgl. Schimmöller, 2011, 183

Die Studie wurde an zwei Realschulen in der achten Schulstufe zum Thema Zahlbereiche (natürliche, ganze und rationale Zahlen) durchgeführt. Es wurden insgesamt vier Gruppen getestet, die jeweils geteilt wurden in eine Experimental- und eine Kontrollgruppe. Die Untersuchung bestand aus einer durch einen Fragebogen erarbeitete Standortbestimmung, einer pädagogischen Intervention, die nur die Experimentalgruppen durchliefen, einer weiteren Standortbestimmung durch einen Fragebogen und einem Follow-Up-Test in Form von Einzelinterviews. Durch den Vergleich der beiden Standortbestimmungen sollte eine mögliche Veränderung der Schülervorstellungen durch die pädagogische Intervention erkannt werden. Die pädagogische Intervention bestand aus fünf Unterrichtsstunden, in denen es um die Mächtigkeit von Mengen ging. Der Follow-Up-Test in Form von Einzelinterviews erfolge zwei Monate nach der zweiten Standortbestimmung. In den Interviews sollte die Nachhaltigkeit der Interventionen geprüft und die Vorstellungen einzelner Schülerinnen und Schüler genauer untersucht werden.[126]

Zum Zeitpunkt der Veröffentlichung des Artikels von Tabea Schimöller war die Untersuchung noch nicht abgeschlossen, weshalb nur exemplarisch interpretiert werden konnte. In dieser exemplarischen Interpretation kommt sie lediglich zum Schluss, dass der Begriff der Unendlichkeit bei Schülerinnen und Schülern sehr vielschichtig ist. Die Behandlung des Begriffs im Unterricht ist von großer Wichtigkeit, wird jedoch oft vernachlässigt.[127] Leider konnte ich keine aktuelleren Untersuchungsergebnisse zu dieser Studie finden.

Da der Philosophieunterricht in der 12. Schulstufe stattfindet, möchte ich auf eine Studie von David Tall 1977 (zitiert nach Beutelspacher/Weigand, 2002) eingehen, bei der Mathematikstudenten befragt wurden, die sich im ersten Semester ihres Studiums befanden und die Matura noch nicht so weit zurück lag. Dabei wurde einerseits nach Grenzwerten gefragt, z.B. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n})$, andererseits wurde gefragt ob 0,99999999… kleiner, größer oder gleich 1 ist. Oftmals wurde dabei die zweite Frage häufiger falsch beantwortet als die erste. Da die zweite Frage letztlich nur mit verstandener Grenzwertdefinition richtig beantworten lässt, deutet das Ergebnis der Befragung darauf hin, dass die Grenzwertdefinition oftmals nicht richtig verstanden wurde.[128]

Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel sehen ein Problem in der Sichtweise, wie die Aufgabe aus Talls Studie betrachtet wird. Einerseits wird intuitiv der Entstehungsprozess von $0,\overline{9}$ betrachtet, also die Folge der Teilsummen, andererseits, aus mathematischer Sicht,

[126] Vgl. ebd., 184f
[127] Vgl. ebd., 185f
[128] Vgl. Beutelspacher/Weigand, 2002, 8

das „Endprodukt“ des Prozesses, nämlich der Grenzwert der Folge der Teilsummen. Zwischen diesen Sichtweisen liegt die Problematik des Verstehens des Infinitesimalen.[129]

[129] Vgl. Danchwerts/Vogel, 2006, 28

# 5 Fächerübergreifender Unterricht

Es steht außer Frage, dass mittlerweile jedes Unterrichtsfach über eigene didaktische Konzepte verfügt, um den Ansprüchen zu genügen, die die Gesellschaft an die Institution Schule stellt. Diese Ansprüche lauten: Schülerinnen und Schüler zu kritischen Menschen zu erziehen, sie zu konstruktiven Auseinandersetzungen mit zentralen Fragen zu befähigen und dies auf eine Art zu tun, die sie weder langweilt, beschämt oder sonst wie negativ beeinträchtig. „Fächerübergreifend" unterrichtet wird jedoch oft nur fachintern, indem z.B. Mathematik auf Problemstellungen aus anderen Fächern, Physik, Chemie, Wirtschaft etc., angewendet wird. Oft kommt es dabei zu inhaltlich identischem Unterricht in verschiedenen Fächern.[130] Viel zu selten kommt es zu einer fächerübergreifenden Zusammenarbeit zwischen den Lehrpersonen um die offensichtlichen Zusammenhänge zwischen den Fächern den Schülerinnen und Schülern klar zu machen.[131]

Es gibt verschiedene Gründe für fächerübergreifendes Arbeiten:

- Der Großteil der Schülerschaft stellt sich bei vielen Themen, vor allem in der Mathematik, die Frage, wozu sie eigentlich gelernt werden sollen. Durch einen Fächerübergriff kann der Zusammenhang zu ihren eigenen Problemen und Interessen und die Bedeutung in der Allgemeinbildung gezeigt werden. Kann dieser Zusammenhang nicht hergestellt werden, bilden für Schülerinnen und Schüler Schule und Leben zwei getrennte Bereiche. [132] Das Lernen in Zusammenhängen kommt den Lern- und Erfahrungsmöglichkeiten der Schülerinnen und Schüler besonders entgegen und macht es ihnen leichter, einen sinnvollen Bezug zwischen Schule und Alltag herzustellen.[133]
- Sowohl Schülerinnen und Schüler als auch das Lehrpersonal nehmen viele Themen im Tunnel eines Faches wahr. Sie reduzieren komplexe, verworrene Themen auf einzelne Fächer. Z.B. denken Mathematiker beim Thema Unendlichkeit meist sofort an unendliche Folgen, Differentialrechnung etc., Philosophen und Theologen an die Unendlichkeit Gottes und Physiker an die Unendlichkeit des Universums. Im fächerübergreifenden Arbeiten kann dieser Reduktion der Themen auf ein bestimmtes Fach entgegengewirkt werden. Dadurch werden nicht nur dieselben Themen in unterschiedlichen Fächern behandelt, sondern auch die Herangehensweisen durch verschiedene Methoden und Medien verdeutlicht.[134] Außerdem neigen Lehrerinnen

---

[130] Vgl. Hiller-Ketterer/Hiller, 1997, 166f
[131] Vgl. ebd., 169
[132] Vgl. ebd., 179f
[133] Lange, 1997,155
[134] Vgl. Hiller-Ketterer/Hiller, 1997, 181f

und Lehrer in dieser Hinsicht dazu, ihr eigenes Fach zu überschätzen. Der Bezug zu anderen Fächern wird dadurch abgewertet. [135]

- Es können jedoch nicht nur die Unterschiede der Methodik hervorgehoben, sondern auch die Ähnlichkeiten in der Herangehensweise an die Themen verglichen und erprobt werden. Außerdem können gemeinsam neue Problembewältigungsverfahren entwickelt und ausprobiert werden. [136]
- Oftmals wird am fachspezifisch getrennten Unterricht kritisiert, dass die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler nicht angemessen thematisiert werden kann und es schwierig ist, sie an die Themenwelt der Erwachsenen heranzuführen. Nur fächerübergreifender Unterricht kann dem entgegenwirken.[137]
- Bei einem Fächerübergriff werden nicht nur zwei oder mehr Fächer vermischt, sondern es wird auch expertengemischtes Lernen gefördert, das ebenso wie themengemischtes Lernen in der Schule wünschenswert ist.[138]

Durch fächerübergreifendes Arbeiten verschwindet die gewohnte Trennung der Fächer, und neue Verbindungen werden geschaffen.[139]

Es gibt drei Ansätze fächerübergreifenden Lernens:

1. Der themenorientiere Ansatz
2. Der fachzentrierte Ansatz
3. Der methodenbezogene Ansatz

1. Beim themenorientierten Ansatz wird, wie der Name bereits sagt, von einem bestimmten Thema ausgegangen. Dieses Thema wird in Zusammenarbeit von verschiedenen Fächern bearbeitet und untersucht.[140]
Beispiel: Das Unendliche wird im Mathematik und Philosophie Unterricht behandelt um das Verständnis in beiden Fächern zu erleichtern.
2. Beim fachzentrierten Ansatz wird von einem Fach ausgehend ein Thema unter Miteinbeziehung fächerübergreifender Überlegungen behandelt und vertieft. Dabei liegt die Verantwortung in nur einem Fach, in das andere Fächer miteinbezogen werden.[141]
Beispiel: Das Unendliche wird nur im Mathematik Unterricht behandelt unter Einbeziehung anderer Fächer, z.B. Philosophie, Physik etc.

---

[135] Vgl. Moegling, 1998, 31
[136] Vgl. Hiller-Ketterer/Hiller, 1997, 182
[137] Vgl. ebd., 183f
[138] Vgl. Lange, 1997, 156
[139] Vgl. ebd.,155
[140] Vgl. Landolt, 1999, 15
[141] Vgl. ebd., 14

3. Im methodenbezogenen Ansatz steht die Methode im Mittelpunkt. Sie ist das steuernde Element, und die Thematik wird an sie angepasst. Diese Form des fächerübergreifenden Arbeitens ist besonders geeignet, um mehrere Schulklassen und –stufen miteinzubeziehen.[142]

Beispiel: Es soll die Teambuilding-Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler gesteigert werden und eine entsprechende Methode für den Unterricht wird gewählt. Das Thema wird an diese Methode angepasst, steht jedoch nicht im Vordergrund.

