universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Probleme mit dem Grenzwertbegriff in historischer und psychologischer Hinsicht

Verfasser

Maximilian Motsch

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 482 406
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Bewegung und Sport, UF Mathematik
Betreuer:	Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

Die folgenden Zeilen können nicht den Dank ausdrücken, den ich jenen Menschen eigentlich schulde, welche mich auf meinem Weg durch das Studium begleitet und tatkräftig unterstützt haben.

Allen voran, möchte ich meinen Eltern danken, welche mir dieses Studium ermöglicht und immer zu mir gehalten haben und mich in sämtlichen Belangen unterstützt haben. Sie werden immer Vorbilder für mich sein und sie sind auch der Grund, warum ich mich letztendlich für dieses Studium entschieden habe. Danke Mama, danke Papa!

Ebenso möchte ich mich bei meiner Freundin Sina mehr als bedanken – es war während der Zeit des Schreibens nicht immer einfach, dennoch hat sie es geschafft, mich immer wieder zu motivieren und mir ein Lächeln aufs Gesicht zu zaubern.

Des Weiteren seien auch meine Freunde, sowie Studienkollegen erwähnt, denn durch sie wurde das Studium um einiges angenehmer.

Ein herzliches Dankeschön geht auch an meinen Korrekturleser Horst.

Letztendlich gebührt auch ein großer Dank meinem Diplomarbeitsbetreuer Univ. Doz. Dr. Franz Embacher, welcher die Arbeit geduldig in die richtigen Bahnen gelenkt und immer wieder entscheidende Tipps und Hinweise beigesteuert hat.

Danke euch allen!

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Zu Beginn meines Studiums bekam ich aus gegebenem Anlass von meinen Eltern ein Buch geschenkt. Dabei handelte es sich um „Die Geschichte der Null“ von Robert Kaplan (Kaplan 2005), und wurde mir mit folgenden Worten überreicht: „Das passt doch irgendwie zu deinem Studium und an Geschichte warst du doch auch immer interessiert“. Das stimmt, doch ich wunderte mich zunächst über den Titel des Buches. Gibt es denn eine Geschichte der Null? Ich begann zu lesen und war anfangs direkt erstaunt, wie lange es gedauert hat, bis die bzw. eine Zahl Null gefunden wurde. Je mehr ich jedoch gelesen hatte, desto mehr verstand ich, dass diese lange Zeitspanne, bis die „Null“ in die Mathematik gekommen war, nicht verwunderlich ist, denn das „Nichts“ und der richtige Umgang damit muss erst einmal gefunden werden. Dieses Buch änderte durchaus mein damaliges Verständnis bzw. meine Auffassung mancher Dinge, welche die Mathematik betreffen, und es half mir auch ein wenig bei meinen ersten Prüfungen.

Die Mathematik hat einige höchst interessante Errungenschaften und Begriffe hervorgebracht und entwickelt, daran besteht kein Zweifel. Bei vielen mathematischen Begriffen und Methoden ist dies aber nicht sofort bzw. überhaupt nicht ersichtlich – so wie beispielsweise bei der Zahl Null. Die Geschichte der Mathematik und ihre Entwicklung halten hier wahrscheinlich so manche interessante Information bereit. Die Überlegungen, diese Geschichte für den Unterricht nutzbar zu machen, hat vor allem durch das genetische Prinzip Einzug in die Didaktik der Mathematik gefunden, und übt auf mich eine gewisse Faszination aus. Damit kam ich über diverse Umwege auf den Gedanken, dieses Thema bei meiner Diplomarbeit zu behandeln.

So stellte sich für mich die Frage, welche auch als Motivation für diese Diplomarbeit dient(e), ob und inwiefern uns (Lehrpersonen) die Auseinandersetzung mit der Geschichte der Entwicklung des Grenzwertbegriffs helfen kann, (um) Verständnisproblemen und Schwierigkeiten seitens der Schüler/innen besser entgegenzukommen. Um eine Antwort auf diese Frage oder zumindest hilfreiche Hinweise zu bekommen, werde ich in meiner Arbeit zuerst einen Rückblick in die Geschichte machen und mich mit der Genese des Grenzwertbegriffs auseinandersetzen. Im Anschluss daran wird die Rolle des Grenzwertbegriffs in der heutigen Zeit, sowohl in der (klassischen) Analysis als auch im Mathematikunterricht, kurz umrissen.

Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit Problemen und Schwierigkeiten im Umgang mit dem Grenzwert. Dabei werden zwei Aspekte verfolgt: Einerseits wird versucht, anhand dreier Punkte aufzuzeigen, dass es von Vorteil ist, über die Probleme Bescheid zu wissen, welche Schüler/innen beim Erlernen und Verstehen von Grenzprozessen und des Grenzwertbegriffs haben können. Andererseits werden diverse Studien und Artikel, welche sich auf unterschiedliche Weise mit der Problematik im Umgang mit dem Grenzwertbegriff beschäftigen, vorgestellt, um in weiterer Folge Probleme und Schwierigkeiten der Schüler/innen angeben und benennen zu können. Diese Probleme und Schwierigkeiten ordne ich dann sogenannten Problemfeldern zu, welche für mich die „Hauptprobleme" darstellen und in gewisser Weise der Grund für andere Probleme und Schwierigkeiten sind bzw. diese mitbedingen. Des Weiteren ist diese Einteilung für die angestellten Überlegungen im Schlusskapitel hilfreich.

Im Schlusskapitel werden die wesentlichen Erkenntnisse und Folgerungen zusammengefasst und mit dem Versuch verknüpft, die oben gestellte Frage unter Zuhilfenahme der vorangegangenen Kapitel zu beantworten. Mit einem kurzen Resümee schließt die Arbeit.

2. Geschichte und Genese des Grenzwertbegriffs

Wann nimmt die Entwicklung des Grenzwertbegriffs ihren Anfang? Ein eindeutiger Zeitpunkt ist dieser Frage nicht zuzuordnen. Es dauerte jedenfalls eine lange Zeit, bis sich der Begriff bzw. die Definition des Grenzwerts so zeigte, wie wir (wohl gemerkt) Mathematiker/innen diese(n) kennen, und so drängen sich manche Fragen auf:

- Warum hat die Entwicklung eigentlich so lange gedauert?
- Hatten die „alten Griechen“ in der Antike schon eine Ahnung von diesem Begriff?
- Welche Probleme führten zu einem „verbesserten“ Grenzwertbegriff?

Beschäftigt man sich mit Mathematik, wird einem früher oder später auffallen, dass die historische Entwicklung von mathematischen Begriffen sich nicht mit der Reihenfolge einer einführenden Vorlesung in Analysis deckt:

> Traditionellerweise wird [diese] (mehr oder minder) in der folgenden Reihenfolge abgehalten: Mengen, Abbildungen ⇒ Grenzwerte, stetige Funktionen ⇒ Ableitungen ⇒ Integration. Andererseits fand die historische Entwicklung dieser Reihenfolge in umgekehrter Reihung statt: Cantor, Dedekind 1875 ⇐ Cauchy, Weierstraß 1821 ⇐ Newton 1665, Leibniz 1675 ⇐ Archimedes, Kepler 1615, Fermat 1638. (Hairer & Wanner 2011, S. 5 im Vorwort)

Somit wurden die „Grundlagen der klassischen Analysis“, wie Grenzwertbegriff, Stetigkeit oder die reellen Zahlen, erst viel später gelegt bzw. erschaffen als die darauf aufbauenden Begriffe und Gebiete. Es mag durchaus erstaunlich erscheinen, dass „in den ersten Lehrbüchern der Differenzial- und Integralrechnung, die Ende des 17. Jahrhunderts veröffentlicht wurden, […] der Begriff des Grenzwertes […] gar nicht vor [kommt]“ (Struve & Witzke 2013, S. 44). Es drängt sich fast eine weitere Frage auf: Wie konnten ohne Grundlagen solche beachtlichen Ergebnisse erzielt werden?

Um Antworten auf die oben gestellten Fragen zu finden, möchte ich einen kleinen geschichtlichen Abriss der Analysis mit Fokus auf den Grenzwertbegriff geben und im Anschluss daran ein kurzes Resümee ziehen. Bei meinen Ausführungen und Folgerungen stütze ich mich zum großen Teil auf die Werke Hischer & Scheid (1995), Jahnke (1999), Sonar (2011) sowie Wußing (2008 a, b).

Da im Zeitraum der Antike diverse Erkenntnisse und „Meinungen“ hervorgebracht entstanden, speziell auch über das Thema „Unendlichkeit“, welche die Ansichten nachfolgender Mathematiker/innen und die Entwicklung der Wissenschaft generell maßgeblich beeinflusst haben, wird auch dieser Zeitraum beleuchtet.

2.1. Zeitraum ca. 8. – 1. Jahrhundert v. Chr.: Die griechische Antike

Der Zeitraum der Antike ist nicht klar eingrenzbar, das ist für diesen Abriss aber auch nicht von Nöten. Für unsere Betrachtungen ist die Zeitspanne vom 8. bis zum 1. Jahrhundert v. Chr. interessant. Den ungefähren Beginn markieren die 776 v. Chr. erstmalig ausgetragenen Olympischen Spiele bzw. das Wirken Thales von Milets (ca. 627–547 v. Chr.), der als einer der sieben Weisen und erster Philosoph angesehen wird.

In der Zeit der Antike waren neben der (damals noch) philosophischen Frage nach Beschaffenheit und Aufbau des Raums, bei der u.a. die Begriffe „Unendlichkeit" sowie das „Kontinuum" diskutiert wurden, noch zwei andere Themen von Bedeutung. Eines davon war das Weltbild der Pythagoreer, welches durch die Auffassung geprägt war, die Welt ließe sich durch Zahlen bzw. ganzzahlige Verhältnisse beschreiben. Dies bedeutete für sie, dass je zwei Größen kommensurabel sind - das heißt, es gibt zu zwei Größen x, y eine gemeinsame Maßeinheit z und natürliche Zahlen n und m mit den Eigenschaften[1] (vgl. Deiser 2008, S. 26):

$$x = n \cdot z$$
$$y = m \cdot z$$

Dieses Weltbild würde nach moderner Fassung folgendermaßen definiert werden: „Es gilt $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$" (Deiser 2008, S. 27).

Das andere waren die drei klassischen Probleme, die Quadratur des Kreises, die Verdopplung des Würfelvolumens und die Winkeldreiteilung, welche die Mathematiker der damaligen Zeit beschäftigten, wobei vor allem Ersteres und die daraus entstandene Exhaustionsmethode für *unseren Abriss* interessant sind.

Diese Probleme, Fragen und Überlegungen verbindet der Umstand miteinander, dass sie sich indirekt mit den irrationalen Zahlen und dem Unendlichen beschäftigen. Natürlich sei an dieser Stelle auch das von Euklid verfasste Werk *Die Elemente* erwähnt, welches durchaus als einflussreichstes mathematisches Lehrbuch bezeichnet werden darf, jedoch hier nicht für sich genauer behandelt wird, sondern nur in Auszügen Erwähnung findet.

[1] Hier sei erinnert, dass uns der (abstrakte) Zahlbegriff ermöglicht, eine Größe (z.B. Länge, Flächeninhalt) durch die *Anzahl* der Maßeinheit anzugeben und wir so Größen gleicher Art vergleichen können; 186 mal 1 cm ist größer (länger) als 175 mal 1 cm, aber 56 mal 1 kg ist nicht größer als 55 mal 1 m^2.

2.1.1. Die Frage nach der Beschaffenheit des Raums

> Die Entdeckung inkommensurabler Größen, also die Existenz irrationaler Zahlen hat die griechischen Mathematiker sicher verstört und dafür gesorgt, dass sich die griechische Mathematik primär auf die Geometrie zurückgezogen hat. Das Irrationale war ja nach [Lasswitz 1984, Band 1, S.175] [sic.] zugleich das Unaussprechliche, Unbegreifliche, Bildlose. Allerdings hat ein Philosophenstreit über Dinge des Seins die Analysis fast noch nachhaltiger erschüttert und diese Erschütterung ist bis heute zu spüren. (Sonar 2011, S. 47)

Wie ist die Welt eigentlich aufgebaut? Woher kommen wir und wohin gehen wir? Diese Fragen beschäftigen uns Menschen seit ewigen Zeiten. Schon lange bevor sich die ersten Naturphilosophen, wie z.B. Thales von Milet etc., mit diesen Fragen auseinandersetzten, versuchten sich die Menschen verschiedenste Phänomene zu erklären. „Aber alles Unerklärliche hatten sie (Anm.: Der Autor meint hier nur die Griechen der Vorantike, jedoch kann das für sämtliche andere damaligen Hochkulturen übernommen werden) in die Gestalt der Götter gebannt. […] unerklärt aber blieb, auf welche Weise die Götter eigentlich in den Lauf der Welt eingreifen konnten“ (Göbel 1998, S. 14). So stellte sich Thales die Frage, welche von Griechenland aus bald die gesamte Welt erfasste: „Woraus bestehen alle Dinge, woraus entwickeln sie sich und worin lösen sie sich schließlich wieder auf, wobei das Wesen bleibt und nur die Eigenschaften sich wandeln?“ (Göbel 1998, S. 15).

Diese „Urfrage“, wie Göbel (1998) sie nennt, beschäftigte von da die Philosophie bzw. war wahrscheinlich überhaupt ihr Ursprung. Es wurden in den folgenden Jahrhunderten verschiedene Theorien dazu entwickelt. Thales selbst hielt das Wasser für den Urstoff. Bei Anaximander (610-545 v. Chr.) war es kein Stoff, sondern ein Begriff, das „‚Apeiron‘, das Unendliche, das Unbegrenzte, das Unbestimmte“ (Göbel 1998, S. 18), wohingegen sich sein Nachfolger Anaximenes (585-525 v. Chr.) wieder für etwas Stoffliches entschied: die Luft. Durch Parmenides (540-470 v. Chr.) – welcher übrigens der Lehrer von Zenon[2] war - kam die interessante Überlegung hinzu, dass der Mensch eigentlich nur begrenzt fähig sei, die Welt, das Sein an sich, wahrzunehmen bzw. zu erkennen und zu begreifen. Diese Einsicht war mit der Urfrage gemeinsam eine Herausforderung für die philosophische (und wissenschaftliche) Welt für die nächsten zwei Jahrtausende. So wurden weitere Versuche unternommen, um Licht in den Aufbau der Welt zu bringen. Im Großen und Ganzen entwickelten sich durch die damit verbundenen Versuche und Theorien zur Erklärung zwei

[2] Zenon wurde vor allem durch seine Paradoxien bekannt, dazu kommen wir noch am Ende des Abrisses.