[142] Vgl. ebd., 15

# Teil II

# Vorschläge für den Unterricht

# 6 Unterricht

Im Folgenden finden sich einige Aufgaben für einen fächerübergreifenden Unterricht in Mathematik und Philosophie. Diejenigen Aufgaben, die mit Fußnoten gekennzeichnet sind, stammen von der dort angeführten Quelle und wurden mit speziell auf das Unendliche bezogenen Aufgabestellungen und Fragen von mir ergänzt. Aufgaben ohne Fußnoten stammen von mir, ohne jedoch Gedankenraub begehen zu wollen. Sollte es eine dieser Aufgaben also bereits in einem Buch etc. geben, war es nicht meine Absicht, dieses nicht anzugeben.

Für die Umsetzung im Unterricht gibt es kein Rezept, es können lediglich Vorschläge gegeben werden. Das Thema bietet sowohl in Mathematik, als auch in Philosophie viele Ansätze für den Unterricht. Da das Schuljahr in der 12. Schule aufgrund der Matura sehr kurz ist muss sorgfältig abgewägt werden, welcher Zugang für den Lernfortschritt der Schülerinnen und Schüler zu diesem Zeitpunkt am günstigsten ist. Die Aufgaben sollen den Schülerinnen und Schülern der 12. Schulstufe einerseits ermöglichen die verschiedenen Ansichten zur Unendlichkeit im Bereich der Philosophie kennenlernen, andererseits lernen sie die Anwendung auf wichtige Bereiche in der Mathematik. Außerdem ist es möglich den Unterricht Jahrgangsübergreifend zu gestalten. Die Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse (12.Schulstufe) können ihr Wissen im Bereich der Philosophie mit den Jüngeren teilen um ihnen den schwierigen Umgang mit dem Unendlichen zu erleichtern.

Zuerst soll jedoch geklärt werden, in welchen Bereichen der Lehrpläne und der Grundkompetenzen für die standardisierte Reifeprüfung sich die Aufgaben bewegen.

## 6.1 Lehrplanbezug

Da Philosophie nur in der 8. Klasse (12. Schulstufe) unterrichtet wird, kann der fächerübergreifende Unterricht Mathematik-Philosophie nur in der 8. Klasse stattfinden.
Im AHS-Lehrplan in Mathematik ist in der 8. Klasse folgender wichtige Punkt zu finden: Wiederholung: „umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten“[143]
Mit den Aufgaben der Aufgabensammlung werden die folgenden Punkte im Lehrplan teilweise wiederholt:

5. Klasse, Zahlen und Rechengesetze:

[143] Bundesministerium für Bildung und Frauen, a2004, 6

„Reflektieren über das Erweitern von Zahlenmengen an Hand von natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen"[144]

6. Klasse, Folgen:
„Arbeiten mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen, Erkennen des Zusammenhangs zwischen arithmetischen Folgen und linearen Funktionen sowie zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen"[145]

„Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert"[146]

Die Aufgaben können in folgende Bereiche des Lehrplans für Philosophie eingeordnet werden:

8. Klasse:
„Philosophische Fragestellungen kennen lernen und beschreiben: Verhältnis von Philosophie und Wissenschaft"[147]

„Die Problematik von Wirklichkeit und ihrer Erkenntnis nachvollziehen und analysieren: Zugänge zur Wirklichkeit und ihre Interpretationsmöglichkeiten"[148]

## 6.2 Grundkompetenzen für die standardisierte Reifeprüfung in Mathematik

Neben dem Lehrplan, der den Schlüsselkompetenzen für lebensbegleitendes Lernen des europäischen Parlaments genügt, sollen auch die mathematischen Grundkompetenzen für die standardisiere Reifeprüfung berücksichtigt werden. Kompetenz bedeutet im Kontext des Mathematikunterrichts, ein Konzept entwickeln zu können, das mathematische Denkarten und Darstellungen benutzt, um Probleme des Alltags zu lösen. Diese Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die von den Schülerinnen und Schülern entwickelt werden und längerfristig verfügbar sein sollen, um unterschiedliche Situationen zu meistern.[149]

---

[144] Ebd., 3
[145] Ebd., 4
[146] Ebd., 4
[147] Bundesministerium für Bildung und Frauen, b2004, 3
[148] Ebd., 3
[149] Vgl. BIFIE, 2013, 5

Das Thema Folgen und Reihen wird zwar nicht explizit von den Grundkompetenzen abgedeckt, jedoch bilden das Thema und ein fundierter Umgang mit dem Begriff der Unendlichkeit die Basis für die Differential- und Integralrechnung, die den Großteil des Inhaltsbereichs Analysis bilden.

Neben dem Inhaltsbereich Analysis soll aber auch der Inhaltsbereich Algebra und Geometrie angesprochen werden, insbesondere der Unterpunkt AG.1.1, der wie folgt lautet:[150] „Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ verständig einsetzen können“[151]

Neben den Grundkompetenzen der standardisierten Reifeprüfung werden die Handlungsbereiche und Komplexitätsbereiche der Sekundarstufe I auf die Sekundarstufe II ausgeweitet und im Unterricht geübt und angewendet.[152]

Von den nachfolgenden Aufgaben werden die folgenden Handlungsbereiche abgedeckt:

H1: Darstellen, Modellbilden

H2: Rechnen, Operieren

H3: Interpretieren

H4: Argumentieren, Begründen[153]

Ebenso werden alle Komplexitätsbereiche abgedeckt:

K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten

K2: Herstellen von Verbindungen

K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren[154]

## 6.3 Vorgangsweise

Damit die nachfolgenden Aufgaben sinnvoll eingesetzt werden können, müssen die Schülerinnen und Schüler im Vorfeld verschiedene Positionen zum Unendlichen in Philosophie und Mathematik kennenlernen.

Je nachdem, welche Aufgaben bearbeitet werden sollen, sollte Vorwissen zu den folgenden Themen und Ansichten der angeführten Philosophen und Mathematiker zur Verfügung stehen:

- Potentielle Unendlichkeit
- Aktuale Unendlichkeit
- Aristoteles‘ Metaphysik

---

150 Vgl. ebd., 8f
151 Ebd., 8
152 Vgl. ebd., 18
153 Ebd. 18
154 Ebd. 18

- Proklos
- Galileo Galilei
- Bewegungslehre im 17. Jahrhundert
- Nicolaus Kusanus und Kant
- Bolzano
- Hilbert
- Cantor
- Definition der unendlichen Menge

Diese können mit gezielten kompetenzorientierten Aufgabestellungen erarbeitet werden. Dadurch dienen sie auch als Übung und Vorbereitung für die Reifeprüfung. Kompetenzorientiert bedeutet, hinsichtlich auf die Reifeprüfung in Philosophie, dass die Aspekte Reproduktion, Transfer und Reflexion berücksichtigt werden.[155]

Beispiel:

- Fasse Aristoteles' Ansichten zum möglichen und wirklichen Unendlichen zusammen. (Reproduktion)
- Analysiere die mögliche Unendlichkeit anhand Aristoteles Weltanschauung (Transfer) und erörtere die Probleme, die dadurch für Aristoteles entstanden (Reflexion).

Aufgabenstellungen dieser Art können im Unterricht mit verschiedenen Methoden umgesetzt werden. Eine Möglichkeit wäre zum Beispiel die Expertenmethode. Dabei werden die Aufgabenstellungen zuerst in Gruppen bearbeitet, wobei jede Gruppe ein anderes Thema bekommt. Danach werden die Gruppen neu formiert, sodass in jeder neuen Gruppe ein Mitglied jeder alten Gruppe ist. Nun werden die Inhalte von den sogenannten Experten an die neuen Gruppenmitglieder weitergegeben.
Zur Sicherung der Inhalte sollte eine Zusammenfassung gefertigt und an alle Schülerinnen und Schüler ausgegeben werden.
Um die Aufgabenstellungen bearbeiten zu können benötigen die Schülerinnen und Schüler Bücher, Texte, Artikel, etc. Dafür empfehlenswert sind zum Beispiel die Zeitschriften „mathematik lehren“ (Heft 112) und „Spektrum der Wissenschaft“ (Spezial 1/2001), die jeweils eine gesamte Ausgabe dem Unendlichen gewidmet haben. In diesen Zeitschriften sind einige interessante und brauchbare Artikel für den Unterricht zu finden.

[155] Vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen, 2015, 16

## 6.4 Aufgabensammlung

### 6.4.1 Aristoteles – Letztes Ziel des potentiell Unendlichen?

**Aufgabe:** Schreibe einen Essay über Aristoteles und seine Weltanschauung! Erkläre dabei den Zusammenhang dem potentiell Unendlichen und warum diese potentielle Unendlichkeit für Aristoteles unbefriedigend war!