Denkmodelle: die Atomlehre (auch Atomismus genannt) und das (Aristotelische) Kontinuum (vgl. Göbel 1998 u. Sonar 2011).[3]

Die Atomlehre wurde von Leukipp (ca. 5. Jhdt. v. Chr.) und Demokrit (460-370 v. Chr.) erdacht, welche nach ihnen besagt, „daß aus unteilbaren Körpern die übrigen Dinge zusammengesetzt seien […], durch ihre Trennung und Vereinigung [erfolgt] das Entstehen, durch ihre Anordnung und Lage die Veränderung“ (Aristoteles, zit. nach Göbel 1998, S. 48). Diese *unteilbaren Körper* wurden zu einem Begriff, der viele Diskussionen nach sich zog und für so manche Philosophen der Antike mehr als problematisch war. Damit sich die Körper nämlich bewegen können, musste für Leukipp und Demokrit ein Nichts, eine Leere (zwischen ihnen) existieren. Dies stand vor allem im Gegensatz zu der Anschauung, der Raum sei als zusammenhängend, kontinuierlich, eben als Kontinuum zu sehen. Die Ansätze bzw. Ursprünge dieser Anschauung finden sich u.a. bei Parmenides und wurden später von Aristoteles (384-322 v. Chr.) weiter entwickelt.

Doch warum war die Atomlehre für viele, wie beispielsweise Aristoteles, problematisch? Es ist doch gut vorstellbar, dass der Aufbau der Welt wie oben beschrieben sein könnte, aber die vermeintlichen Stärken dieses Modells boten „Angriffspunkte“ und waren auch gleichzeitig dessen Schwächen.

Die in ihrer Anzahl unendlich vielen unteilbaren Körper sind im leeren Raum in ständiger Bewegung und „diese Bewegungen vollzögen sich nach den festen Gesetzen von Aufprall und Abprall. […] Folglich gäbe es auch kein zufälliges oder grundloses Geschehen […]“ (Göbel 1998, S. 49). Für Demokrit war damit ein Ordnungsprinzip, ein „Ursachenzusammenhang“ gegeben. Hier aber hakt Aristoteles auf verschiedenste Weise ein: Einerseits sei es nicht möglich, dass aus der unendlichen Anzahl und den damit unendlich vielen Möglichkeiten des Zusammenstoßens eine geordnete Natur entstehen kann (dies war einer der Hauptgründe, dass die Atomlehre relativ geringen Einfluss auf das antike Denken hatte). Andererseits, und hier gelangen wir zu den für die Mathematik interessanten Überlegungen, stellen die unteilbaren Körper einen Widerspruch zu der Auffassung des unbegrenzten, stetigen Teilens (einer Strecke) dar. Denn für Aristoteles „*ergibt sich die Unmöglichkeit des Aufbaus eines Kontinuums aus unteilbaren Gliedern, etwa eine Linie aus Punkten, wenn ja die Linie ein Kontinuum und der Punkt unteilbar ist*“ (Aristoteles 1995, zit. nach Sonar 2011, S. 50).

[3] Es muss nur bedacht werden, auch im Sinne der weiteren Ausführungen, dass diese Modelle nicht sofort vorhanden waren, sondern Weiterentwicklungen voriger Gedanken und Überlegungen darstellen und somit auch Unterschiedlichkeiten und Gegensätze in den Modellen sich vielmehr im Laufe der Zeit durch die Beschäftigung und Auseinandersetzung mit ihnen ergaben. Demokrit lebte ja lange vor Aristoteles.

Die Gretchenfrage der damaligen Zeit lautete aber: Wie hältst du es mit der Unendlichkeit? Für Demokrit bestand das Universum aus unendlich vielen (seiner) unteilbaren Körper, Aristoteles zog bei seinen Überlegungen über die Unendlichkeit aber „einen [anderen] Schluss von größter Tragweite: *Dass das Weltall endlich ist*“ (Heuser 2008, S. 96f). Denn Aristoteles hatte eine gewisse Affinität für die Endlichkeit bzw. Scheu vor dem Unendlichen. Er sah jedoch die Notwendigkeit *einer* (Art von) Unendlichkeit bei der unbegrenzten Teilung einer Strecke und bei der Möglichkeit immer weiter zählen zu können, also bei der Zahlenreihe, „und hier gelangen wir nun endlich ins Herz der Aristotelischen Unendlichkeitslehre: zu der raffinierten Unterscheidung des ausgebufften Begriffsvirtuosen zwischen dem ‚aktual (oder aktuell) Unendlichen‘ und dem ‚potential (oder potentiell) Unendlichen‘. Diese Distinktion sollte Geschichte machen“ (Heuser 2008, S. 98). Für Aristoteles ist das Unendliche nur im Sinne eines *potentiellen* Fortschreitens, eines Prozesses, der beliebig wiederholt und fortgesetzt werden kann, möglich und nicht als *Totum*, als ein in sich abgeschlossenes *aktuales* Etwas. Der Unterschied der beiden Auffassungen bzw. die daraus resultierende Konsequenz wird durch eine Beschreibung von Heuser ersichtlich:

> Die ‚unbegrenzte Teilbarkeit‘ aber, meint Aristoteles, dürfe nur in dem Sinne verstanden werden, dass zu je endlich vielen schon markierten Teilpunkten schrittweise stets noch weitere Teilpunkte hinzugefügt werden können. Eine *simultane*, also schlagartig erfolgende Zerschneidung einer Größe an jeder Stelle, eine rest-lose Zerschneidung, die nichts Ausgedehntes unzerteilt lässt, stürzt uns hingegen in das aberwitzige Dilemma, eine ausgedehnte Größe als eine Summe von unausgedehnten Punkten - von lauter Nichtsen - und so denn selbst als ein Nichts zu sehen. Diese Überlegung nimmt Aristoteles als Beleg dafür, dass es aktual unendliche Unterteilungen nicht geben könne - mehr noch: Es lässt ihn das Aktual-Unendliche als solches preisgeben. (Heuser, 2008, S. 99)

Diese beiden verschiedenen Auffassungen von Unendlichkeit beschäftig(t)en die Philosophen, Mathematiker und Theologen in den nächsten zwei Jahrtausenden bis Cantor, wie wir sehen werden, wobei Aristoteles‘ „kontinuierliche Anschauung“ sehr prägend und einflussreich war, so dass (meist) nur die Frage nach dem Aufbau des Kontinuums relevant war. Hier war auch die Entdeckung der Inkommensurabilität mitentscheidend, welche, modern ausgedrückt, darauf hinweist, dass $\mathbb{Q}$ Lücken hat.

2.1.2. Die Pythagoreer und die Inkommensurabilität

Die Entdeckung der Inkommensurabilität, also die Entdeckung von Strecken in Figuren, deren Längen nicht „in einem durch ganze Zahlen ausdrückbaren Verhältnis stehen“ (Meschkowski 1961, S. 6), sich somit nicht in der Form $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ schreiben lassen, ist eine der ersten Berührungen der Mathematik mit dem Unendlichen. Wie und wo genau die Pythagoreer ihre eigene These „Alles ist Zahl“ (Zahl hier im Sinne einer natürlichen Zahl) verwerfen mussten, ist nicht ganz klar. Hier sollte vorher noch gesagt sein, dass diese These nicht so simpel und naiv war, wie sie vielleicht auf den ersten Blick wirken mag. Deiser schreibt beispielsweise dazu:

> ‚Alles ist Zahl‘ ist möglicherweise eine Simplifizierung der Sicht des Pythagoras. Bei Aristoteles lesen wir, daß die Pythagoreer die Prinzipien der Mathematik für ‚die Prinzipien alles Seienden‘ hielten, und entsprechend der Bedeutung der Zahlen für die Mathematik „nahmen sie [die Pythagoreer] an, die Elemente der Zahlen seien Elemente alles Seienden, und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl“ (Aristoteles, Metaphysik §985f). Das ergibt doch ein weitaus komplexeres Bild als die etwas grobe Formel ‚Alles ist Zahl‘. (Deiser 2008, S. 27)

Die meisten Werke (Meschkowski 1961, Sonar 2011 u.a.) bringen mit der Entdeckung der Inkommensurabilität den Pythagoreer Hippasos von Metapont (ca. 500 v. Chr.) in Verbindung, wobei diese „nach neueren Forschungsergebnissen, durch ‚Wechselwegnahme‘ am Pentagramm gemacht worden sein [dürfte] und nicht am Quadrat, bei dem die Diagonale inkommensurabel zur Quadratseite ist“ (Wußing 2008a, S. 177). Es war dies die erste Grundlagenkrise in der Mathematik, welche die Mathematik der Griechen stark beeinflusste: Die pythagoreische Weltanschauung, die „arithmetica universalis“, wurde umgestürzt, und ihr Vorhaben, die Geometrie zu arithmetisieren, gestoppt. Darin werden auch Gründe gesehen, dass „Strecken“ über „Zahlen“ gestellt wurden, da sich alle Zahlen (und Verhältnisse) als Strecken darstellen lassen, umgekehrt jedoch nicht alle Strecken als (Verhältnisse von) Zahlen, wie z.B. die Diagonale des Einheitsquadrats: „Womöglich kann dieser Schock auch dafür verantwortlich gewesen sein, dass die Geometrie in der griechischen Mathematik hervorragend entwickelt wurde, während Algebra und Arithmetik nur zögerlich betrieben wurden“, spekuliert Sonar (2011, S. 26).

Die Weiterentwicklung bzw. Weiterbeschäftigung mit kommensurablen sowie inkommensurablen Größen und der Ausbau der Proportionslehre durch Eudoxos von Knidos (vermutlich 408-355 v. Chr.) führten zu einer Art axiomatischem Zugang, der dann auch in den Elementen von Euklid (Buch V und X) beschrieben wurde. Diese Proportionslehre beinhaltet unter anderem gewissermaßen, jedoch noch nicht in genau dieser Schreibart[4], das *Archimedische Axiom* (Sonar 2011, S. 27):

[4] Bei Sonar (2011, S. 30) ist noch zu lesen: „Man kann das Archimedische Axiom auch äquivalent formulieren, nämlich so, dass für je zwei Größen $y > x > 0$ eine natürliche Zahl N existiert, so dass $N \cdot x > y$ gilt. In dieser Form hat es Eingang in Euklids Elemente gefunden und das Archimedische Axiom müsste eigentlich *Eudoxos'sches Axiom* heißen.“

„Zu jeder noch so kleinen positiven reellen Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl n, so dass gilt:

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \,."$$

Der Ursprung dieses Axioms ist das *Messaxiom* (Elemente V, Def.4, zit. nach Thiele in Jahnke 1999, S. 8):

„Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können“,

welches durch den *Wegnahmesatz* (Euklid X, Def.1, ebd., S. 8):

„Nimmt man beim Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die Ausgangsgröße ist.“,

in eine „divise Form“ gebracht wurde, die in „moderner, standardisierter“ Form wie folgt aussieht (ebd., S. 8):

„Jede Größe a kann beliebig klein gemacht werden (das heißt, daß mit einer geeignet gewählten natürlichen Zahl n $\frac{a}{2^n}$ kleiner als jede beliebige Größe b gemacht werden kann, also $\frac{a}{2^n} < b$).“

Die Proportionslehre sowie die Entdeckung der Inkommensurabilität gelten als grundlegend für die Analysis und sind eine wichtige Vorarbeit für die „axiomatische Charakterisierung“ der reellen Zahlen gegen Ende des 18. Jahrhunderts (vgl. z.B. Hischer & Scheid 1995, S. 19). Vor allem ermöglicht uns das Archimedische Axiom die Definition einer Nullfolge bzw. ist deren Vorläufer!

2.1.3. Quadratur des Kreises

Die Quadratur des Kreises, also die Aufgabe, einen Kreis mit dem Radius r in ein flächengleiches Quadrat zu überführen, entstammt der griechischen Mathematik. Interesse an der Berechnung der Kreisfläche gab es aber natürlich auch schon davor, so hatten bereits die Babylonier und auch die Ägypter (gute!) Näherungswerte für die Zahl π. Aus dem berühmten *Papyrus Rhind* ist bei Aufgabe 50 (oder 48?) zu entnehmen (Gericke 1984, zit. nach Wußing 2008a, S. 119):

„Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9 ht (ein Längenmaß). Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm 1/9 von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64.“

Dieses Verfahren, also $(d - d/9)^2$ (wobei d den Durchmesser des Kreises bezeichnet), liefert für π den ungefähren Wert $56/81 = 3{,}16$, wahrlich keine schlechte Näherung.

Die konkrete Formulierung bzw. Aufgabenstellung „Gegeben ist ein Kreis mit Radius r. Man konstruiere ein flächengleiches Quadrat“ wird Anaxagoras, ein Schüler von Anaximenes, der selbst wiederum Schüler des berühmten Thales von Milet war, zugeschrieben. Dieser soll sich diese Aufgabe im Gefängnis aus Langeweile ausgedacht haben (vgl. Sonar 2011, S. 21). Die Quadratur beschäftigte seit diesem Zeitpunkt Generationen von Mathematikern/innen bis ins 19. Jahrhundert, erst da gelang es Ferdinand Lindemann zu beweisen, „dass die Zahl π eine transzendente irrationale Zahl ist, d. h. die Zahl π ist nicht Lösung einer Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$. Damit war bewiesen, dass die Quadratur des Kreises ein unlösbares Problem darstellt“ (Sonar 2011, S. 21).

In der Antike haben verschiedene Mathematiker sich darüber Gedanken gemacht und Vorschläge zur Lösung erbracht. In der Folge möchte ich auf drei Personen näher eingehen, deren Überlegungen die Mathematik nachhaltig beeinflusst haben. Natürlich seien an dieser Stelle auch kurz Hippokrates und seine *Möndchen* erwähnt, dessen Weg „zwar für die Kreisberechnung letztlich eine Sackgasse“ war, der „aber die Bemühungen der Griechen um die Kreisquadratur stimuliert“ hat (Thiele in Jahnke 1999, S. 21 f).

Bryson von Herakleia (450 – 370 v. Chr.)

Bryson hatte eine simple und bestechende Überlegung:

> Der Kreis […] ist größer als jedes einbeschriebene Polygon und kleiner als jedes umbeschriebene Polygon. Im Vergleich wozu aber Größeres und Kleineres existiert, dazu existiert auch Gleiches. Es existieren aber größere und kleinere Polygone als der Kreis, also existiert auch ein ihm gleiches. (Becker 1954, zit. nach Wußing 2008a, S. 173)

Mit dieser Überlegung, falls sie gültig wäre, ist die Folgerung verbunden, dass die Kreisquadratur möglich ist. Wie wir aber bereits wissen, ist dies nicht der Fall. Was ist nun falsch an dieser Überlegung, ist sie doch nicht so simpel? Die Überlegung wurde u.a. bereits von Aristoteles und Proklos diskutiert und kritisiert. Das Problem dabei ist, dass

Bryson vor dem Unendlichen gewissermaßen stehenbleibt und eine „atomistische Vorstellung“ hat, „der zufolge für hinreichend große n ein n-Eck und ein Kreis identifiziert werden können“ (Thiele in Jahnke 1999, S. 22). Er denkt sich die Abfolge der Polygonzüge kontinuierlich weiter als eine stetige Veränderung der Größen. Bryson bringt damit eine der ersten Stetigkeitsüberlegungen in die Mathematik, bei Breidbach (2015) ist zu lesen:

> Er [Bryson] zeigt, dass es zu diesen Polygonen immer noch kleinteiligere gibt, die sich enger an den Kreis anlagern. Es wird also davon ausgegangen, dass es eine Folge von Polygonen gibt, in der die Differenz zwischen dem Kleineren und dem Größeren immer geringer wird. Dieses ‚immer kleiner‘ impliziert eine Kontinuität in der Abfolge von derartigen Größenbestimmungen. Es gibt also keine Diskontinuitäten in der Darstellung der den Kreis nach unten oder oben begrenzenden Polygone. D. h. also, dass wir eine stetige Veränderung der Größen zu denken haben. Damit ist das Prinzip der Stetigkeit als eine Funktion beschrieben und derart aus der Konstruktion in das mathematische Denken eingeführt. Es wird erfasst, dass diese Stetigkeit notwendige Bedingung für die Funktion des Beweises hat. Das bedeutet, dass es eine lückenlose Folge entsprechender geometrischer Körper gibt und entsprechend dann auch eine lückenlose Folge der diese Körper beschreibenden Maße. Selbst wenn es also nicht möglich ist, diese Maße numerisch auszudrücken, sind so doch Bedingungen formulierbar, die sie als Größe beschreiben lassen. (Breidbach 2015, S. 226)

Seine Überlegungen waren vielleicht simpel und nicht ganz korrekt, sie führten aber jedenfalls zu interessanten Diskussionen und zu der Frage, „unter welchen Bedingungen [gilt] der Satz, *wozu es ein Größeres und ein Kleineres gibt, dazu gibt es auch ein Gleiches*?“ (Breidbach 2015, S. 226).

Eudoxos von Knidos (408 – 355 v. Chr.)

Eudoxos entwickelte die Überlegungen von Bryson weiter und gelangte zu (seinem) *Exhaustionsbeweis*. Diese Beweisführung ist „streng, aber sehr unhandlich“, sie kommt allerdings ohne Verwendung von unendlichen Folgen oder Grenzwertbetrachtungen aus (vgl. Jahnke 1999). Es wurden dabei zwei Schritte durchgeführt:

> Im ersten Schritt wird die zu untersuchende Größe A durch eine andere, besser beherrschbare Größe B angenähert. Im zweiten Schritt wird – modern gesprochen – die Trichotomie der reellen Zahlen benutzt: Sofern mit einem doppelten Widerspruchsbeweis gezeigt werden kann, daß weder $A > B$ noch $A < B$ möglich sein kann, muß $A = B$ sein. (Thiele in Jahnke 1999, S. 23)

Grundlage für diese Beweismethode ist der Wegnahmesatz bzw. seine moderne Umformulierung. Mithilfe dessen wird (gewissermaßen) die „Existenz einer beliebig kleinen Größe“ garantiert und „dadurch […] eine beliebig genaue Approximation ermöglicht“ (Thiele in Jahnke 1999, S. 23). In der Folge führt die „Anwendung der Exhaustion auf die Berechnung der Kreisfläche“ zu dem Satz (Sonar 2011, S. 34):

„Gegeben sei ein Kreis C mit Fläche $A(C)$ und eine Zahl $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein einbeschriebenes reguläres Polygon P mit der Eigenschaft: $A(C) - A(P) < \varepsilon$.“

Archimedes (287 – 212 v. Chr.)

Kein/e Schüler/in kommt wahrscheinlich an den Überlegungen zur Kreisflächenberechnung bzw. den Näherungsversuchen zur Zahl π von Archimedes vorbei. Archimedes erkannte wohl als einer der Ersten, dass nicht nur das Verhältnis von Fläche und Radiusquadrat, sondern auch von Kreisumfang zu seinem Durchmesser konstant ist, und stellte näherungsweise Berechnungen zu jener Konstante an, welche uns heutzutage nur allzu gut bekannt ist.Dazu schrieb er, analog zu Bryson, einem Kreis ein 96-Eck ein als auch um und konnte somit den Wert für π zwischen $3\frac{10}{71}$ ($\approx 3{,}140845$ ...) und $3\frac{1}{7}$ ($\approx 3{,}142857$ ...) einschränken.

2.2. „Zwischenzeit“ und Scholastik

Nach der Antike passierte bis ins 12./13. Jahrhundert in unserem Kulturkreis mathematisch relativ wenig. Dies hatte verschiedene Gründe: Einerseits wurde z.B. die Kreisquadratur nicht mehr als ein Problem gesehen, da $22/7$ für den exakten Wert von π gehalten wurde[5] (vgl. Sonar 2011, S. 118). Ein – wohlgemerkt kleines - aufgehendes Licht in diesem Zusammenhang war ein gewisser Franco von Lüttich, welcher, angestiftet durch einen Text von Aristoteles, sich mit der Kreisquadratur beschäftigte. Er kam zu dem Schluss, dass diese noch nicht gelungen war. Grund dafür war folgende Überlegung: „Hat ein Kreis den Durchmesser $d = 14$, dann erhält man seine Fläche, wenn man den Radius $r = 7$ quadriert und mit $22/7$ (das π Francos) multipliziert“ (Sonar 2011, S. 118). Das ergibt eine Kreisfläche von 154 und dies ist keine Quadratzahl.

Andererseits, bedingt durch Völkerwanderung, Untergang des römischen Reichs, Kriege etc., wanderte das einst in der Antike durch Aristoteles, Euklid, Archimedes usw. gewonnene Wissen durch die damals bekannte Welt und es dauerte den Umständen entsprechend

[5] Es gab wohl Verbesserungen des Näherungswertes Archimedes‘. Der Chinese Tsu Ch’ung Chi (430-510) berechnete den Bruch $355/113 \approx 3{,}141593$ und „kam damit π auf 0,0000085 % Fehler nahe“, wobei seine Methode nicht bekannt ist (s. u. vgl. Paturi 2008, S. 113).

lang, bis die wesentlichsten Werke und Erkenntnisse der Antike wieder unserem Kulturkreis zugänglich waren, da die meisten Arbeiten, wenn überhaupt, nur in arabischer Sprache vorhanden waren und erst übersetzt werden mussten. Gegen Ende des 13. Jahrhunderts war es soweit: Die Werke Aristoteles, Archimedes usw. lagen in der Gelehrtensprache Latein vor. Damit waren „die Voraussetzungen geschaffen, auf dieser Basis die Mathematik weiter zu entwickeln. Auch die Analysis in Form von Diskussionen über das Kontinuum nimmt nun wieder Fahrt auf", drückt es Sonar treffend aus (2011, S. 126).

2.2.1. Die Anfänge der Scholastik

Angeregt durch das neue „alte" Wissen entwickelte sich die Ambition, „die aristotelische Philosophie in die christliche Theologie einzuarbeiten" (Sonar 2011, S. 127), bei der es nicht unmittelbar zu großen mathematischen Entwicklungen kam, jedoch interessante Diskussionen und Aussagen über die Unendlichkeit entstanden und damit wurde die sogenannte Scholastik eingeläutet.

Als Gründervater der Scholastik gilt Anselm von Canterbury (1033-1109), von dem auch der berühmt gewordene ontologische Gottesbeweis stammt (Sonar 2011, S. 127):

> Prämisse 1: Gott ist das vollkommenste Wesen („worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann").
> Prämisse 2: Zur Vollkommenheit gehört die Existenz.
> Konklusion: Gott existiert.

Dieser Beweis fand neben Befürwortern aber auch viele Kritiker und „gehört zu den meistdiskutierten Problemen der Philosophiegeschichte" (Sonar 2011, S 128).
Das Anliegen, die gleichen mathematischen Strategien bzw. Methoden wie die griechischen Mathematiker – um „eine Wahrheit zu finden, [führten] sie komplizierte Sachverhalte auf einfachere zurück, bis sie auf unwiderlegbare Axiome kommen" (Sonar 2011, S. 128) – auch in der „Theologie (und in den Naturwissenschaften)" anzuwenden, wurde durch die Schriften von Abaelard (1079-1142) vorangetrieben und es bildeten sich mit der Universität in Oxford und der Sorbonne in Paris „zwei Zentren der Scholastik" (Sonar 2011, S. 128).

Im Zusammenhang mit der Entstehung der Universität Oxford ist vor allem Robert Grosseteste (1175-1253) zu nennen, der „nach den Worten von Alistair C. Crombie [Crombie 1995, II S. 27] […] der eigentliche Begründer der wissenschaftlichen Tradition Oxfords und sogar der gesamten englischen intellektuellen Kultur“ ist (Sonar 2011, S. 130). Für uns sind neben seinen anderen Arbeiten speziell seine Betrachtungen und Meinungen zum Unendlichen interessant. So gibt es für Grosseteste verschiedene Stufen des Unendlichen, wobei sich das Unendliche, das Kontinuum, aus unendlich vielen Punkten zusammensetzt (vgl. Sonar 2011, Seiten 130f).
Eine weitere wichtige Person ist der als „Doctor Mirabilis“ bekannte Roger Bacon (1214-1292). Für ihn war klar, dass das „Aktual-Unendliche“ nicht existiert, und er sprach sich für eine Endlichkeit der Welt und gegen den Atomismus aus, wie bei Sonar (2011, S. 132) und Heuser (2008, S. 163) zu lesen ist. Dabei argumentierte er mit folgendem Beweis (zit. nach Heuser 2008, S. 163):

„Angenommen, die Welt sei unendlich, dann könnte man (Fig. 8) eine Linie ABC ziehen, die in der Richtung nach C ins Unendliche läuft:

Abb. 1: „Fig. 8“ (aus Heuser 2008, S. 163)

Dann wäre (in moderner Symbolik) $AC = \infty$ und $BC = \infty$, also wäre (N.B. ‚unendlich = unendlich‘!) $AC = BC$, im Widerspruch dazu, dass AC doch um das Stück AB länger ist als BC. Daher kann es eine solche unendliche Gerade gar nicht geben. Die Welt muss somit *endlich* sein.“

Durch Albertus Magnus (1200-1280) und andere wurden die vorangegangen Überlegungen gewissermaßen weiterentwickelt, und durch die Diskussion des Kontinuums - Albertus war „wie Aristoteles [...] der Ansicht, dass das Kontinuum beliebig teilbar ist, dass aber unterhalb einer gewissen Grenze die schrankenlose Teilung ihre Wirkungsfähigkeit verliert“ (Neidhart 2007, zit. nach Sonar 2011, S. 135) - wurden nun auch Überlegungen über Bewegung bzw. die Bewegungslehre des Aristoteles gemacht: Inwiefern hängen Zeit, Raum und Bewegung zusammen und wie lässt sich das in ein Kontinuum einfügen? Dabei war vor allem das „Jetzt“, also der Moment der Gegenwart, ein problematischer Diskussionspunkt, denn wie soll dieses „Jetzt“ gesehen werden? In einem stetigen, einem fließendem (Zeit-)Kontinuum ist ein starrer, unteilbarer Punkt doch nicht wirklich passend. Albertus macht bei seinen Überlegungen einen radikalen Schritt weg von der Kontinuumsauffassung des Aristoteles, ist bei Sonar zu lesen und er zitiert eine Bemerkung von Breidert (Sonar 2011, S. 135): „In diesem Sinne ist der Punkt das primum continuans, das principium und die causa der Linie.“ Der Punkt ist somit der Ausgang, er erzeugt das Kontinuum (vgl. Sonar 2011, S. 135).

2.2.2. Das Mertoncollege

Die Probleme der Kontinuumsdiskussion wurden am Merton College von einer Personengruppe weiterbehandelt, zu der unter anderen Thomas Bradwardine (1290-1349) und Richard Swineshead (gest. 1354) gehörten. Im Zuge ihrer Arbeiten und Herausarbeitung zwischen Kinematik und Dynamik entwickelte Swineshead folgenden Satz[6]:

> Bewegt sich ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit durch die erste Hälfte eines bestimmten Zeitintervalls, durch das nächste Viertel des Intervalls mit doppelter Geschwindigkeit, durch das folgende Achtel mit dreifacher Geschwindigkeit und so weiter ad infinitum, dann ist die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Zeitintervall genau doppelt so groß wie die Anfangsgeschwindigkeit. (Sonar 2011, S. 143)

Die Lösung „gelang“ Richard Swineshead durch die Summation der (uns bekannten) unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2.$$

Swinesheads verbaler Beweis dafür war „ungemütlich“ und „langatmig“ (Sonar 2011, S. 143 sowie Hischer & Scheid 1995, S. 102). Im Gegensatz dazu gab Nicole Oresme (vor 1330-1382), ein herausragender Naturwissenschaftler und Philosoph im 14. Jahrhundert, der von Heuser als einer der Großväter der analytischen Geometrie beschrieben wird, einen verständlicheren, „äußerst geschickten geometrischen Beweis“ (entnommen und zitiert nach Hischer & Scheid 1995, S. 102):

[6] Swineshead wurde „oft nach seinem Hauptwerk *Calculator* genannt“, deswegen wird der Satz auch „Satz vom Calculator“ bezeichnet (s. Hischer & Scheid 1995, S. 102).

„*Beweis von Oresme:* Betrachtet wird die in Fig. 1 [siehe Abb. unten] angedeutete Fläche. ‚Zeilenweise' Summation der Rechtecksinhalte liefert

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Dafür werden keine Kenntnisse über geometrische Reihen benötigt, weil die bereits vorhandene Fläche, also der ‚Grenzwert', nur zerlegt wurde. ‚Spaltenweise' Summation der Rechtecksinhalte liefert

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots,$$

und dies muss ebenfalls den Wert 2 haben."

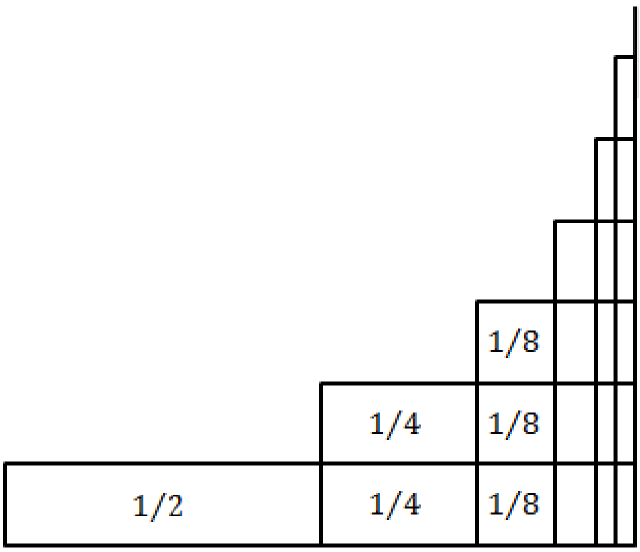


Abb. 2: Zu Beweis von Oresme (entspricht „Fig 1." aus Hischer & Scheid 1995, S. 102)

Wie bei Hischer & Scheid (1995) weiter zu lesen ist, war Oresme wohl einer der Ersten, welcher bewies, „daß die harmonische Reihe $\sum \langle \frac{1}{n} \rangle$ divergiert, indem er die Summanden in bekannter Weise zusammenfaßte" (ebd., S. 103):

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \quad \ldots$$

Die zusammengefassten Terme sind also jeweils (echt) größer als $1/2$ und somit übersteigt die Reihe jeden (endlichen) Wert.