### 6.4.2 Achilles und die Schildkröte – Zenon von Elea

**Aufgabe:** Der schnellste Läufer Griechenlands, Achilles, und eine Schildkröte laufen um die Wette. Achilles läuft zehn Mal schneller als die Schildkröte, weshalb diese einen Vorsprung von 100 m bekommt. In der Zeit, in der Achilles diese 100 m läuft, legt die Schildkröte 10 m zurück. Ist Achilles diese 10 m gelaufen, so hat die Schildkröte nur noch 1 m Vorsprung usw.[156]

Zenon behauptet nun, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen wird, denn er muss immer zuerst den Vorsprung der Schildkröte aufholen. Kann das sein? Wenn nicht, wie lange braucht Achilles bis er die Schildkröte eingeholt hat, wenn er 10 m/s läuft? Wo liegt das Problem in Zenons Argumentation?
Welche Philosophen und Mathematiker des 17. Jahrhunderts fallen dir zum Thema Bewegung ein und welche Theorien haben sie entwickelt?

**Musterlösung:**
Die einzelnen Zeitintervalle der Teilschritte werden immer kleiner. Im ersten Schritt läuft Achilles 100 m, im zweiten nur noch 10 m braucht dementsprechend weniger Zeit. Dasselbe gilt auch für die Schildkröte. Die Zeitintervalle bilden eine unendliche Reihe, die konvergent ist und eine endliche Summe besitzt. [157]

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ \dots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 10 + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10 + \frac{10}{9} = 11 + \frac{1}{9} = 11,\dot{1}$$

---

[156] Vgl. Beutelspacher/Weigand, 2002, 5
[157] Vgl. Koth/Malle, G./Malle, S./Salzger/Ulovec/Woschitz, 2010, 138

Nach $11,\dot{1}$ Sekunden hat Achilles die Schildkröte erreicht. Zenon hat also eine endliche Strecke unendlich oft geteilt.
In Kapitel 3.3.6 sind die Philosophen und Mathematiker des 17. Jahrhunderts und ihre Äußerungen zum Thema Bewegung zu finden.

### 6.4.3 Zaubertreppe

**Aufgabe:** Um in den Keller des Hauses eines Zauberers zu gelangen müssen wir eine Treppe hinuntersteigen, jedoch keine gewöhnliche Treppe, sondern eine Zaubertreppe.

Diese Zaubertreppe hat nie ein Ende, auf jede einzelne Stufe folgt immer eine weitere. Außerdem werden die Stufen immer kleiner. Sie schrumpfen pro Schritt um einen Faktor $0<a<1$. Es schrumpfen jedoch nicht nur die Stufen, sondern auch derjenige, der die Stufen hinuntersteigt, um denselben Faktor a. (Abb.17)
Wie viel Platz benötigt diese Zaubertreppe, wenn die oberste Stufe 30 cm tief sein soll?“[158]
Welche Aspekte der Aufgabe spiegeln die Aristotelische Sicht des Unendlichen wieder? Welche nicht? Begründe!

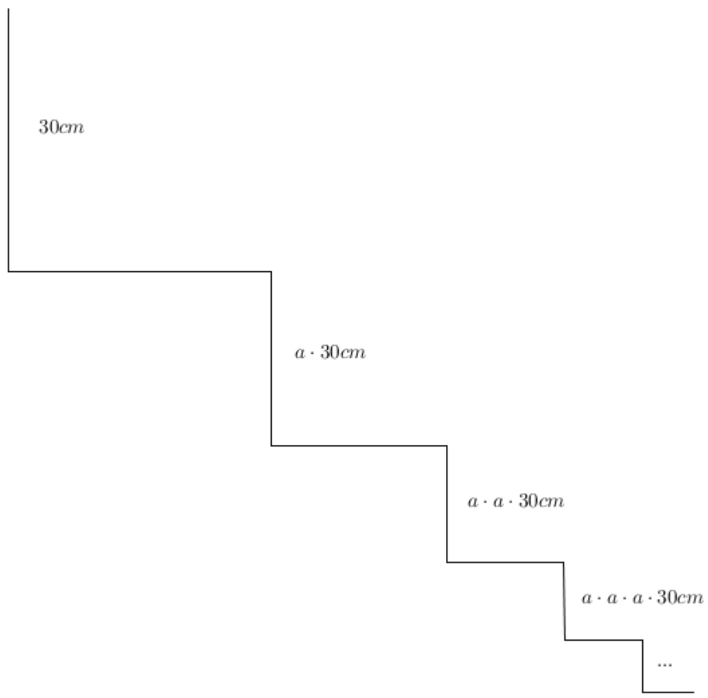


*Abbildung 17: Zaubertreppe (vgl. Richter, 2002, 10)*

[158] Vgl. Richter, 2002, 10

**Musterlösung:**

$$S = 30 + 30 \cdot a + 30 \cdot a^2 + 30 \cdot a^3 + \ ... = 30 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a^i$$

Da $0 < a < 1$ kann der Grenzwert der Reihe berechnet werden.

$$30 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a^i = 30 \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{30}{1-a}$$

Ist z.B. $a = \frac{1}{2}$ , so ist $S = 60cm$

Die gesamte Treppe nimmt einen Platz von $\frac{30}{1-a}$ cm ein.

Die Zaubertreppe an sich ist ein gutes Beispiel für die aristotelische Ansicht des Unendlichen. Es zeigt den Prozess des unendlichen Fortschreitens, es können jedoch nie alle Stufen der Treppe betreten werden. Das Ergebnis der Berechnung wäre für Aristoteles allerdings sehr unbefriedigend, da er das aktual Unendliche nicht zulässt.[159]

### 6.4.4 Albert von Sachsen

Das in Kapitel 3.2.2 beschriebene Beispiel von Albert von Sachsen kann im Unterricht nachgebaut werden. Natürlich kann es nur bis zu einem bestimmten Punkt nachgemacht werden, da wir nicht unendlich viele Bauklötze oder Würfel aneinanderreihen können, denn wir haben weder den Platz noch die nötigen Würfel. Jedoch kann für die Schülerinnen und Schüler der Ansatz schon eine Hilfestellung sein, um sich vorstellen zu können, was passiert, wenn sie es immer weiter machen würden.

Zusammen mit den Abbildungen 3 und 4 und der Erklärung von Albert von Sachsens Beispiel, können verschiedene Aufgabenstellungen gegeben werden.

- Baue mit den dir zur Verfügung stehenden Würfeln die ersten Schritte von Albert von Sachsens Beispiel nach. Erkläre in eigenen Worten, was Albert von Sachsen mit diesem Beispiel zeigen wollte!
- Kannst du einen Zusammenhang zu Aristoteles oder Cantors Unendlichkeitsbegriffen finden? Wenn ja welchen? Wenn nein, wo liegt der Unterschied?

Gibt man den Schülerinnen und Schülern nur die Bauanleitung für das Experiment, ohne Erklärung, können sie sich selbst überlegen, was mit dem Beispiel gezeigt werden oder

[159] Vgl. ebd., 9

was damit gemeint sein könnte. Dies ist jedoch nur in sehr guten Klassen oder dem Wahlpflichtfach möglich.