Eine Position zwischen Scholastik und Renaissance wird Nikolaus von Kues (1401–1464) zugeschrieben. Er war mehr Theologe und Philosoph als Mathematiker – so waren seine mathematischen Ergebnisse eher bescheiden, seine Gedanken und Überlegungen (sowohl auf die Mathematik als auch die philosophische Theologie bezogen) aber umso interessanter und fortschrittlicher. In seinen Schriften thematisiert Nikolaus die Begrenztheit des menschlichen Wissens und die Unmöglichkeit des wirklichen, wahren Erfassens der Dinge aufgrund unserer *endlichen Vernunft* (vgl. Göbel 1998, Meschkowski 1961). Er war ein aufgeschlossener, offener Geist, der auch nicht vor dem *Nichtwissen* zurückschreckte und die Mathematik (bzw. mathematischen Gegenstände und Symbole) für ihre „unverrückbare Sicherheit“ und „Gewissheit“ schätzte (Sonar 2011, S. 153).
Spekuliert darf darüber werden, ob Nikolaus *durch* eine Beschäftigung mit der Mathematik zu seinen Überlegungen gelangte oder ob er in umgekehrter Weise die Mathematik (hier speziell die Geometrie) dazu *verwendete*, seine Überlegungen zu veranschaulichen – die Wahrheit liegt wohl in der Mitte (vgl. hierzu Meschkowski 1961, S. 26f sowie Göbel 1998, S. 157).
Nikolaus schrieb jedenfalls:

> Die endliche Vernunft kann daher durch Ähnlichkeit die Wahrheit der Dinge nicht genau erreichen. Denn die Wahrheit ist kein mehr noch minder, sondern unteilbar. Was nicht das Wahre selbst ist, kann sie ebensowenig genau ausmessen wie der Nicht-Kreis den Kreis, dessen Sein unteilbar ist. Die Vernunft, die nicht die Wahrheit ist, begreift daher die Wahrheit niemals so genau, daß sie nicht noch unendlich genauer begriffen werden könnte. Sie verhält sich zur Wahrheit wie das Vieleck zum Kreis: je mehr Ecken das Vieleck besitzt, um so ähnlicher wird es zum Kreis; aber selbst wenn die Zahl der Ecken ins Unendliche vermehrt wird, wird es dennoch nie dem Kreis gleich, es sei denn, es ginge in Wesenseinheit mit dem Kreis über.
> Das Wassein des Seienden, das seine Wahrheit ausmacht, ist also in seiner Reinheit unerreichbar, von allen Philosophen zwar gesucht, von keinem aber wirklich gefunden; je tiefer wir in die wissende Unwissenheit eindringen, desto näher kommen wir der Wahrheit selbst. (zit. nach Meschkowski 1961, S. 27)

Für Nikolaus steht fest, dass wir uns somit dem Kreis durch ein Vieleck, dessen Ecken wir ständig vermehren, beliebig genau nähern können. Jedoch wird eine noch genauere Näherung immer möglich sein und somit das Vieleck nie zum Kreis werden.

Die Diskussionen rund ums Kontinuum sind in der Scholastik eher in das Reich der Philosophie einzuordnen und von theologischen Glaubenssätzen mitgeprägt. Dennoch sind die wieder aufkommenden Dispute und weiterführenden Gedanken über stetige Teilung und ausdehnungslose Punkte für spätere mathematische Entwicklungen von Wert, denn es wurden mit diesen Gedanken die Grundsteine für die Überlegungen von Descartes, Leibniz, Newton usw. gelegt. Des Weiteren bekam die „Mathematik einen gefährlichen Virus eingeimpft“: Durch Gregorius von Rimini (1300-1358) wurden die Gedanken vom „Unendlich-Kleinen“ geboren, indem er die größenlosen Punkte Aristoteles‘ durch diese „höchst nebulose Entitäten“ ersetzt, die bei Leibniz und Newton noch Großes bewirken und erst in späterer Folge durch die *aufkommende Strenge* (einigermaßen) gebändigt werden (Heuser 2008, S. 158).

2.3. Die Renaissance

In dieser Epoche, welche ungefähr den Zeitraum Anfang 15. Jahrhundert bis Ende 16. Jahrhundert umfasst, lösten sich die Menschen mehr und mehr von den „Fesseln“ der Kirche. Es war die Zeit, als der Humanismus, beispielsweise durch Erasmus von Rotterdam (vermutlich 1465-1536), seine Anfänge nahm und die Menschen sich auf einen eher selbstbestimmten Weg, der sich stärker dem Individuum und dessen Existenz widmete, begaben. Allerdings ist anzumerken, dass diese Lockerung in Relation zur damaligen Zeit gesehen werden muss, vorherrschend war noch immer die Theologie. Es wurde jedoch aufgrund von Seefahrerei, z.B. Entdeckung Amerikas und Erforschung Asiens, weiteres, neues Wissen entdeckt, welches es zu verarbeiten und verstehen galt. (Weitere) Übersetzungen von Apollonios und Archimedes bewirkten, dass wieder das Wissen der Antike im Mittelpunkt des Interesses der Gesellschaft stand. Große Künstler, Denker und Wissenschaftler, wie z.B. Leonardo da Vinci (1452-1519), Albrecht Dürer (1471–1521), Nikolaus Kopernikus (1473-1543), förderten und trieben dieses Wissen voran, so dass endlich offensichtlich wurde, „dass die Antike übertroffen werden konnte und übertroffen worden war. Tiere, Pflanzen, Erdteile waren entdeckt worden, von denen sich bei den Alten keine Spur einer Andeutung fand“ (Wußing 2008a, S. 303).
Die Mathematik interessierte sich jetzt auch für die Schwerpunktberechnungen des Archimedes, welche als Ausgangspunkt für die Forschungen der „Schwerpunktrechner“ herangezogen und von ihnen weiterentwickelt wurden (vgl. Sonar 2011, S. 162ff). Neben diesen Überlegungen, die für die Analysis wichtig waren und z.B. von Leibniz aufgegriffen wur-

den, werden in dieser Zeit auch (praktische) Rechenverfahren zur Bewältigung von Geldwirtschaftsproblemen, wie Buchhaltung oder Währungsumrechnungen, sowohl entwickelt als auch verbessert, und die Astronomie nahm „einen raschen Aufschwung, der in der Publikation des weltbewegenden Werkes *De revolutionibus* (1543) durch Nicolaus Copernicus (1473–1543) und der Ablösung des geozentrischen durch das heliozentrische Weltbild gipfelte“ (Wußing 2008a, S. 307).

2.3.1. „Die Schwerpunktrechner“

Zu den „Schwerpunktrechnern“, wie Sonar (2011) sie nennt, zählt u.a. Francesco Maurolico (1494–1575), Luca Valerio (1552-1618) und Simon Stevin (1548–1620) (vgl. ebd., S. 162ff). Auch bei Hischer & Scheid (1995) wird Valerio erwähnt, weil „die ersten propädeutischen Ansätze zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs“ ihm zugeschrieben werden (ebd., S. 104).

Sonar bezeichnet Stevin als den interessantesten Schwerpunktrechner dieser Zeit (2011, S. 168f), er schreibt: „Seine Bedeutung liegt in seinem Bemühen, die archimedische Argumentation über die reductio ad absurdum zu vereinfachen.“ Wie bereits vorher beschrieben, wurde, um zu zeigen, dass zwei Flächen gleich sind, eben ein doppelter Widerspruchsbeweis durchgeführt. Stevin weicht diesem Gedankengang aus, indem er sich der „logische(n) Regel der ‚Kontraposition‘

$$(p \rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

in der folgenden Form“ bedient (Baron 1987, zit. nach Sonar 2011, S. 170):

1. Unterscheiden sich zwei Größen, dann unterscheiden sie sich um eine endliche Größe.
2. Diese Größen unterscheiden sich um weniger als eine endliche Größe.
3. Diese Größen unterscheiden sich nicht.

Sonar (2011) erklärt dazu, dass Stevin damit „einen entscheidenden Schritt über die archimedische reductio ad absurdum hinaus getan [hat]: Mit Mitteln der Syllogistik hat er gezeigt, dass es den archimedischen Umweg nicht braucht, um einen Grenzübergang durchzuführen“ (ebd., S. 170).

Hier lässt sich schon ein wenig die Idee des Grenzwertbegriffs für Folgen herauslesen und erahnen. Valerio und Stevin nutzen hier das *Archimedische Axiom* (intelligent aus). Ihr Prinzip ist es, der Figur mit gesuchtem Flächeninhalt G_F Figuren mit bekanntem Flächeninhalt ein- sowie umzuschreiben. Die Summe der Flächeninhalte der eingeschriebenen

Figuren E_F und der umschriebenen Figuren U_F werden so in Beziehung gesetzt, dass die Differenz D_F der beiden bekannten Flächeninhalte abhängig von der Anzahl n der verwendeten Figuren ist. Sie kommen vorerst auf die Gleichung

$$U_F - E_F = D_F,$$

wobei es (ihnen) eben durch das geschickte Ansetzen möglich ist, aus D_F den Term $1/n$ herauszuheben (dies liefert D_{NEU}). Somit ist es unter Verwendung des *Archimedischen Axioms* möglich, die Gleichung durch

$$U_F - E_F = \frac{1}{n} \cdot D_{NEU} < \varepsilon$$

abzuschätzen, wobei ε eine beliebig klein gewählte positive reelle Zahl darstellt. Damit *unterscheiden sich die Größen (also die Summen) um weniger als eine endliche Größe und unterscheiden sich somit nicht*. Dies ermöglicht Valerio bzw. Stevin außerdem eine Formel für den gesuchten Flächeninhalt mit Hilfe der *bekannten* anzugeben.

Ihr Vorgehen lässt sich mit einem rechtwinkeligen, gleichschenkeligen Dreieck und dazu ein- und umgeschriebenen Rechtecken (vereinfacht) darstellen:

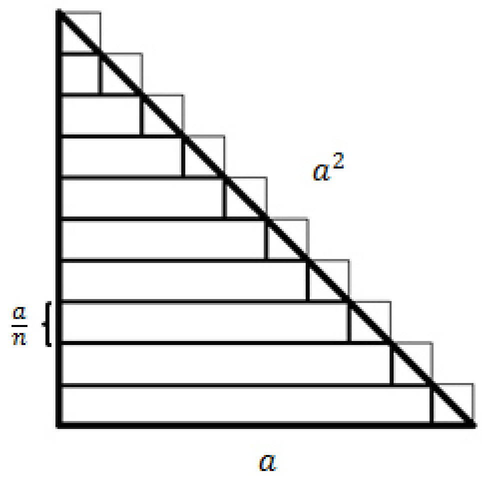


Abb. 3: Zur Methode der „Schwerpunktrechner“

Wie der Abbildung zu entnehmen ist, beträgt der Unterschied der Flächeninhalte somit

$$U_F - E_F = n \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot a^2$$

und nach obiger Folgerung sind die beiden Flächeninhalte „gleich (groß)“. Auf den (natürlich bekannten) Flächeninhalt des Dreiecks, also $a^2/2$, kommen wir mit folgender Überlegung.

Der Flächeninhalt der eingeschriebenen Rechtecke beträgt in Summe

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{a}{n}\right)^2.$$

Durch Herausheben, Anwenden der Summenformel und Kürzen erhalten wir

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 (1+2+3+\cdots+n-1) = \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{(n-1)}{n} = \frac{a^2}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Setzen wir nun immer größere Werte für n ein, nähert sich der Ausdruck langsam, aber bestimmt $a^2/2$.

2.4. Das 17. und 18. Jahrhundert: Entstehung und Entwicklung der Infinitesimalrechnung

Im Zuge der wissenschaftlichen Revolution wurden die Mathematik sowie natürlich auch die Astronomie und Mechanik weiter durch namhafte Personen wie z.B. Copernicus, Galilei, Brahe, Kepler, Fr. Bacon, Descartes, Fermat, Guericke, Pascal, Gilbert, Huygens, Linné, Harvey, Hooke, Newton, Leibniz, Cook umgestaltet (vgl. Wußing 2008a, S. 379).

2.4.1. Erste Hälfte des 17. Jahrhunderts: Vorabend der Infinitesimalrechnung

(Bezeichnung übernommen von Deiser 2008, S. 64)

Hischer & Scheid schreiben über diese Anfangszeit:

> [Es] setzte nun eine stürmische Methodenentwicklung ein, so daß man das 17. Jahrhundert als die Epoche ansehen kann, in der die Infinitesimalrechnung ihre Anfänge nahm. Hier sind die Namen Johannes Kepler (1571-1630), Paul Guldin (1577-1643), Grégoire de Saint-Vincent (1577-1667), Bonaventura Cavalieri (1591-1647), Pierre Fermat (1601-1665) und Evangelista Torricelli (1608-1647) zu nennen. Diese Anfangsepoche wird abgeschlossen von John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) und James Gregory (1638-1675). Kennzeichnend für diese Mathematiker ist, daß sie sich von den strengen archimedischen Methoden lösten, die nicht geeignet waren, zu neuen Ergebnissen vorzustoßen. (Hischer & Scheid 1995, S. 106)

Johannes Kepler und Bonaventura Cavalieri

Kepler kann als jener Mathematiker gesehen werden, der eine neue Methodologie in die Mathematik brachte. Bei seinen Berechnungen, allen voran Kreisflächen- sowie Kugelvolumenberechnung, verwendete er den Begriff des „Unendlich-Kleinen“, der eher in der

Philosophie Verwendung fand. Um auf den Flächeninhalt eines Kreises zu kommen, stellte er folgende Überlegung an:

> Der Umfang des Kreises BG hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele; jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln AB, so daß in der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke liegen, die sämtlich mit ihren Scheiteln im Mittelpunkt A zusammenstoßen. Es werde nun der Kreisumfang zu einer Geraden BC ausgestreckt. So werden also die Grundlinien jener unendlich vielen Dreiecke oder Sektoren sämtlich auf der einen Geraden BC abgebildet (imginatae) [siehe Abb. unten] und nebeneinander angeordnet. (Kepler 1908, nach Wußing 2008a, S. 439f)

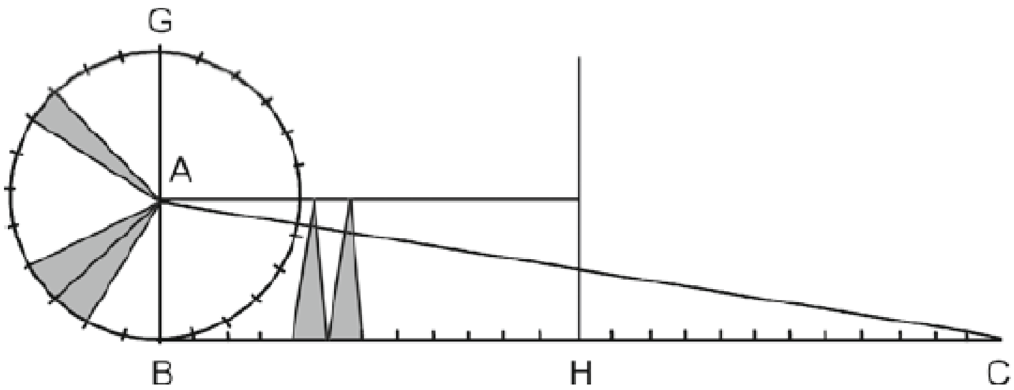


Abb. 4: Kreisflächenbestimmung nach Kepler (aus Wußing 2008a, S. 439)

In ähnlicher Weise geht Kepler auch bei der Berechnung des Kugelvolumens vor und kommt so auf seine Formeln der Kreisfläche mit „$\frac{1}{2} \cdot U \cdot r$“ bzw. des Kugelvolumens „$\frac{1}{3} \cdot O \cdot r$“.

Kepler war in seinen Arbeiten durchaus praktisch orientiert und hielt Beweise nicht unbedingt für notwendig, da er als Verfasser (seines Buches *Nova Stereometria doliorum vinariorum*) „an ein praktisches Publikum dachte, das sich mehr für Ergebnisse und klare Darstellungen interessierte als für archimedische Strenge“ (van Maanen in Jahnke 1999, S. 74).

Cavalieri war ein Schüler Galileis, dem es gelang, die „Indivisiblenmethoden“ seines Lehrers zu perfektionieren. In seiner Arbeit *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* „fasste [er] die archimedische Methode der Exhaustion mit den Indivisiblen Keplers zusammen und ging weit darüber hinaus“ (Sonar 2011, S.209 f). Uns allen bekannt ist darunter das *Cavalierische Prinzip* (zit. nach Sonar 2011, S. 54):

„Zwei Körper, deren Schnittflächen mit Ebenen parallel zu den Grundflächen in gleicher Höhe immer gleich sind, haben gemeinsames Volumen.“

Die Ideen und Überlegungen Cavalieris stießen einerseits auf Kritik und fanden andererseits Anklang. Paul Guldin und auch sein Lehrer Galilei waren der Meinung, dass Cavalieris Indivisiblen zu Paradoxien führen. Galilei demonstrierte einen Widerspruch mit Hilfe konzentrischer Kreise, welchen Sonar (2011) beschreibt:

> Jeder der Kreise wird durch einen radialen Strahl in genau einem Punkt getroffen, also besteht jeder der Kreise aus unendlich vielen Punkten, wobei aber jeder Punkt des größten Kreises umkehrbar eindeutig zu einem zugehörigen Punkt auf dem kleinsten der Kreise gehört. Also haben alle Kreise dieselbe Anzahl von Punkten. Da, wie Cavalieri behauptet, alle Linien aus den Indivisiblen – also hier den Punkten – bestehen, müssten demnach auch alle Kreise denselben Umfang haben, was offensichtlich unsinnig ist. (Sonar 2011, S. 221)

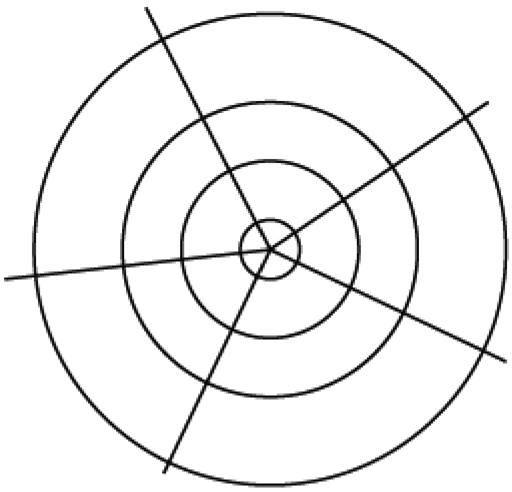


Abb. 5: „Figur zum Galileischen Paradoxon“ (aus Sonar 2011, S. 221)

Hier lebt die antike und scholastische Diskussion über das Kontinuum und Atomismus wieder auf. Cavalieri ist sich dieser Paradoxien wohl bewusst, nimmt sich der Einwände an und sagt, „dass seine Theorie der Indivisiblen es nicht ermöglicht zu zeigen, dass das Kontinuum aus Punkten aufgebaut ist“ (Sonar 2011, S. 222).

Torricelli setzte sich mit dem *Cavalierischen Prinzip* auseinander und arbeitete (vielleicht angestiftet durch Galileis Kritik) auch mit gekrümmten Flächen. Durch Toricellis Arbeiten wurde auch Wallis angeregt, sich mit Cavalieris Werken zu beschäftigen, welche eine große Faszination auf ihn ausübten und ihn wahrscheinlich zu seinem „für die Analysis so wichtige[m] Werk *Arithmetica infinitorum*“ inspirierten (Sonar 2011, S. 320). Neben seinen verschiedenen Leistungen sei er vor allem erwähnt, weil er die Methode Cavalieris weiterentwickelte, indem er sich beispielsweise die Fläche eines Parabelsegments „aus unendlich vielen Indivisiblen zusammengesetzt“ denkt und diesem (üblichen) Gedankengang auch (wirklich) Folge leistet: Werden der gesuchten Fläche n bekannte Teilflächen eingeschrieben, so lässt er n gegen ∞ gehen; „Wallis hat damit den heute üblichen Grenzwertübergang erfunden, auch das Symbol ∞ stammt von ihm“ (Hischer & Scheid 1995, S. 108).

René Descartes und Pierre Fermat

René Descartes (1596-1650) und Pierre Fermat (1601-1665) verband alles andere als eine Freundschaft. Beide waren an gleichen Problemen und Themen interessiert und hatten unabhängig voneinander die Grundlagen zur analytischen Geometrie erarbeitet. In Briefwechseln forderten sie sich unabsichtlich sowie absichtlich gegenseitig heraus, wovon vor allem Fermat sehr profitierte und seine Methoden dadurch verfeinerte. Fermat kam an die Definition der Ableitung als Grenzwerte des Differenzenquotienten schon nahe heran (vgl. Sonar 2011, S. 253 u. Hischer & Scheid 1995, S. 109).
Descartes entwickelte die sogenannte *Kreismethode*, um Tangenten sowie Maxima und Minima zu bestimmen, wobei er keine unendlich kleinen Größen verwendete. Als Grund für diese „finite“ Einstellung gibt Sonar (2011, S. 247) seine philosophische Neigung an. Diese „Neigung“ bzw. wie Descartes zu dieser kam, ist in Göbel (1998) gut beschrieben. Dort ist über (den jungen) Descartes zu lesen:

> Als er mit sechzehn Jahren das Kolleg verließ, war er der gelehrten Bildung überdrüssig: »Denn ich fand mich verstrickt in so viel Zweifel und Irrtümer, daß es mir schien, als hätte ich aus dem Bemühen, mich zu unterrichten, keinen anderen Nutzen gezogen, als mehr und mehr meine Unwissenheit zu entdecken.« Eine Wissenschaft schien ihm diesen Zweifel besonders nahezulegen: »Von der Philosophie will ich nur so viel sagen: Ich sah, daß sie von den ausgezeichnetsten Köpfen einer Reihe von Jahrhunderten gepflegt worden ist und daß es gleichwohl noch nichts in ihr gibt, worüber nicht gestritten würde und was folglich nicht zweifelhaft wäre… Was ferner die übrigen Wissenschaften betrifft, so schloß ich, da sie ja ihre Anfangsgründe der Philosophie entlehnen, daß man auf so unsicheren Fundamenten nichts Dauerhaftes habe bauen können.«
> Ein Fach nahm er allerdings aus von seiner Kritik: »Ganz besonders gefielen mir die mathematischen Disziplinen wegen der Sicherheit und Evidenz ihrer Beweisgründe, aber noch sah ich ihren wahren Nutzen nicht«. (Göbel 1998, S. 165)

So war für ihn die Mathematik (hier speziell wieder die Geometrie) über jeden Zweifel erhaben, mit deren Hilfe er zu *sicheren* Ergebnissen kam. Es ist somit nachvollziehbar, dass er die „philosophischen Spukgespenster“, wie Infinitesimale oder Indivisiblen, aus seinen wissenschaftlichen Methoden heraushalten wollte und dies auch tat.

Mit Hilfe der Kreismethode wurde bzw. wird eigentlich das Ziel verfolgt, an einer Kurve (d.h. an einer Funktion $x \to f(x)$) in einem bestimmten Punkt (sprich x_0) eine Normale zu konstruieren[7] - dies ist natürlich zum Tangentenproblem äquivalent. Die Methode läuft (bzw. lief) ungefähr so ab (vgl. Sonar 2011, S. 247f sowie Jahnke 1999, S. 48f):

Es wird die Aufgabe in ein Koordinatensystem (resp. Diagramm) übertragen, wobei der Graph f der Funktion $x \to f(x)$ und ein Kreis K mit Radius r und Mittelpunkt v auf der Abszisse eingezeichnet sind.

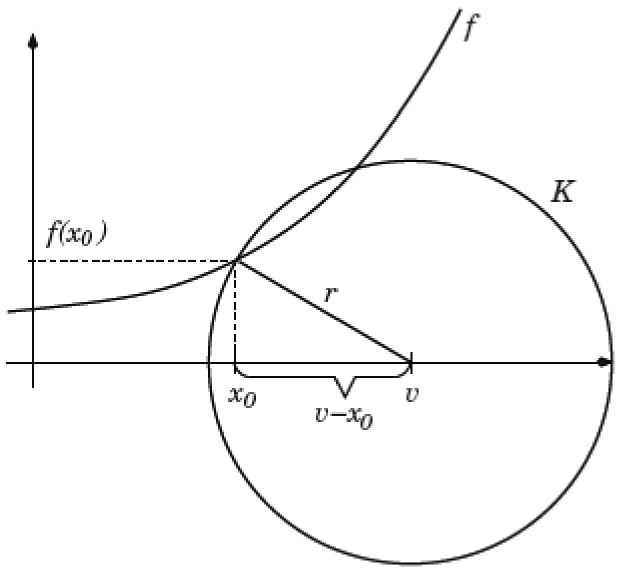


Abb. 6: „Zur Kreismethode des Descartes“ (aus Sonar 2011, S. 248)

Ersichtlich schneidet der Kreis (in den meisten Fällen) die Kurve in zwei Punkten. Es gibt aber den interessanten Fall, dass Kreis und Kurve genau einen Schnittpunkt haben: „Genau in diesem Fall liegt der Kreis K tangential an f im Punkt x_0, d. h. der Radius zwischen den beiden Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(v, 0)$ gibt die Richtung der Normalen an f im Punkt x_0“ (Sonar 2011, S. 248).

Diese Feststellung machte auch Descartes; er betrachtete die Kreise, welche durch den Punkt $(x_0, f(x_0)$ verliefen und deren Mittelpunkt auf der Abszisse lag. Wenn er nun einen Kreis finden würde, welcher den Graph f nur an einer Stelle berührt, also Kreis und (da-

[7] „Der Durchgang des Lichtes durch eine Linse wird mit Hilfe der Normalen auf der Oberfläche der Linse beschrieben, und dies war eindeutig Descartes‘ Motivation […]“ (s. Jahnke 1999, S. 44)

mals noch) Kurve einen doppelten Schnittpunkt haben, dann würde der Radius dieses Kreises normal auf die Kurve stehen. Mit dieser Feststellung war Descartes nun in der Lage, dieses geometrische Problem in ein algebraisches bzw. in einen algebraischen Ausdruck umzuformulieren (s. van Maanen in Jahnke 1999, S. 48f – Bezeichnungen entsprechend geändert):
„Für welches v ist $(x_0, f(x_0))$ eine doppelte Wurzel des Systems

$$\begin{cases} x \to f(x) & (\text{z. B. eine Funktion der Form } y = f(x) = x^2) \\ (f(x))^2 + (x - v)^2 = r^2 & \left(r = \sqrt{f(x_0)^2 + (x_0 - v)^2} \text{ ist der Radius}\right) \end{cases} \quad ?\text{"}$$

Descartes eliminierte eine der zwei Größen x bzw. $y\ (= f(x))$ und gelangte zu einem Ergebnis für v. So ergibt sich für die *Normale* an f in x_0 die Steigung

$$-\frac{f(x_0)}{v - x_0}.$$

Fermat behandelte in etwa ähnliche Probleme wie Descartes, wenn auch unter einem etwas anderen Zugang. Interessant sind für uns seine Überlegungen zur Quadratur höherer Parabeln. „Fermat hatte zwar auch noch nicht den Begriff ‚Grenzwert' in irgendeinem formalen Sinn, aber die Idee konvergierender Werte taucht bereits auf, und zwar zusätzlich im Sinne des Funktionsgrenzwerts […]" (Hischer & Scheid 1995, S. 109).
Als Beispiel führen sowohl Hischer & Scheid (1995) als auch Sonar (2011) Fermats Methode zur Quadratur der Potenzfunktion $y = x^p$ innerhalb des Intervalls $[0, a]$ - nach moderner Schreibweise $\int_0^a x^p\, dx$ – an (in den weiteren Ausführungen dazu halte ich mich auch sehr genau an beide Autoren). Dabei approximierte Fermat die Fläche mit umschriebenen Rechtecken, wobei er für die Grundseiten der Rechtecke das Intervall $[0, a]$ aber nicht in äquidistante Stücke einteilte, sondern mit Hilfe einer beliebigen Zahl $t \in]0,1[$ die Teilpunkte $a, at, at^2, at^3, \dots$ bildete, welche eine fallende geometrische Folge darstellen.