**Musterlösung:**

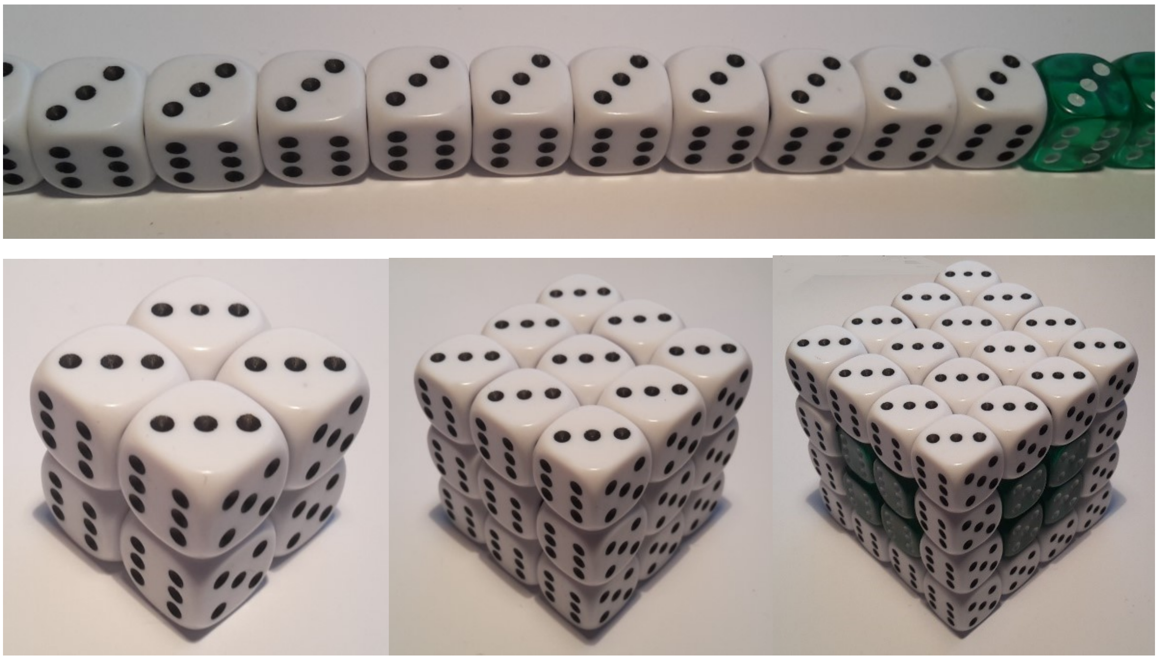

*Abbildung 18: Nachbau des Beispiels von Albert von Sachsen mit Spielwürfeln*

Die potentielle Unendlichkeit spiegelt sich in diesem Beispiel sehr deutlich wieder. Einerseits wissen wir, dass es theoretisch zwar möglich, ist die Würfel unendlich lang aneinander zu reihen, praktisch aber ist es unmöglich, denn weder haben wir den Platz, noch genügend Würfel und Zeit, dies zu tun. Es besteht also nur die mögliche Unendlichkeit.
Des Weiteren ist bereits bei Albert von Sachsen ein Ansatz zu Cantors Mengentheorie zu finden. Es wird gezeigt, dass die unendlich lange Gerade, bestehend aus einzelnen Würfeln, zu einem Würfel umgeordnet werden kann, der sich unendlich ausdehnt und den gesamten Raum ausfüllt. Die Menge der Würfel ist also eine aktual unendliche. Albert von Sachsen hat also auf seine Weise bereits gezeigt, dass die „Einzelteile“ oder Indivisiblen der Gerade und des dreidimensionale Raumes dieselbe Mächtigkeit haben.

### 6.4.5 Geometrische Aufgaben

**Aufgabe:** Das Pentagramm (regelmäßiges Fünfeck) hat die Eigenschaft, dass sich, durch einzeichnen der Diagonalen, im seinem Inneren ein neues Pentagramm ergibt. (Abb.19)

Auch bei diesem können die Diagonalen eingezeichnet werden und es entsteht im Inneren erneut ein Pentagramm.[160]

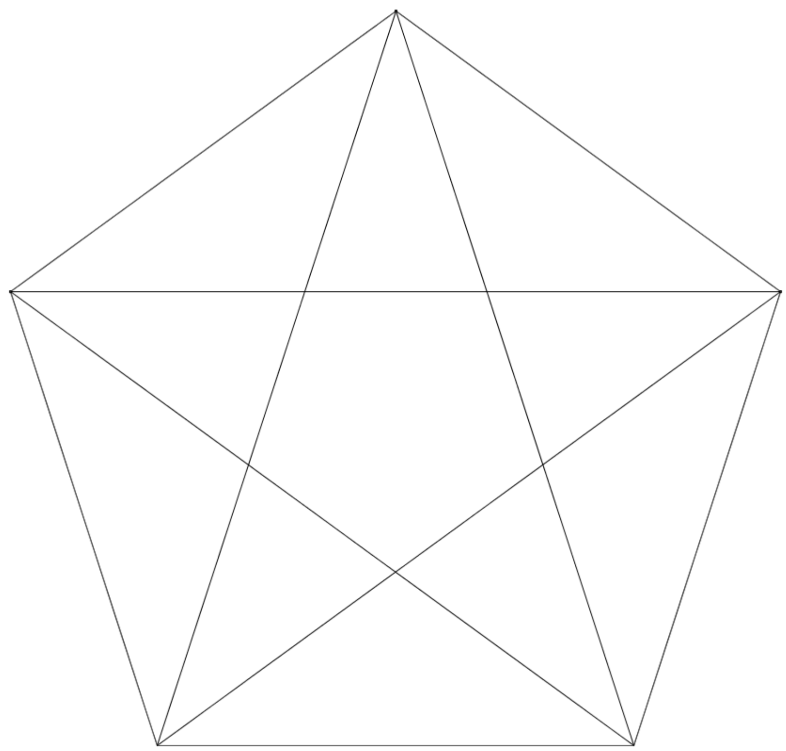

*Abbildung 19: Pentagramm 1. Schritt (vgl. Taschner, 2006, 5)*

Wie viele Pentagramme kannst du tatsächlich mit Stift und Papier einzeichnen? Könnten es theoretisch mehr sein, wenn man nicht von der Dicke des Stiftes und dem Platz auf dem Papier abhängig ist?
Ist dies, nach Aristoteles, ein Prozess möglicher oder wirklicher Unendlichkeit? Begründe!

**Musterlösung:**
Die Antwort, die von den Schülerinnen und Schülern erwartet wird, ist, dass, ohne an Stift und Papier gebunden zu sein, allein in unserem Denken unbegrenzt viele Pentagramme ineinander gezeichnet werden könnten. In jedem auch noch so kleinen Pentagramm kann durch die Diagonalen ein noch kleineres Pentagramm gezeichnet werden. Dies würde ohne Ende so weiter gehen.[161]
Aristoteles würde diesen Prozess als Prozess einer möglichen Unendlichkeit bezeichnen, denn in der Realität ist es nicht möglich, ihn unendlich lang weiterzuführen.

---

[160] Vgl. ebd., 5
[161] Vgl. ebd., 6

Auf keinem Blatt Papier ist es möglich, unendlich viele ineinander geschachtelte Pentagramme zu zeichnen. Es ist lediglich in unseren Gedanken möglich, den Prozess in die Unendlichkeit hinein weiterzuführen.

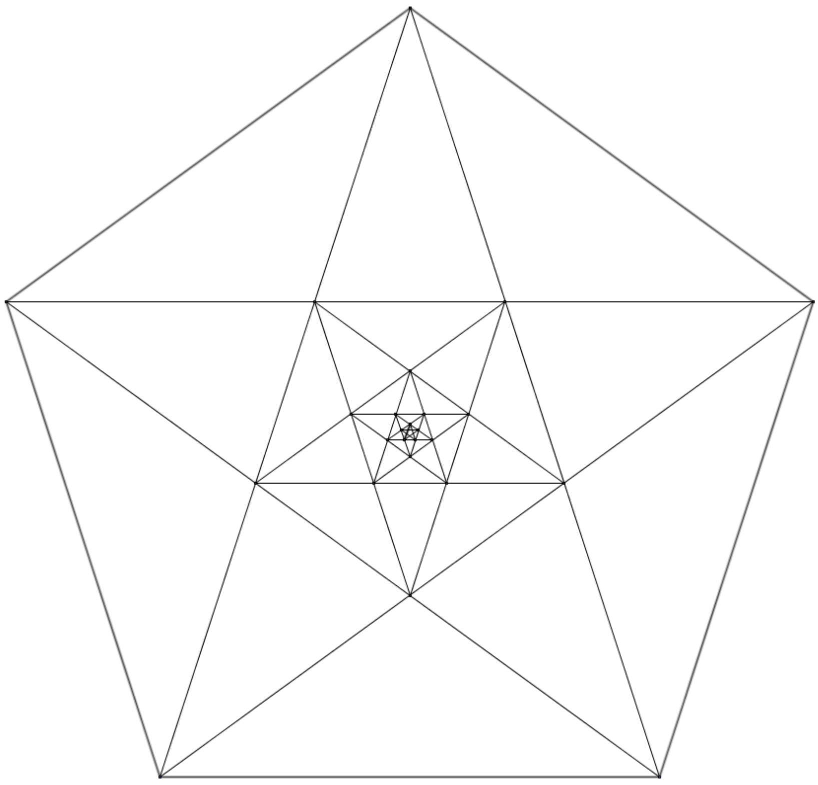

*Abbildung 20: Pentagramm (vgl. Taschner, 2006, 5)*

**Aufgabe:** Die sogenannte „Quadratpflanze“ beginnt mit einem 1cm x 1cm Quadrat. An jeder Ecke des Quadrates wachsen neue Quadrate mit halb so langen Seiten. Dann wächst an jeder Ecke dieser Quadrate wieder ein neues Quadrat mit der halben Seitenlänge der vorigen. Bestimme die Folge der Figurumfänge, -durchmesser (horizontal bzw. vertikal) und –flächeninhalte!

Man kann diese zweidimensionale Pflanze in ein quadratisches Blumenbeet pflanzen, über welches sie nicht hinauswachsen wird. Berechne die Seitenlänge des kleinstmöglichen Blumenbeets!