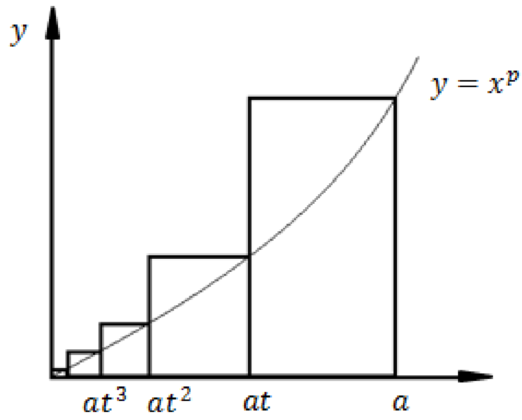


Abb. 7: Quadratur von $y = x^p$ (entspricht „Fig. 3" aus Hischer & Scheid 1995, S. 109)

Die Summe der Flächeninhalte der umschriebenen Rechtecke ist somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} (at^n - at^{n+1})(at^i)^p.$$

Dies stellt eine „Obersumme" für die gesuchte Fläche dar, mit dem „Grenzwert"

$$s_t = \frac{(1-t)a^{p+1}}{1-t^{p+1}}.$$

Wie sich der Anschauung entnehmen lässt, gelingt die Approximation der Fläche unter der Parabel umso besser, je näher t bei 1 liegt. Es ergibt sich wegen

$$s_t = \frac{a^{p+1}}{\sum_{n=0}^{p} t^n} \qquad \text{und} \qquad \lim_{t \to 1} \sum_{n=0}^{p} t^n = p + 1$$

für die Fläche

$$\int_0^a x^p \, dx = \lim_{t \to 1} s_t = \frac{a^{p+1}}{p+1} \qquad (\text{für } k \in \mathbb{N}/0).$$

2.4.2. Entwicklung und Begründung der Infinitesimalrechnung: Isaac Newton & Gottfried W. Leibniz

Die systematische Begründung der Differential- und Integralrechnung erfolgt durch Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried W. Leibniz (1646–1716). Ihre Überlegungen zeichneten sie dadurch aus, dass sie erkannten, dass sämtliche Probleme bzw. Berechnungen, welche die Mathematiker/innen vor ihnen beschäftigen, wie Schwerpunkte, Flächen, Tangenten, Krümmungsradien, Volumina usw. eigentlich „nur Sonderfälle zweier grundlegender

Probleme waren“ – nämlich die des Differentials und des Integrals (Guicciardini in Jahnke 1999, S. 89).

Des Weiteren war ihnen der Zusammenhang zwischen Differential und Integral, also *der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, bewusst. Hischer & Scheid schreiben über Newton und Leibniz, „dass sie vor allem darauf bedacht [sind], die Methoden [beispielsweise von Fermat] weiter zu entwickeln, um neue Resultate gewinnen zu können, statt die logische Zuverlässigkeit dieser Methoden zu sichern“ (1995, S. 111).

Dies ist vielleicht etwas forsch ausgedrückt, aber verglichen z.B. mit der Herangehensweise und Kreismethode Descartes‘ ist das Differential-Kalkül durch die Verwendung von Infinitesimalen gewissermaßen „inkonsequent“ und umstritten, da eigentlich ja durch "0" dividiert wird, oder doch nicht?[8] Jedenfalls durchdachten Newton und Leibniz ihre Infinitesimalen sehr wohl sorgfältig. In ihrer Meinung über diese, wie z.B. der Frage nach der „Existenz“, ähneln beide einander (vgl. Jahnke 1999):

> Sie sagten, daß: (a) *wirkliche Infinitesimale nicht existierten, sondern nützliche Fiktionen zur Verkürzung von Beweisen sind,* (b) *Infinitesimale vorwiegend als veränderliche Größen im Zustand der Annäherung an Null definiert werden sollten,* (c) *Infinitesimale vollkommen vermieden werden können zugunsten von Beweisen, die auf dem Grenzwert beruhen und die strenge Formulierung des Kalküls darstellen,* (d) *Beweise, die auf dem Begriff des Grenzwerts beruhen, eine direkte gleichwertige Version der indirekten Widerspruchsbeweise von Archimedes sind.* (Jahnke 1999, S. 124)

Wie daraus entnommen werden kann, waren Überlegungen zu Grenzwerten und Grenzverfahren vorhanden; Newton sah seine Momente so wie Leibniz seine Differentiale eben als Verkürzung für Beweise. Newton entwickelte auch eine Grenzwerttheorie und kam dem Grenzwertbegriff schon nahe, wie „Lemma 1“ zeigt (zit. nach Guicciardini in Jahnke 1999, S. 102f):

> *„Grössen, wie auch Verhältnisse von Grössen, welche in einer gegebenen Zeit sich beständig der Gleichheit nähern und einander vor dem Ende jener Zeit weiter näher kommen können, als jede gegebene Grösse, werden endlich einander gleich.“*

Guicciardini (in Jahnke 1999, S. 103) schreibt dazu: „Dieses Prinzip könnte als Vorwegnahme von Cauchys Grenzwerttheorie betrachtet werden, doch das wäre sicher falsch, da sich Newtons Grenzwerttheorie eher auf ein geometrisches als ein numerisches Modell bezieht.“ Leibniz vertraute (im Gegensatz dazu) auf seine philosophischen Anschauungen, was u.a. bei Kaplan (2005, S. 165f) gut nachzulesen ist, welcher auch schreibt, dass es für

[8] Bekannt ist die von Bischof Berkely verfasste Streitschrift *The Analyst*, in welcher er in durchaus konstruktiver Weise an den unendlich kleinen Größen Kritik übte (vgl. z.B. Sonar 2011, S. 424 ff).

Leibniz „keine Lücken, keine Leere [gab], das Kleine wurde kleiner, aber niemals nichts" (ebd., S. 230). In einem Brief an Varignon drückt Leibniz die Leistungsfähigkeit (und Richtigkeit) des Kalküls mit folgenden Worten aus:

> Will nämlich ein Gegner unsern Sätzen die Richtigkeit absprechen, so zeigt unser Kalkül, daß der Irrtum geringer ist als irgendeine angebbare Größe, da es in unser Macht steht, das Unvergleichbarkleine, - das man ja immer so klein, als man nur will, annehmen kann - zu diesem Zweck hinlänglich zu verringern. (zit. nach Meschkowski 1961, S. 54)

Insgesamt gesehen, gelang es keinem von beiden, die von ihnen verwendeten Begrifflichkeiten und Grundlagen genau bzw. präzise zu (er)klären. Beide verließen sich in ihren Argumentationen (bezogen auf Grenzübergänge) auf den Begriff der Kontinuität – Newton auf einem kinematischen, anschaulichen, Leibniz auf dem philosophischen Weg - und so blieb eine Ungewissheit bestehen (vgl. z.B. Guicciardini in Jahnke 1999, S. 125). Die Richtigkeit der Ergebnisse und - ganz einfach ausgedrückt - der Nutzen in den Anwendungen waren Grund genug, die (noch) unbestimmten Ausdrücke bestehen zu lassen. „Erst im 19. Jahrhundert werden die Grundlagenfragen so drängend, dass hervorragende Mathematiker sich an eine Lösung machen" (Sonar 2011, S. 426).

2.4.3. Die Weiterentwicklung

Die Anhänger Leibniz' verfolgten das Ziel, die Infinitesimalrechnung mehr und mehr von der Geometrie zu lösen und in eine algebraische Sprache zu übersetzen. Dieser Prozess war langwierig und so erfolgte „eine vollständige Algebraisierung des Kalküls […] erst gegen Ende des 18. Jahrhunderts" (Guicciardini in Jahnke 1999, S. 130). In der Zeit des 18. Jahrhunderts entwickelte sich jedenfalls die Mathematik rasch weiter und es wurden durch Personen wie Jakob (1654-1705) und Johann (1667-1748) Bernoulli, Brook Taylor (1685-1731), James Stirling (1692-1770), Leonhard Euler (1707-1783), Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827) und Adrien Marie Legendre (1752-1833) wichtige Erkenntnisse gewonnen und neue Methoden entwickelt (vgl. Hischer & Scheid 1995 u. Jahnke 1999). Hervorzuheben sind dabei (vor allem im Sinne unseres geschichtlichen Abrisses) Johann Bernoulli sowie Leonhard Euler

.

Johann Bernoulli

Johann Bernoulli gilt als der „größte aller Lehrer (neben seinen zahlreichen Söhnen und Neffen sowie de l'Hospital führte er auch Euler in die Mathematik ein)" (Hairer & Wanner 2011, S. 90). Für ein beträchtliches Salär unterrichtete er de l'Hospital in der Infinitesimalrechnung und überließ ihm außerdem die Ergebnisse seiner eigenen Forschung, so dass de l'Hospital anstelle seiner das „erste Lehrbuch der Differentialrechnung, die Analyse des infiniment pétits (1696)" veröffentlichte (Jahnke 1999, S. 132). Bekannt ist die *de l'Hospitalsche Regel*, welche uns ermöglicht, falls es bei einem Grenzprozess wie $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ zu einem unbestimmten Ausdruck wie " $0/0$ " oder " ∞/∞ " kommt, trotzdem mit diesem umzugehen. Sie besagt, wie in Sonar (2011, S. 443) beschrieben ist, dass im „Fall differenzierbarer Funktionen f und g der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen betrachtet werden kann, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wenn $g'(x_0) \neq 0$ ist".

Die Auffassung von Johann Bernoulli über die „Differentiale als aktual unendlich kleine Größen" lässt sich aus zwei Postulaten (insgesamt sind es drei), welche er „in einem lehrbuchartigen Manuskript für den Marquis de l'Hospital fixierte", gut herauslesen (Jahnke 1999, S. 136):

1. „Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.
2. Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Geraden, die selbst unendlich klein sind." (zit. nach Jahnke 1999, S. 136)

Leonhard Euler

Es ist nicht einfach über Euler kurz zu sprechen, seine Leistungen in Mathematik und seine Produktivität für sie waren immens - egal welches Buch, welchen Autor ich für ein Zitat heranziehe – jedes würde fesselnd wirken; so auch das von Hairer & Wanner (1996):

> Auf Eulers Tod im Jahr 1783 folgte eine Periode des Stillstands in der Mathematik. Er hatte virtuell jedes Problem gelöst: zwei unübertroffene Abhandlungen über die Analysis des Unendlichen und der Differentiale (Euler 1748, 1755), lösbare Integrale gelöst, lösbare Differentialgleichungen gelöst (Euler 1768, 1755), die Geheimnisse der Flüssigkeiten (Euler 1755b), der Mechanik (Euler 1736b, Lagrange 1788), des Variationskalküls (Euler 1744), der Algebra (Euler 1770) alle offenbart. Es schien,

als bliebe keine Aufgabe mehr übrig, die Euler nicht schon in den 30.000 Seiten seines Lebenswerkes abgearbeitet hätte. (Hairer & Wanner 1996, S. 185f)

Euler trieb auch die Trennung der Infinitesimalrechnung von der Geometrie und den Anwendungen voran, wie alleine aus seinen Worten in der Einleitung seiner Differentialrechnung zu entnehmen ist. Dabei sagt „Euler ausdrücklich, daß sich sein Werk *»innerhalb der Grenzen der reinen Analyse«* halte, und er von deren Nutzen für die Geometrie nicht spreche, *»so daß ich auch nicht einmal eine einzige Figur zur Erläuterung nöthig habe«"* (Jahnke 1999, S. 133).

Durch Euler wurde die *Funktion* zentral für die Analysis und zum Grundbegriff für diese. Er forcierte und verfolgte konsequent die Schreibweise $f(x)$, welche auch wir heutzutage verwenden. Warum der Funktionsbegriff zum Grundbegriff wurde, liegt vor allem darin begründet, dass Euler im Gegensatz zu Leibniz und Bernoulli eine etwas andere Sichtweise bezüglich der Differentiale hatte. „Er bestimmte sie als ‚verschwindende Inkremente' und im Resultat ‚wirkliche Nullen'" schreibt Jahnke (1999) und führt weiter aus, dass für Euler nicht die Differentiale, sondern deren Verhältnisse im Vordergrund standen und „daher sind bei Euler nicht die Differentiale der Gegenstand der Differentialrechnung, sondern ihre Quotienten, und das sind *Funktionen*" (ebd., S. 134f).

Einen wirklichen Schritt in Richtung Grenzwert*begriff* machte d'Alembert, der in seiner gemeinsam mit Diderot u.a. herausgebrachten *Encyclopédie*[9] eine erste Definition des Grenzwerts versuchte, wobei es generell seine Intention war, „die Differentialrechnung auf dem Begriff der Grenze zu begründen" (Jahnke 1999, S. 164). Die Definition lautet (zit. nach Hischer & Scheid 1995, S. 112):

„Man sagt, eine Größe sei Grenzwert einer anderen, wenn die letztere der ersteren näherkomm als jede vorgegebene Schranke, wie klein diese vorausgesetzt sein mag. Dabei kann die sich nähernde Größe niemals den Grenzwert überschreiten, weswegen die Differenz einer solchen Größe von ihrem Grenzwert absolut unwesentlich ist."

Wie auch Hischer & Scheid (1995) im Anschluss an die Definition bemerken, ist diese noch nicht ganz zufriedenstellend, „zumal sie den Eindruck erweckt, als habe d'Alembert nur eine monotone Konvergenz im Sinn. Sie läßt aber schon die Grundidee des exakten Grenzwertbegriffs ahnen" (ebd., S. 113).

[9] Die *Französische Enzyklopädie* erschien von 1751 bis 1780 unter Beteiligung verschiedener Wissenschaftler, wie z.B. Roussau oder Voltaire.

2.5. Der Beginn der Strenge in der Analysis im 19. Jahrhundert

Euler hinterließ nach seinem Tod ein stolzes Erbe, das den Mathematikern/innen den Eindruck vermittelte, es gäbe nichts mehr zu tun. Die Annahme jedoch, das Problem der Strenge als die dringendste Frage der Analysis im 19. Jahrhundert zu betrachten, wäre falsch, wie Lützen (in Jahnke 1999, S. 191) schreibt. Bedingt durch die Entwicklung in sämtlichen Bereichen und natürlich die industrielle Revolution, war die Mathematik weiterhin in ihren Anwendungen gefordert. Diese vermehrte Auseinandersetzung und Anwendung der damals noch nicht präzise beschriebenen Begriffe wie Funktion, Integral, Konvergenz, Stetigkeit usw. trug bei zu einem Verlangen nach der „Sicherung“ der Grundlagen. Die andere Motivation einer „strengeren Begründung“ war die Lehre selbst (vgl. Lützen in Jahnke 1999, S. 191f).
Dabei ging es hauptsächlich darum, die „Unendlichkeit“ (endlich) mathematisch in den Griff zu bekommen (und nicht nur philosophisch zu behandeln). Die Verwendung von Begrifflichkeiten wie „unendlich kleine Größen“ oder „unendlich groß“ und „Summe unendlicher Reihen“ war (innermathematisch mehr als) unangenehm und nicht haltbar - „Es war nur folgerichtig und der Lage angemessen, dass z.B. 1782 die Göttinger Akademie und 1784 die Berliner Akademie Preisfragen bezüglich der Ursachen der Mängel bei den infinitesimalen Methoden und hinsichtlich ihrer Behebung stellten“ (Wußing 2008 b, S. 233). So wurde die Diskussion über die (Notwendigkeit der) Grundlagen natürlich etwas früher in Gang gebracht, aber erst die Arbeiten von Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) und Carl Friedrich Gauß (1777–1855) markieren den Einstieg in ein Zeitalter, bei der eine strenge Beschäftigung mit den Grundlagen von Bernard Bolzano (1781–1848) „richtig“ gestartet, durch Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) und Karl Weierstraß (1815-1897) weitergeführt und schließlich bei Richard Dedekind (1831-1916) und Georg Cantor (1845-1918) vorerst einmal beendet (bzw. noch einmal so richtig in Gang gesetzt wird).

Wie schon erwähnt, markieren Langrange und Gauß den Einstieg, wie bei Hairer & Wanner (2011) zu lesen ist:

> Die ‚Théorie des fonctions analytiques von Lagrange (1797), ‚befreit von allen Überlegungen zu unendlich kleinen Werten, verschwindenden Zahlen, Grenzwerten und Fluxionen‘, die Doktorarbeit von Gauß (1799) über den ‚Fundamentalsatz der Algebra‘ und die Studien zur Konvergenz der hypergeometrischen Reihe (Gauß 1812) markierten den Beginn einer neuen Epoche. (Hairer & Wanner 2011, S. 186)

Gauß‘ Genialität und sein Einfluss auf die Entwicklung der Grundlagen der Analysis stehen nicht wirklich in Relation zueinander. Sein Einfluss darauf hätte viel größer sein können, doch sein eigener Perfektionismus und die Vorsicht, „nicht [jene] vor den Kopf zu stoßen, die Macht über ihn hatten“, zwangen ihn gewissermaßen, Ergebnisse, deren er sich nicht absolut (!) sicher war, nicht zu veröffentlichen (O’Shea 2010, S. 98). So schreibt auch Lützen, dass Gauß „früher als Cauchy […] auf ähnliche Ideen zur Begründung der Analysis gekommen [ist]“ und die „Begriffsdiskussion viel strenger war als die, die man später bei Cauchy findet […] - doch die wenigen veröffentlichten Bemerkungen hatten geringe Auswirkung auf seine Zeitgenossen“ (Lützen in Jahnke 1999, S. 218f).

Bernard Bolzano

Trotz seiner „nur“ hobbymäßigen Auseinandersetzung mit der Mathematik brachte es Bolzano auf „beachtliche“ Ergebnisse. Er führte unter anderem einen „rein analytischen“ rigorosen Beweis des Mittelwertsatzes, bei dem er eine Definition der Stetigkeit angibt, welche noch immer (wenn auch in anderer Form) Verwendung findet (Wußing & Arnold 1978, zit. nach Sonar 2011, S. 500):

> „[...], daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega) - f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.“

Des Weiteren beschäftigt er sich ausführlich mit der Thematik des „Unendlichen“ und schrieb ein erst nach seinem Tod erschienenes Buch mit dem Titel *Paradoxien des Unendlichen*, welches erheblichen Einfluss auf die nachfolgenden Mathematiker/innen hatte.

Augustin-Louis Cauchy

Wie auch immer Cauchy beschrieben werden sollte - er galt nämlich als streitlustig und hatte paradoxerweise eine schlampige Ordnung - für die Analysis leistete er Großartiges. Da er die Mathematik als eigenständiges Gebiet für wichtig hielt und sie nicht nur als Beiwagen der Ingenieurskunst sah, legte er als Lehrender Wert auf äußerste Präzision und saubere Begriffsbildung, wie beispielsweise die des Grenzwerts. Dies „schreckte“ anfangs (seine) Studenten/innen ab, so dass die Vorlesungen vorerst nicht gut besucht waren (vgl. Lützen in Jahnke 1999, S. 198f sowie Sonar 2011, S. 505f).

Für seine Überlegungen und Ausführungen war vor allem der Begriff des Grenzwerts grundlegend. In seinem 1821 erschienen Lehrbuch *Cours d’Analyse* gibt Cauchy Definitionen der Grundbegriffe der Analysis. Die Definition des *Grenzwerts* lautet (zit. nach Lützen in Jahnke 1999, S. 196):

„Wenn die einer Veränderlichen nach und nach beigelegten Werte sich einem gegebenen Wert immer mehr und mehr nähern, so daß in jener Reihe schließlich Werte existieren, die von jenem gegebenen Werte so wenig, wie man will, verschiedenen sind, so nennt man den gegebenen Wert die Grenze jener übrigen Werte…“

Ebenso ist die Definition einer *unendlich kleinen Größe* interessant (ebd., S. 196):

„Wenn die ein und derselben Veränderlichen nach und nach beigelegten numerischen Werte beliebig so abnehmen, daß sie kleiner als jede gegebene Zahl werden, so sagt man, diese Veränderliche wird unendlich klein oder: sie wird eine unendlich kleine Zahlgröße. Eine derartige Veränderliche hat die Grenze Null.“

Lützen erörtert im Anschluss an die Definitionen eben die von Cauchy getätigten Begriffsbildungen im Sinne ihre „Neuheit“. Es fehlen natürlich die heute üblichen Quantoren sowie Ungleichungen und auch die Ausdrücke bzw. Formulierungen wie *„so wenig, wie man will, verschiedenen“* oder *„sie wird eine unendlich kleine Zahlgröße“* wirken nicht wirklich streng. Cauchy ist aber bei Anwendungen der Begriffe, wie z.B. bei Beweisen, sehr konsequent und so „sind alle diese Bestandteile [wie eben Quantoren und Ungleichungen] eindeutig vorhanden, wenn Cauchy seine Begriffe in Beweisen verwendet“ (Lützen in Jahnke 1999, S. 199).

Karl Weierstraß

Sonar (2011 S. 521) titelt in seinem Buch das Unterkapitel über Weierstraß mit den Worten „Die finale Arithmetisierung der Analysis: Weierstraß“. Doch was macht(e) diese finale Arithmetisierung aus? Weierstraß gelang es schließlich, den Begriff „des Grenzwerts einer Funktion rein arithmetisch [zu] formulieren“ (Struve & Witzke 2013, S. 46):

„Eine Funktion $f(x)$ besitzt für x gegen x_0 den Grenzwert a, wenn es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass $|f(x) - a| < \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \delta$.“

Des Weiteren schaffte er es endlich, die „höchst nebulose Entitäten“, das unendlich Kleine, zu fangen bzw. zu ersetzen (Sonar 2011, S. 525):

„Eine unendlich kleine Größe ist eine Funktion φ der Variablen h derart, daß man zu gegebenem ε immer ein δ mit der Eigenschaft finden kann, daß für alle Werte von h, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist, $\varphi(h)$ kleiner als ε ist.“

Diese Definitionen gelangen ihm deshalb, weil er die Früchte, die Arbeit und Erkenntnisse seiner Vorgänger nutzte – so wie den Begriff der Funktion - und zusätzlich sich einer entscheidenden Frage annahm, welche schon die Pythagoreer interessierte: Was ist eine Zahl? Hairer & Wanner (2011) stellen gut die Wichtigkeit dieser Frage dar:

> 1821 etablierte Cauchy neue Maßstäbe an die Strenge in seinem berühmten ‚Cours d'Analyse'. Die Fragen lauteten wie folgt:
> – Was ist eine Ableitung in Wahrheit? Antwort: Ein Grenzwert.
> – Was ist ein Integral in Wahrheit? Antwort: Ein Grenzwert.
> – Was ist eine unendliche Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ in Wahrheit? Antwort: Ein Grenzwert.
> Dies führt zu:
> – Was ist ein Grenzwert? Antwort: Eine Zahl.
> Und schließlich die letzte Frage:
> – Was ist eine Zahl? (Hairer & Wanner 2011, S. 186)

Die Beschäftigung mit dieser Frage führte zu verschiedenen Konstruktionen der reellen Zahlen und war (bzw. ist) weitläufiger und komplexer, als es auf den ersten Blick erscheinen mag. Viele Mathematiker veröffentlichten darüber Arbeiten wie z.B. Dedekind mit seinen Werken *Stetigkeit und irrationale Zahlen* und (das berühmtere) *Was sind und was sollen die Zahlen*. Als Schüler von Weierstraß, beschäftigte sich auch Cantor direkt sowie indirekt mit dieser Frage.

Georg Cantor

In seiner im Jahre 1872 publizierten Arbeit *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* „muss er erst einmal feststellen, dass es gar keine saubere Definition der reellen Zahlen gibt!" (Sonar 2011, S. 555). Im Zusammenhang mit der weiteren Behandlung dieses Problems entwickelte Cantor zunächst (s)eine Theorie der reellen Zahlen und durch ein zufälliges Treffen mit Dedekind und einen damit verbundenen „Briefwechsel der beiden Männer erwächst die Grundlage der Mengenlehre, die Cantor später so weit entwickeln wird, dass er den ‚Drachen' Unendlichkeit erlegen kann" (Sonar 2011, S. 556).
Dadurch werden manche Fragen, welche schon die Griechen in der Antike interessiert haben, wieder aktuell, und man könnte fast meinen, der Lauf der Geschichte wiederholt sich. Die Frage nach der Zahl, nach den Grundlagen motivierte zur Entwicklung der Mengenlehre, welche (anfangs) die Antinomien von Bertrand Russell (1872-1970) ermöglichte.

Dies führte bekanntlich ja zur zweiten Grundlagenkrise in der Mathematik. Des Weiteren hält wieder ein schon länger verschollenes, fast verbannt geglaubtes Wesen Einzug in die Mathematik: das Unendliche in der Form des Aktual-Unendlichen. Somit war auch wieder der Begriff „Unendlichkeit“ ein Diskussionsthema, denn Cantor wagte den Schritt, unendliche Mengen wie $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ zu vergleichen. Er kam auch zu einem Ergebnis, indem er die „Zuordnungsfrage“, ob „zu jedem Individuum des einen Inbegriffs [nämlich der Menge $\mathbb{N}$] ein und nur eines des anderen [nämlich der Menge $\mathbb{R}+$] gehört“ verneinte, denn die Folgerung war und ist: „Die Unendlichkeit von R+ ist in präzisierbarem Sinn viel größer als die von $\mathbb{N}$; es gibt im Unendlichen deutlich erkennbare Abstufungen“ (Heuser 2008, S. 216f). Einen guten Einblick in die damalige Situation gibt eine Beschreibung von Meschkowski:

> Freilich hat die Diskussion über die Antinomien in der Mengenlehre die mathematische Grundlagenforschung weit weg geführt von der klassischen und von *Georg Cantor* leidenschaftlich verteidigten Auffassung über das Wesen der Mathematik. Intuitionisten und Formalisten sind sich einig in dem Bemühen, metaphysische Elemente aus den Grundlagen der exakten Wissenschaften zu entfernen. Um einen gesicherten und allseitig anerkannten Aufbau der Mathematik zu erreichen, verzichtet man z. B. auf alle ontologischen Aussagen über die Objekte der Mathematik. Die modernen Axiome sind nicht Thesen über irgendeine Wirklichkeit, sondern die Grundlagen der formalen Systeme des Mathematikers, von denen man allenfalls Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit verlangt. Eine solche Beschränkung entspringt nicht einer bösen nihilistischen Laune, sondern dem Wunsch nach absoluter Sicherheit. Der an Platon und den Scholastikern geschulte *Georg Cantor* dachte darüber anders. Für ihn war die Mathematik eine Art Hilfswissenschaft der Metaphysik, und seine Mengenlehre gehörte sogar in den Bereich der Metaphysik selbst hinein. (Meschkowski 1961, S. 82)

2.6. Das 20. Jahrhundert

2.6.1. Rückblick, Ausblick und Zusammenfassung

Die bekannten Paradoxien Zenons von Elea (490-430 v. Chr.), bei denen unter anderem Achilles die Schildkröte nie einholt und der fliegende Pfeil sich gar nicht bewegt, können sowohl als Kritik an der atomistischen Anschauung als auch an der Kontinuums-Anschauung verstanden werden (und waren von Zenon vielleicht auch so gemeint). So schreibt z.B. Sonar:

> Wenn man sich Zeit als atomistisch, also als Sammlung von Zeitpunkten, vorstellt, dann, so Zenon, kann ich mir den Pfeil in einem dieser Zeitpunkte anschauen und zu diesem Zeitpunkt steht er still. Das ist doch offenbar mit der Bewegung des Pfeiles gar nicht zu vereinbaren! Wenn man andererseits im Fall von Achilles und der Schildkröte annimmt, dass die Laufstrecke ein Kontinuum ist, dann muss

> der Läufer unendlich viele, immer kleiner werdende Stücke dieses Kontinuum durchlaufen und das, so Zenon, kann nicht in endlicher Zeit ausgeführt werden. (Sonar 2011, S. 57)

„Zenon und seine Paradoxien werden bis heute kontrovers diskutiert“ ist darauf im Anschluss bei Sonar (2011, S. 57) zu lesen und das ist auch der Fall.

Thiele (in Jahnke 1999, S. 41 an Pietschmann orientiert) schreibt dazu: „Der *operationale Umgang* mit Zenons Paradoxien führte jedoch in der sogenannten Epsilontik auf eine statische Fassung des Grenzwertbegriffs, mit der die Zenonschen Aporien zwar bewältigt, aber nicht gelöst werden.“ Des Weiteren findet sich bei Thiele ein Zitat von Courant (entnommen aus Courantes *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung)*:

> Die intuitive Idee eines Kontinuums und eines stetigen Fließens ist völlig natürlich. Aber man kann sich nicht auf sie berufen, wenn man eine mathematische Situation aufklären will; zwischen der intuitiven Idee und der mathematischen Formulierung, welche die wissenschaftlich wichtigen Elemente unserer Intuition in präzisen Ausdrücken beschreiben soll, wird immer eine Lücke bleiben. Zenons Paradoxien weisen auf diese Lücke hin. (zit. nach Thiele 1999, S. 41)

Kommt uns dieses Zitat nicht eine wenig bekannt vor? Schon die antiken Philosophen, allen voran Parmenides, und später in der Scholastik Nikolaus von Kus wiesen auf diese Lücke hin. Die Wissenschaft ist seit jeher angetrieben, diese Lücke zwischen unserem Wissen, der (damit verbundenen) Erkenntnis und der Wirklichkeit der Welt, des Universums, nach Parmenides kurzum *des Seins* zu schließen bzw. zumindest immer mehr zu verkleinern. Auch unsere Mittel und Möglichkeiten, die Natur zu beschreiben, werden immer feiner und raffinierter. Aber wie gehen (und gingen) wir (bzw. die Wissenschaftler) dabei von statten? Wir schreiten von gesichertem auf ungesichertes Terrain und versuchen auch jenes im Sinne eines Begreifens zu sichern. Auf diese Weise gelangten die Mathematiker/innen auch zu dem heute bekannten „sicheren“ Grenzwertkonzept. Bevor dieses gesichert war, wurde mit „vageren“ Begriffen herumjongliert, wobei wahrscheinlich viele davon in eine Sackgasse, aber manche zu großartigen Ergebnissen führten, und so war es durch den Forschungsdrang und mutige, aber bedachte Annahmen möglich, diese Ergebnisse auch ohne Grundlagen zu erzielen. In der Folge wurde ja auch wieder das sichere Terrain der „strengen Grundlagen“ verlassen, um weitere Fortschritte in der Mathematik und Physik zu erzielen. Es wurden in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts durch die Entwicklung der *Non-Standard-Analysis* „viele Argumente von Leibniz, Euler und Cauchy auf eine gesicherte Grundlage gestellt“ (Lützen in Jahnke 1999, S. 243).