Bestimme außerdem den Grenzwert des Flächeninhaltes! Stimmt er mit dem Flächeninhalt des Blumenbeetes überein? Begründe deine Antwort![162]

Betrachte das Wachstum der Pflanze! So wie sich die Seitenlängen der Quadrate halbieren, halbiert sich auch die Wachstumszeit. Im ersten Schritt dauert es noch eine Sekunde, bis

[162] Vgl. ebd., 1

das erste Quadrat wächst, im zweiten Schritt eine halbe Sekunde usw. Gibt es eine „unendlichste“ Pflanze? Kannst du dieses Gedankenspiel mit einem Philosophen in Verbindung bringen? Mit welchem? Begründe![163]

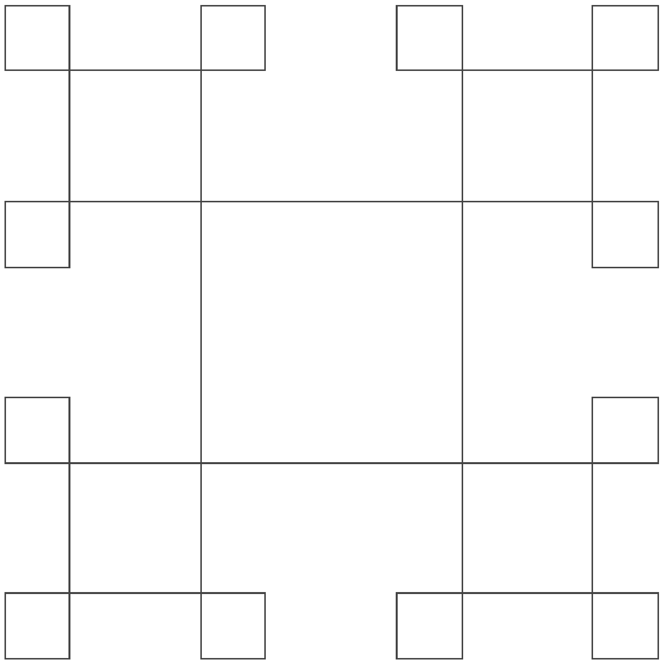

*Abbildung 21: Die Quadratpflanze (vgl. Ableitinger, 2013, 1)*

**Musterlösung:**

Umfang:

$$U_0 = 4\ cm$$

$$U_1 = 4 + 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12\ cm$$

$$U_2 = 12 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 24\ cm$$

$$U_3 = 24 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = 42\ cm$$

...

$$U_n = U_{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = U_{n-1} + 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\ cm$$

Durchmesser:

$$D_0 = 1\ cm$$

[163] Vgl. ebd., 1

$$D_1 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\ cm$$

$$D_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5\ cm$$

...

$$D_n = D_{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k\ cm$$

Flächeninhalt:

$$A_0 = 1\ cm^2$$

$$A_1 = 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\ cm^2$$

$$A_2 = 2 + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2 + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2{,}75\ cm^2$$

$$A_3 = 2{,}75 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 2{,}75 + 4 \cdot 3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{53}{16}\ cm^2$$

...

$$A_n = A_{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = A_{n-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k\ cm^2$$

$$\lim_{n\to\infty} D_n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\ cm$$

Das Blumenbeet muss eine Seitenlänge von 3 cm haben, um der unendlich wachsenden Pflanze Platz zu bieten.

Flächeninhalt Blumenbeet:

$$A_{\blacksquare} = 3 \cdot 3 = 9\ cm^2$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 5\ cm^2$$

Der Grenzwert des Flächeninhaltes stimmt nicht mit dem Flächeninhalt des Blumenbeets überein, da im Blumenbeet Lücken zwischen den Blättern frei bleiben, die nie vollständig aufgefüllt werden. Somit kann es auch keine „unendlichste“ Pflanze geben, denn jede Pflanze hat eine „Nachfolgerpflanze“, vergleichbar mit den Natürlichen Zahlen, wo jede Zahl einen Nachfolger hat.

Wachstumszeit:

$$Z_1 = 1$$

$$Z_2 = Z_1 + \frac{1}{2}$$

$$Z_3 = Z_2 + \frac{1}{4}$$

...

$$Z_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\lim_{k \to \infty} Z_k = 2$$

Der Grenzwert der Wachstumszeit ist 2 Sekunden. Das bedeutet, innerhalb von 2 Sekunden wäre die Pflanze „unendlich" weit gewachsen. Trotzdem wird sie über ein Beet mit 3cm Kantenlänge nicht hinauswachsen.

Die Aufgabe erinnert etwas an Zenon von Elea, der behauptete, dass Bewegung nicht möglich ist, weil immer die Hälfte der Strecke zurückgelegt werden muss, dann die Hälfte der Hälfte usw. und deshalb das Ziel nie erreicht wird. Es wirkt, als würde die Pflanze sich ebenso dem Rand des Beetes annähern, wie Zenons Läufer auf der Strecke seinem Ziel. Sie wird es nie erreichen. Wir wissen heute, dass der Läufer das Ziel erreichen wird, Zenon stiftete seiner Zeit große Verwirrung mit seinem Paradoxon.

**Aufgabe:**

Die Schneeflockenkurve nach Koch beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck.

Jede Seite des Dreiecks wird in drei gleichgroße Teile geteilt, wobei der mittlere Teil durch zwei gleich lange Teile ersetzt wird. Dadurch erhalten die Dreieckseiten eine nach außen gekehrte Spitze, und es entsteht ein sechszackiger Stern mit 12 Seiten.

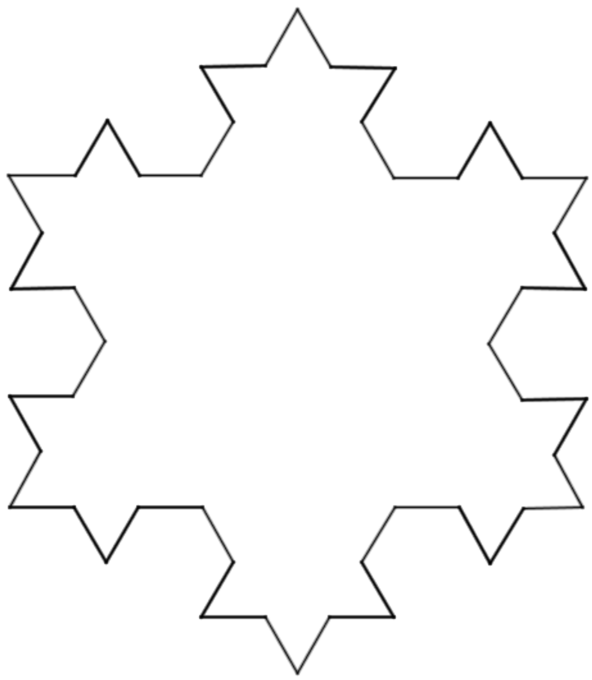

*Abbildung 22: Koch'sche Schneeflocke (vgl. Taschner, 2006, 7)*

Nun wird derselbe Prozess erneut ausgeführt und jede Seite erhält erneut eine Spitze (Abb. 22). Die Figur, die wir erhalten, ähnelt einer Schneeflocke und hat 48 Seiten. Der Prozess wird immer weiter fortgeführt, wodurch eine Figur entsteht, die immer mehr einer Schneeflocke ähnelt, die aus vielen kleinen Schneeflocken zu bestehen scheint. (Abb. 23)
Gib eine Folge an, sowohl in expliziter, als auch in rekursiver Darstellung, die das Wachstum des Umfanges und des Flächeninhaltes der Koch'schen Schneeflocke beschreibt! Berechne die Grenzwerte! Was kann hier über die Unendlichkeit ausgesagt werden?[164]

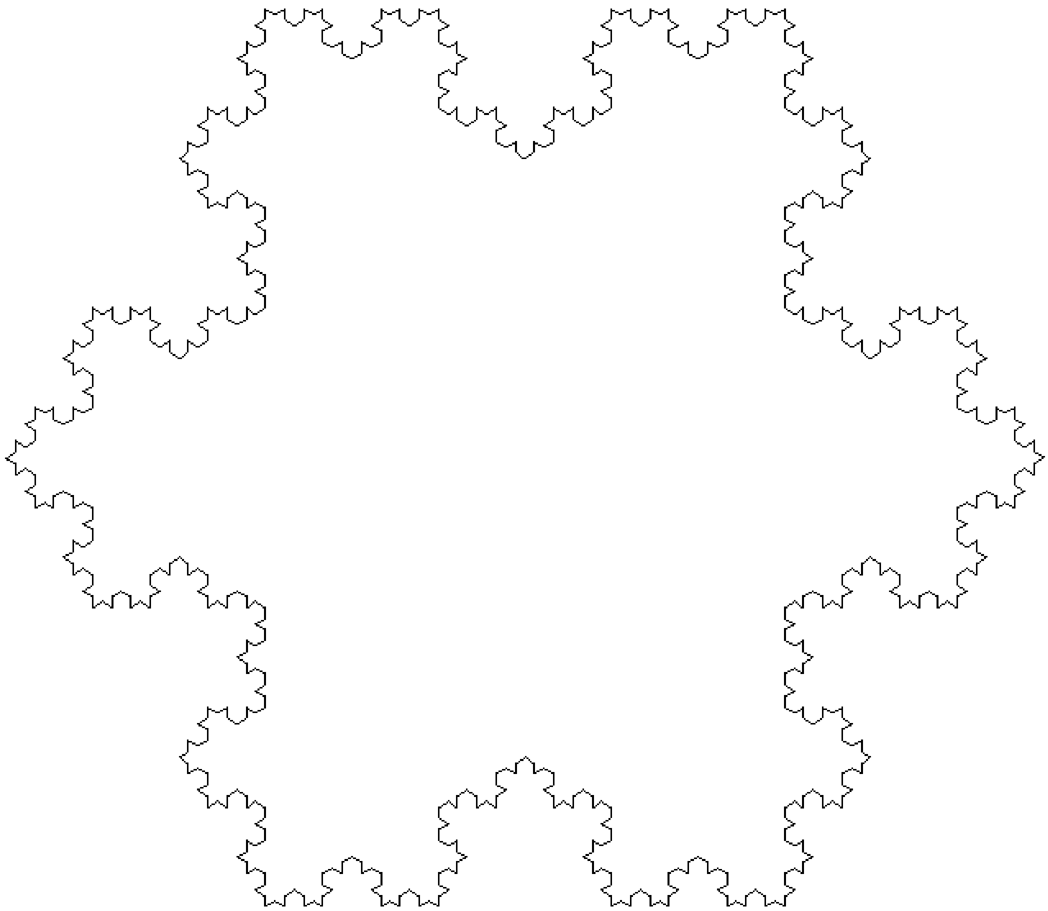

*Abbildung 23: Koch'sche Schneeflocke (http://paulbourke.net/fractals/vonkoch_snowflake/2.gif Zugriff am 17.10.2015)*

[164] Vgl. Ableitinger, 2013, 1

**Musterlösung:**

Umfang:

$$U_0 = 3 \cdot a$$

$$U_1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot a$$

$$U_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot a = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot a$$

...

explizit: $U_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot a$

rekursiv: $U_{n+1} = \frac{4}{3} \cdot U_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$

Flächeninhalt:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$A_1 = A_0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9}\right)$$

$$A_2 = A_1 + 12 \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$$

...

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \left(1 + 3 \cdot 4^0 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \ldots + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot (1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k)$$

explizit: $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot (1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k)$

rekursiv: $A_n = A_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot A_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot (1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1\right)) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \frac{8}{5} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot a^2$

Das Ungewöhnliche an dieser Aufgabe ist, dass die Folge der Umfänge gegen unendlich konvergiert, die Folge der Flächeninhalte jedoch einen Grenzwert besitzt, den sie nie überschreitet.

**Aufgabe:**

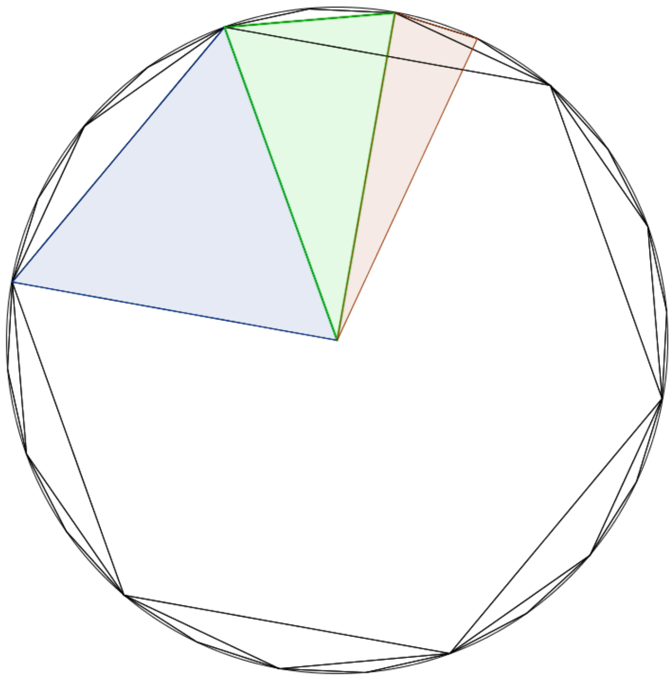

*Abbildung 24: Dem Kreis eingeschriebene Polygone*

Welche Philosophen fallen dir zu Abbildung 24 ein? Welche Überlegungen haben sie zu Polygonen im Kreis in Zusammenhang mit dem Verstand des Menschen geäußert? Was passiert, wenn die Kantenlänge der Polygone unendlich klein wird? Gib deine eigenen Gedanken dazu an.

**Musterlösung:**

Siehe Kapitel 3.2.3 und 3.4.1.

6.4.6 Satan, Cantor und die Unendlichkeit

Klassenlektüre in Mathematik ist wahrlich eine Seltenheit. Aber für jemanden, der sich mit einigen Themen der Mathematik, unter anderem auch der Unendlichkeit, im Unterricht auf spannende und lustige Art und Weise auseinandersetzen möchte, liegt bei diesem Buch richtig.

Satan, Cantor und die Unendlichkeit ist ein Buch von Raymond Smullyan, der verschiedenste Themen der Mathematik und Logik als Rätsel in spannende Geschichten einbaut. So handelt dieses Buch von einem Zauberer, der eigentlich ein Logiker ist, seiner Schülerin Annabel und seinem Schüler Alexander. Einige der Kapitel handeln von der Unendlichkeit. Diese können ohne Kenntnis der vorangegangenen Kapitel gelesen werden.[165]

[165] Vgl. Smullyan, 1993, 7f

Somit können auch nur einzelne Kapitel daraus behandelt werden, ohne dass die vorigen Kapitel zwingend gebraucht werden.
In Kapitel 17 werden Zenons Paradoxa behandelt. Zu Beginn des Kapitels unterhalten sich der Zauberer, Annabel und Alexander über die Unsterblichkeit und philosophieren darüber, ob ein Mensch zu dem Zeitpunkt, an dem er stirbt, bereits tot ist oder noch lebt. So schlagen sie eine Brücke zu Zenons Argumenten, dass Bewegung unmöglich ist.[166]

Kapitel 18 befasst sich mit der Frage, was Unendlichkeit eigentlich ist. Es geht um Mengen und ihre Beziehungen zueinander, wann etwas endlich ist und was als unendlich bezeichnet wird. Dazu sind in diesem Kapitel einige Beispiele enthalten. Hilberts Hotel der Unendlichkeit wird dabei auch sehr genau durchgenommen. [167]

Zu Kapitel 18 passend kann die Definition des Grenzwertes betrachtet werden, um zu analysieren, wo in der Definition die Unendlichkeit steckt. Siehe Aufgabe 6.4.9.

Kapitel 19 befasst sich mit Cantors bahnbrechender Definition der Unendlichkeit. Der Zauberer gibt in diesem Kapitel den Kindern Rätsel auf, die Schritt für Schritt die abzählbare Unendlichkeit erklären. Dabei benutzt er eine Geschichte, in der er selbst Satan ist, was den Titel des Buches erklärt, und die Kinder seine Opfer, die sich durch das Erraten von Zahlen aus der Hölle befreien können. Diese Zahlen werden von Mal zu Mal schwieriger zu erraten, denn zuerst soll die Zahl aus den natürlichen Zahlen, dann aus den ganzen Zahlen sein, ein Zahlenpaar aus ganzen Zahlen usw., bis er schließlich zur Menge der Brüche kommt. Dann wird zu Cantors Entdeckung der überabzählbaren Mengen übergegangen und für Jugendliche verständlich erklärt.[168]

Dieses Kapitel eignet sich nicht nur sehr gut, um den Schülerinnen und Schülern Cantors Entdeckungen zu erklären, sondern auch, um Zahlenmengen zu wiederholen.

Kapitel 20 handelt von Russels Paradoxon. Der Zauberer erzählt Russels Paradoxon verpackt in mehreren Geschichten. Die erste handelt von dem Barbier, der in einem Dorf alle Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren, aber keinen Mann, der sich selbst rasiert. Die Frage lautet nun, ob er sich selbst rasiert oder nicht. Denn rasiert er sich selbst, so verstößt er gegen seine Regel, niemanden zu rasieren, der sich selbst rasiert. Rasiert er sich aber

[166] Vgl. ebd., 168f
[167] Vgl. Smullyan, 1993, 179
[168] Vgl. ebd., 190f

nicht, so zählt er zu den Personen, die sich nicht selbst rasieren und müsste sich somit rasieren.
Die zweite Geschichte handelt vom Land Mannurien. In diesem Land muss jede Stadt einen Bürgermeister haben, jedoch dürfen keine zwei Städte denselben Bürgermeister haben. Die Bürgermeister müssen jedoch nicht in ihren eigenen Städten wohnen. Extra für die Bürgermeister wurde eine Stadt gegründet, Arkadien, in der alle Bürgermeister wohnen müssen, die nicht in den Städten wohnen, in denen sie ihr Amt ausüben. Natürlich muss auch Arkadien einen Bürgermeister haben. Muss dieser Bürgermeister nun in Arkadien wohnen oder nicht?
Eine weitere Geschichte zum Paradoxon von Russel ist das Dilemma des Krokodils. Ein Kind wurde von einem Krokodil entführt. Der Vater würde alles dafür tun, um sein Kind wiederzubekommen. Das Krokodil stellt dem Vater eine Forderung: Wenn der Vater errät, ob das Krokodil das Kind zurückgeben wird oder nicht, wird es das Kind zurückgeben.
Wenn der Vater nun sagt, dass das Krokodil das Kind nicht zurückgibt, was soll das Krokodil dann tun?[169]

Dieses Kapitel ist für sehr gute Klassen geeignet oder für weiterführenden Mathematikunterricht in Form eines Wahlpflichtgegenstandes.

Da dieses Buch sehr viele Themen abdeckt, die in unterschiedlichen Schulstufen behandelt werden, kann es über Jahre hinweg als immer wiederkehrende Klassenlektüre verwendet werden und dadurch auch das Interesse der Schülerinnen und Schüler für das weiterführende Studium der Mathematik, sei es in der Freizeit oder an der Universität, wecken.

### 6.4.7 Gibt es unendlich viele Primzahlen?

**Aufgabe:**
Durchsuche die Literatur und/oder dein Schulbuch nach dem Satz von Euklid, in dessen Beweis gezeigt wird, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Was würden Aristoteles und Cantor zu diesem Satz und Beweis sagen?

**Musterlösung:**
„Satz von Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.“[170]
Beweis: Angenommen es gibt endlich viele Primzahlen. Ist dies der Fall, so bezeichnen wir sie mit $p_1, p_2, \dots, p_n$. Mit diesen Primzahlen bilden wir nun die Zahl $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

[169] Vgl. ebd., 201f
[170] Schichl/Steinbauer, 2009, 23

Wir wissen, dass jede natürliche Zahl größer 1 als Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann, d.h. dass jede natürliche Zahl durch mindestens eine Primzahl teilbar ist. Es muss also eine Primzahl geben, die m teilt. m ist aber durch keine der Zahlen $p_i$ teilbar, da immer ein Rest 1 bleiben würde. Hier findet sich also ein Widerspruch und die Annahme zu Beginn des Beweises wird verworfen. Dies bedeutet, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. [171]

■

In diesem Beweis wird gezeigt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, jedoch können diese niemals alle aufgezählt werden. Sie bestehen also nur in der Möglichkeit, in unserem Denken. Aristoteles' Ansichten zum potentiell Unendlichen sind in diesem Beweis wiederzuerkennen.

Cantor würde die Menge der Primzahlen als abzählbare Menge betrachten, er würde sie also als aktual unendlich bezeichnen. Es gibt eine bijektive Zuordnung zwischen der Menge der Primzahlen und der Menge der natürlichen Zahlen: $2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3, 7 \rightarrow 4, 11 \rightarrow 5 \ldots$

### 6.4.8 Cantors Mengentheorie

**Aufgabe:**

Interpretiere die nachfolgenden Abbildungen! Welcher Mathematiker oder Philosoph fällt dir zu den Abbildungen ein? Wie funktionierten seine Beweise zu der Thematik?

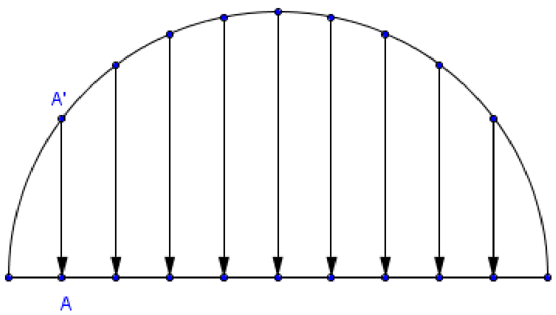


*Abbildung 25: Zuordnung der Punkte eines Halbkreises den Punkten auf dem Durchmesser (Vgl. Delahaye, 2001, 13)*

[171] Vgl. ebd., 23

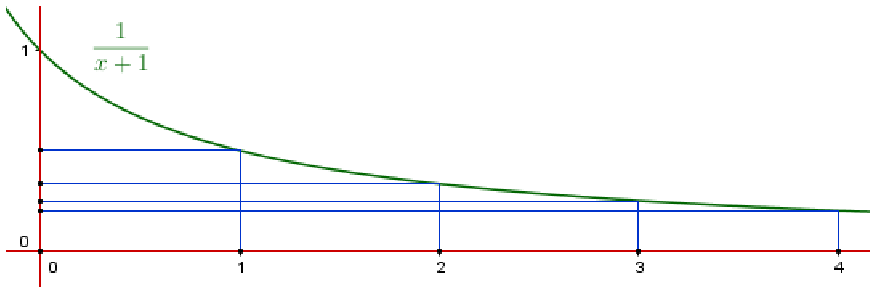


*Abbildung 26: Die Funktion f(x)=1/(x+1) abgebildet (Vgl. Delahaye, 2001, 13)*

**Musterlösung:**

Abbildung 25 zeigt eine Zuordnung der Punkte auf einem Halbkreis zu Punkten auf seinem Durchmesser. Jedem Punkt auf dem Halbkreis kann genau ein Punkt auf dem dazugehörigen Durchmesser zugeordnet werden.

Die Menge der Punkte des Halbkreises ist also gleichmächtig wie die Menge der Punkte des Durchmessers.[172]

Bei Abbildung 26 werden durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ den Punkten aus dem Intervall $]0,\infty[$ bijektiv den Punkten aus dem Intervall $]0{,}1[$ zugeordnet.[173]

Cantor war der erste, der abzählbare und nicht abzählbare unendliche Mengen unterschied und Beweise dafür lieferte, welche Mengen abzählbar sind und welche nicht.

Die Beweise dazu sind in Kapitel 3.4.6 zu finden.

### 6.4.9 Grenzwertbegriffe in Schulbüchern

Der Grenzwertbegriff wird in den verschiedenen Schulbüchern meist gleich oder zumindest sehr ähnlich, definiert. Diese Definitionen können also auf dieselbe Art und Weise untersucht werden, um zu erkennen, welche Rolle das Unendliche in der Definition spielt. Folgende Grenzwertdefinition steht hier exemplarisch für die Definitionen der anderen Schulbücher.

- In „Mathematik verstehen" wird folgende Definition geboten:
  „Die Zahl $a$ heißt Grenzwert (Limes) der Folge $(a_n | n \in \mathbb{N}^*)$, geschrieben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, wenn gilt: Zu jeder Zahl $\varepsilon \epsilon \mathbb{R}^+$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}^*$, sodass
  $$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$
  Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent."[174]

---

[172] Vgl. Delahaye, 2001, 13
[173] Vgl. ebd., 13
[174] Koth/Malle, G./Malle, S./Salzger/Ulovec/Woschitz, 2010, 120

Egal wie klein das ε gewählt wird, es gibt immer einen Index, ab dem alle Folgenglieder innerhalb der ε-Umgebung um den Grenzwert liegen. Das ε kann noch so klein sein, außerhalb der $\varepsilon$-Umgebung liegen stets nur endlich viele Glieder und somit unendlich viele innerhalb.

### 6.4.10 Tristram-Shandy-Paradoxon

**Aufgabe:**

Tristram möchte sein gesamtes Leben in einem Tagebuch festhalten. Er benötigt jedoch ein ganzes Jahr, um nur einen Tag aufzuschreiben. Den 01. Januar 1670 hat er am 31. Dezember 1670 fertig beschrieben, den 02. Januar 1670 dann am 31. Dezember 1671 usw. Bei einem endlichen Leben kann er niemals sein ganzes Leben beschreiben. Was passiert aber wenn er unendlich lang lebt?[175]

**Musterlösung:** Lebt Tristram unendlich lang, kann er auch sein ganzes Leben beschreiben. Die unendlich vielen Tage, die er lebt, und die unendlich vielen Tage, die er benötigt, um sein Leben zu beschreiben, sind beide abzählbar unendlich.

### 6.4.11 Vollständige Induktion

**Aufgabe:**

Die vollständige Induktion ist eine sehr häufig verwendete Beweismethode. Vor allem kommt sie dann zum Einsatz, wenn es darum geht, etwas für alle unendlich vielen natürlichen Zahlen zu beweisen. Um eine solche Behauptung zu beweisen, wird begonnen, die Behauptung für ein fixes n zu zeigen (z.B. n=1). Dies nennt man Induktionsanfang. Es wird nun in der sogenannten Induktionsannahme angenommen, dass die Aussage, die wir beweisen möchten, für eine bestimmte natürliche Zahl n bereits bewiesen wurde. Beweist man nun im Induktionsschritt, dass die Behauptung auch für n+1 gilt, ist auch die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Beispiel eines Induktionsbeweises:

Behauptung: Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen, ist genau das Quadrat von n.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 1 \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 = 1^2$

---

[175] Vgl. Barrow, 2008, 73

Induktionsannahme: Es wird angenommen, dass die Behauptung für ein bestimmtes n schon bewiesen ist, d.h. dass $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ gilt.
Induktionsschritt: Die Behauptung muss nun also für n+1 bewiesen werden, d.h. es soll

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2n+1 \qquad (1)$$

gezeigt werden.
Nun kann die Induktionsannahme eingesetzt werden.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2n+1=n^2+2n+1$$

Auf der rechten Seite der Behauptung, die bewiesen werden soll steht $(n+1)^2$.

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

Die beiden Seiten von (1) stimmen also überein und somit ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen bewiesen. [176]

■

Wie ist diese Beweisart mit Aristoteles' potentiellem Unendlichkeitsbegriff in Verbindung zu bringen?

**Musterlösung:**

Bei dieser Beweisart ist Aristoteles' potentieller Unendlichkeitsbegriff besonders gut erkennbar. Die natürlichen Zahlen sind dadurch definiert, dass jede Zahl einen Nachfolger hat und durch die Nachfolgerbildung zeichnet sich die potentielle Unendlichkeit aus. Im Induktionsschritt wird also eine Behauptung für den Nachfolger (n+1) jeder natürlichen Zahl (n) bewiesen. Selbst wenn wir also, wie Aristoteles bereits sagte, niemals alle natürlichen Zahlen aufzählen können, weshalb sie lediglich potentiell unendlich sind, so gilt ein Induktionsbeweis trotzdem für alle unendlich vielen natürlichen Zahlen.

[176] Vgl. Schichl/Steinbauer, 2009, 42f

„Die Unendlichkeit ist weit,
vor allem gegen Ende.“

*Alphonse Allais*[177]

[177] Delahaye, 2001, 12

# Abbildungsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# Literaturverzeichnis


Ableitinger, Christoph (2013): Übungsaufgaben zur Schulmathematik „Differential- und Integralrechnung". Universität Wien.

Arens, Tilo/ Busam, Rolf/ Hettlich, Frank/ Karpfinger Christian/ Stachel Helmuth (2013): Grundwissen Mathematikstudium. Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Barrow, John D. (2008): Einmal Unendlichkeit und zurück. Was wir über das Zeitlose und Endlose wissen. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

Bedürftig, Thomas/ Murawski Roman (²2012): Philosophie der Mathematik.Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.

Beutelspacher, Albrecht/ Weigand Hans-Georg (2002): Endlich … Unendlich!. In: Mathematik lehren. 2002/ 112, 4-8.

Blay, Michel(2001): Die Bewegungslehre im 17. Jahrhundert. In: Spektrum der Wissenschaft Spezial. Das Unendliche. 2001/Spezial 1, 42-47.

Bleier, Gabriele/Lindenberg, Judith/Lindner, Andreas/Stepancik, Evelyn (2010): Dimensionen Mathematik 6. Wien: Verlag E. DORNER GmbH.

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hg.) (²2013). Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1. Wien. (Zugriff unter http://193.170.220.124/Wordpress/wp-content/uploads/2014/01/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_teil1_2013-11-05.pdf am 03.11.2015)

Bundesministerium für Bildung und Frauen (²2015): Die kompetenzorientierte Reifeprüfung aus Psychologie und Philosophie. Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben. Wien. (Zugriff unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_lfpp.pdf?4r7k80 am 12.05.2016)

Bundesministerium für Bildung und Frauen (a2004): Mathematik (Zugriff unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 am 18.08.2015).

Bundesministerium für Bildung und Frauen (b2004): PSYCHOLOGIE und PHILOSOPHIE (Zugriff unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_13_11865.pdf?4dzgm2 am 30.08.2014).

Clegg, Brian (2015):Eine kleine Geschichte der Unendlichkeit. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart (2006): Analysis verständlich unterrichten. Berlin, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Delahaye, Jean-Paul (2001): Ist das Unendliche in der Mathematik paradox?. In: Spektrum der Wissenschaft Spezial. Das Unendliche. 2001/Spezial 1, 12-20.

Dinauer, Gerhard/Schatzl, Herwig/Szirucsek, Eduard/Unfried, Hubert (1990): Mathematik 6. Wien: „Ueberreuter“ Schulbuch Verlagsgesellschaft m. b. H. & Co. KG.

Heuser, Harro. (2008): Unendlichkeiten. Nachrichten aus dem Grand Canyon des Geistes. Wiesbaden: Teubner Verlag.

Hiller-Ketterer, Ingeborg/ Hiller, Gotthilf G. (1997): Fächerübergreifendes Lernen in didaktischer Perspektive. In: Duncker, Ludwig/Popp, Walter (Hg.): Über Fachgrenzen hinaus. Chancen und Schwierigkeiten des fächerübergreifenden Lehrens und Lernens. Heinsberg: Agentur Dieck, 166-195.

Koth, Maria/ Malle Günther/ Malle, Sonja/ Salzger, Bernhard/ Ulovec, Andreas/ Woschitz Helge (2010): Mathematik verstehen 6. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Landolt, Hermann. (1999): Grundlagen fächerintegrierenden Unterrichts. In. Landolt, Hermann/Weibel, Walter/Gonon, Philipp (Hg.):Fächerintegrierender Unterricht. Handbuch zum fächerintegrierenden Unterricht. Anleitung für Lehrpersonen. Pädagogik bei Sauerländer. Dokumentation und Materialien, Band 7.Aarau: Verlag Sauerländer, 7-24

Lange, Bernward (1997): Aspekte imaginativer Förderung im fächerübergreifenden Unterricht. In: Duncker, Ludwig/Popp, Walter (Hg.): Über Fachgrenzen hinaus. Chancen und Schwierigkeiten des fächerübergreifenden Lehrens und Lernens. Heinsberg: Agentur Dieck, 155-165.

Lorenzo Martínez, Janvier de(2001): Die Wissenschaft vom Unendlichen. In: Spektrum der Wissenschaft Spezial. Das Unendliche. 2001/Spezial 1, 6-11.

Marx, Andreas (2006): Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen“. In: Texte zur mathematischen Forschung und Lehre. Hildesheim/Berlin: Verlag Franzbecker KG, 2006/Band 50.

Marx, Andreas (2013): Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen – Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. In: Journal für Mathemastik-Didaktik. 2013/34, 73-97

Moegling, Klaus (1998): Fächerübergreifender Unterricht – Wege ganzheitlichen Lernens in der Schule. Bad Heilbrunn/Obb: Klinkhardt.

Reményi, Maria (2001): Geschichte des Symbols ∞. In: Spektrum der Wissenschaft Spezial. Das Unendliche. 2001/Spezial 1, 40-41.

Richter, Karin (2002): Cantor fragt: unendlich=unendlich?. In: Mathematik lehren. 2002/112, 9-13.

Schichl, Hermann/Steinbauer, Roland (2009): Einführung in das mathematische Arbeiten. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Schimmöller, Tabea (2011): Wie verstehen Schülerinnen und Schüler den Begriff der Unendlichkeit?. In: Helmerich, Markus/Lengnink, Katja/Nickel, Gregor/Rathgeb, Martin (Hg.):Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 179-188.

Schneider, Ivo (1979): Archimedes. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Smullyan, Raymond (1993): Satan, Cantor und die Unendlichkeit und 200 weitere verblüffende Tüfteleien. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

Taschner, Rudolf (²2006): Das Unendliche. Mathematiker ringen um einen Begriff. Berlin, Heidelberg: Springer.

Wörner, Deborah (2014): Faszination Unendlich – Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht. In: Ames, Judith/Roth, Jürgen (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Münster: WTM-Verlag, 1373-1374.

Ziegler, Renatus (1992): Mathematik und Geisteswissenschaft. Mathematische Einführung in die Philosophie als Geisteswissenschaft in Anknüpfung an Plato, Cusanus, Hegel und Steiner. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag.

# Abstract – Deutsch

Das Unendliche spielt im Analysis-Unterricht in der Oberstufe eine wichtige Rolle, doch eine genauere Diskussion des Begriffs kommt oft zu kurz. Das Ziel dieser Arbeit ist, die Konzepte der potentiellen und aktualen Unendlichkeit in den Mathematik- und Philosophieunterricht zu bringen, um den Umgang mit dem Unendlichen in Mathematik zu erleichtern. Der erste Teil der Arbeit bietet einen Einblick in die verschiedensten Positionen von Mathematikern und Philosophen zur potentiellen und aktualen Unendlichkeit und damit den theoretischen Hintergrund für die im zweiten Teil der Arbeit präsentierten Ideen zur Umsetzung in der Schule in Form eines fächerübergreifenden Unterrichts und den inkludierten Aufgabenpool zum Konzept des Unendlichen.

# Abstract – English

The concept of infinity plays a great role in sixth form analysis classes, but an in depth discussion of the term often falls short of conveying its meaning. The aim of this work is to introduce the concepts of potential and actual infinity to mathematics and philosophy classes to facilitate the handling of infinity in mathematics.
The first part of this work allows an insight into the different perspectives mathematicians and philosophers had on the subject of potential and actual infinity. This shapes the theoretical background for the second part of the work, implementing the concept at school through interdisciplinary classes.

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine fremde Hilfe in Anspruch genommen habe. Weiters versichere ich, dass ich außer der angegebenen Literatur keine weitere verwendet und alle von anderen Autoren wörtlich übernommenen Stellen nach mir bekannten Richtlinien zitiert habe.

Deutschkreutz, Mai 2016 Natalie Herold