Die eingangs gestellte Frage „Warum hat die Entwicklung des Grenzwertbegriffs eigentlich so lange gedauert?“ könnte im Nachhinein genauso gut in „Wie war so eine Entwicklung überhaupt möglich?“ umformuliert werden, denn angesichts der dafür verantwortlichen intellektuellen Leistungen und der doch anspruchsvollen Thematik sollte man staunend seinen Hut ziehen. So hatten manche Mathematiker der Antike wahrscheinlich schon eine Ahnung von diesem Begriff, jedoch hatten sie diesen nicht als Ziel vor Augen, und ihnen war der Umgang mit der *Unendlichkeit* nicht ganz geheuer. Mancherorts ist auch zu lesen, es sei die Furcht gewesen, welche die griechischen Mathematiker daran hinderte, bis zum heutigen Grenzwertkonzept vorzustoßen. Eine direkte Furcht vor dem Unendlichen als Argument, als Grund zu sehen, ist aber sicher nicht richtig. Sie setzten sich ja mit ihr auseinander, nur mussten und wollten sie ihre Ergebnisse (erst einmal) auf sicherem Boden wissen. Mithilfe des doppelten Widerspruchbeweises war dies möglich, und sie erzielten auch ohne „spekulative Unendlichkeitsgedanken“ großartige Ergebnisse. Spätere Mathematiker spielten mit „Unendlichkeitsgedanken“ im Kleinen sowie Großen, und es war für sie nicht problematisch mit diesen zu rechnen. Auch mit diesen propädeutischen Konzepten wurden beachtliche Ergebnisse erzielt. Erst wieder das Verlangen nach mehr Genauigkeit bzw. gesichertem Wissen, um weiter auf neues (ungesichertes) Terrain vorstoßen und die Lücke weiter schließen zu können, führte zu *verbesserten* Grundlagen und schließlich zu dem uns bekannten Grenzwertbegriff.

Des Weiteren muss auch erwähnt werden, dass einerseits der heutige relativ einfache Informationstransfer noch vor 20 Jahren ein ganz anderer war - geschweige denn vor 200 Jahren oder in der Antike. Der Zugriff auf das (nützliche) Wissen anderer, der Austausch, war nicht immer gegeben, wobei sich diese Lage zwar im Laufe der Zeit verbesserte, aber oft waren die Forscher auf sich alleine gestellt. Selbst wenn der Austausch gegeben war, hieß das aber noch lange nicht, dass gemeinsam an einem Strang gezogen wurde, wie die Geschichte uns zeigt. Andererseits mussten sich innovative Ideen gegenüber den konventionellen erst einmal beweisen und durchsetzen bzw. sich in das vorhandene Wissen einfügen. Es darf und kann jetzt spekuliert und diskutiert werden, inwiefern sich diese Punkte und die unterschiedlichen Einstellungen und Sichtweisen der Persönlichkeiten, wie z.B. Leibniz und Newton oder Demokrit und Aristoteles, auf die Entwicklung insgesamt und auch auf die Entwicklung ihrer eigenen Begriffe und Methoden ausgewirkt haben. Eines ist klar: Die jeweiligen Einstellungen hatten eine unterschiedliche Auswirkung. Aber dadurch kam es eben zu den individuellen Methoden mit ihren Vor- und Nachteilen. Diese waren nicht gleich ersichtlich, doch immer wieder verstanden es manche genialen Mathematiker/innen, (nicht gleich ersichtliche) Vorteile einer Methode zu erkennen, auf „unbekanntes Terrain“ zu bringen und dort geschickt einzusetzen. Das Resultat waren dann neue,

frische Methoden, welche gegenüber den vorigen eine Verbesserung darstellten oder zumindest ein anderes Licht auf die Dinge warfen und zu neuen Fragen führten.
Weierstraß und seine Nachfolger, Dedekind und Cantor, erschufen durch Synthese von *Atomismus* und *Kontinuum* gewissermaßen die reellen Zahlen und die Mengenlehre. Die Anfangsschwierigkeiten der naiven Mengenlehre wurden durch die Arbeit der nächsten Mathematiker/innen, wie z.B. David Hilbert (1862–1943), überwunden. Die Mengenlehre und der Grenzwertbegriff ermöglichen uns einen theoretischen, operativen Umgang mit der Zahl und der Größe, mit den Begriffen, welche sich unserer Erkenntnisfähigkeit (fast) gänzlich entziehen: der Null, also dem Nichts, und der Unendlichkeit. Gemeinsam konnten nun viele Fragen und Aufgaben einigermaßen zufriedenstellend bewältigt werden – der Pfeil bewegt sich doch... oder?

3. Die Rolle des Grenzwertbegriffs

Welche Rolle spielt nun der Grenzwertbegriff in der Analysis und im Mathematikunterricht?

3.1. In der Analysis

Im traditionellen klassischen Aufbau der Analysis ist die Sachlage bezüglich der Rolle und Position des Grenzwertbegriffs klar. Wie in vielen Lehrbüchern beschrieben, nimmt der Grenzwertbegriff eine zentrale Position ein und wird von Anfang an präzise definiert (vgl. z.B. Deiser 2013, Forster 2004, Heuser 2003). Des Weiteren ist er grundlegend für weitere Begriffe und Themen und durchzieht „in seinen vielen Spielarten die gesamte Analysis" (Deiser 2012, S. 10). Heuser schreibt in seinem Lehrbuch der Analysis – Teil 1 (2003, S. 142): „[Der Grenzwertbegriff] ist in seinen mannigfachen Ausprägungen zentral für die Analysis und bestimmt ihren eigentümlichen Charakter. Er wird von nun an all unsere Betrachtungen beherrschen."

Dies entspricht dem und resultiert natürlich aus dem axiomatischen Aufbau der „Standardanalysis", bei der die vollständige Zahlengeraden, also der reellen Zahlen, und der Grenzwert einer Folge (als spezieller Funktion) gewissermaßen die Fundamente bilden. Die Definition der Stetigkeit einer Funktion, die Ableitung als Grenzwerte von Differenzenquotienten und das Integral als Grenzwerte von (Riemannschen) Summen bauen darauf und werden mit Hilfe des Grenzwertbegriffs präzisiert.

Doch nicht nur innermathemathematisch ist der (präzisierte) Grenzwertbegriff (einer Folge) von Relevanz, er hat auch in verschiedenen Anwendungen seine Bedeutung. So ist bei Zorich (2006, S. 83) zu lesen, „dass wir bei Messungen realer physikalischer Größen auf Folgen von Näherungswerten treffen, mit denen dann gearbeitet werden muss", wobei sich „bei diesem Stand der Dinge […] zumindest folgende drei Fragen" aufdrängen:

1) Welche Beziehung besteht zwischen der so erhaltenen Folge von Näherungen und der zu messenden Größe? Dabei denken wir an den mathematischen Aspekt dieser Frage, d.h., wir suchen eine exakte Formulierung für die Bedeutung des Ausdrucks ‚Folge von Näherungswerten' im Allgemeinen und inwieweit eine derartige Folge den Wert der Größe beschreibt. Ist die Beschreibung unzweideutig oder kann dieselbe Folge zu verschiedenen Werten der Messgröße führen?

2) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Operationen mit den Näherungswerten und denselben Operationen mit den exakten Werten? Wie können wir Operationen charakterisieren, die berechtigterweise so ausgeführt werden können, dass die exakten Werte durch die genäherten ersetzt werden können?
3) Wie können wir an einer Zahlenfolge erkennen, ob sie eine Folge beliebig genauer Näherungen für die Werte einer Größe sein kann? (Zorich 2006, S. 83)

Mit Hilfe des Grenzwertes können diese Fragen beantwortet werden. Insofern wird mit diesem auch eine Verbindung zwischen reiner und angewandter Mathematik hergestellt und er ist ein Beispiel dafür, wie sich diese beiden Gebiete gegenseitig befruchten können. Betrachtet man die Fragen, welche Zorich in seinem Buch stellt, weiß man auch um die Wichtigkeit in Bereichen der Anwendung Bescheid.

3.2. Im Mathematikunterricht

Im österreichischen Lehrplan der AHS-Oberstufe (Onlineversion auf der Internetseite vom Bundesministerium für Bildung und Frauen) wird der Begriff des Grenzwerts erstmals in der 6. Klasse bei dem Thema *Folgen* durch

- „Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert"

und ein weiteres Mal in der 7. Klasse bei dem Thema *Differentialrechnung*

- „Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit"

konkret erwähnt.
In Deutschland schauen die Lehrpläne der Bundesländer etwas anders aus, wie Ableitinger & Heitzer beschreiben:

> So heißt es […] im nordrhein-westfälischen Lehrplan für das Gymnasium unter ‚Differenzialrechung ganzrationaler Funktionen': ‚Ein anschaulich geprägter und nicht-formaler Grenzwertbegriff reicht an dieser Stelle völlig aus, ein an Maßstäben der Hochschulen ausgerichteter Zugang über Epsilontik oder eine Theorie der Folgen ist den Zielen der Jahrgangsstufe 11 nicht angemessen.' (Ableitinger & Heitzer 2013, S. 2)

Es ist also ein kleiner Unterschied festzustellen, allerdings geht die Tendenz in beiden Ländern in Richtung eines „anschaulich-geprägten", „intuitiven" Grenzwertbegriffs.
Wie sich auch immer die Lehrpläne und Curricula entwickeln und welche didaktischen Strömungen in Zukunft tonangebend sein mögen: ein ungefährer Konsens herrscht dar-

über, dass die Behandlung des Grenzwertbegriffs im Unterricht schwierig und anspruchsvoll ist, Fehlvorstellungen von Anfang an vermieden bzw. thematisiert werden sollten und eine tragfähige Grundvorstellung anzustreben ist. Letztlich, ähnlich wie in der (klassischen) Analysis, werden auch im Schulunterricht viele Begriffe auf dem des Grenzwerts aufgebaut – der Differentialquotient ist der Grenzwert des (zugehörigen) Differenzenquotienten und das Integral als Grenzwert von der (zugehörigen) Riemannschen Summe. Das Grenzwertkonzept ist somit auch in der Schulanalysis von großer Bedeutung und so ist beispielsweise bei Tietze et al. (1997, S. 254) zu lesen: „Trotz aller Schwierigkeiten mit dem Grenzwertbegriff ist es u. E. ein wichtiges Anliegen des Analysisunterrichts, ‚daß Grenzprozesse adäquate Mittel darstellen, ein \`unzulängliches Objekt´ zu beschreiben, nämlich durch die Angabe einer konvergenten Folge‘ *(Blum/Törner 1983, 78)*“.

4. Probleme und Schwierigkeiten

Mathematik, speziell Analysis, zu unterrichten ist mit grundlegenden und charakteristischen Schwierigkeiten verbunden. Danckwerts & Vogel (2010) berichten in der Einleitung zu ihrem Buch von einer Podiumsdiskussion (diese wurde unter der Leitfrage „Quo vadis Analysisunterricht" auf der Jahrestagung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) schon Anfang der 1990er Jahre durchgeführt), „in der noch heute [diese Diskussion ist wahrscheinlich unabhängig von der Zeit immer interessant und aktuell] gültige Grundprobleme des Analysisunterrichts verhandelt wurden". Im Zuge ihrer Schilderung erklären Danckwerts & Vogel die verschiedenen Positionen der einzelnen Diskussionsteilnehmer und kommen zu dem Schluss, „dass alle vier Experten die Situation als unbefriedigend erleben und zugleich zu sehr unterschiedlichen Einschätzungen kommen". Dies hängt mit der generellen Schwierigkeit des Auftrags Analysis zu unterrichten zusammen. Danckwerts & Vogel (2010, S.3) benennen zwei dieser Schwierigkeiten:

- „Das schwierige Verhältnis von Anschaulichkeit und Strenge": Wie bereits erwähnt, ist der Aufbau (und hierbei auch die Rolle des Grenzwerbegriffs) klar strukturiert bzw. definiert. Dies ist aber nur aufgrund strenger, abstrakter Grundlagen(begriffe) möglich, welche sich der Anschauung der Schüler weitgehend entziehen.
- „Die Analysis entzieht sich dem Ad-hoc-Zugriff auf ihre Inhalte und den Ad-hoc-Methoden beim Problemlösen": Eine in sich abgeschlossene, sinnstiftende Erfahrung innerhalb von ein, zwei Unterrichtseinheiten zu ermöglichen ist relativ schwer. Die „Durststrecken" sind entsprechend lang, bis sich zeigt, wofür das bisher Gelernte zu verwenden ist.

Menghini (2008) gibt folgende Probleme an, welche mit dem Analysisunterricht verbunden sind:

> a) Das Verständnis und den Gebrauch einer formalen Sprache, die sich von der algebraischen unterscheidet: die Sprache der Analysis erscheint komplex, besonders wegen der Anwesenheit mehrerer Quantoren oder jedenfalls quantifizierender Redeteile, welche selten zum Lösen von Problemen dienen.
>
> b) Die Ersetzung einer konstruktiv-geometrischen Methode – die nur manchmal als ‚a posteriori' Erklärung dient – durch Sätze, welche die ‚Existenz' bestimmter Elemente behaupten; also das Problem der Intuition oder besser der Verbindung zwischen mentalem Bild und mathematischer Formulierung. (Menghini 2008, S. 4)

Diese von Danckwerts & Vogel sowie Menghini angeführten allgemeinen Probleme lassen sich in gewisser Weise natürlich auch auf den Grenzwertbegriff übertragen und geben einen ersten Überblick bzw. liefern eine kleine Vorausschau. Es herrscht der Tenor in der didaktischen Autorenschaft und Fachliteratur vor, dass Analysis im Mathematikunterricht, die damit verbundenen Stoffgebiete und im Speziellen Grenzwertprozesse sowie der Grenzwertbegriff sicherlich zu den anspruchsvollen und infolgedessen auch schwierigen Themen gehören, sowohl für die unterrichtende Lehrperson, als auch für die Schüler/innen, was das Verstehen und das Verständnis betrifft.
Bevor ich mich allerdings genauer den Problemen widme, speziell jenen, die auf Grenzprozesse und den Grenzwertbegriff bezogen sind, möchte ich noch auf eine Frage eingehen, welche sich fast automatisch stellt bzw. deren Antwort als Motivation dient(e):

4.1. „Warum ist es von Vorteil, über die Probleme, welche Schüler/innen beim Erlernen und Verstehen von Grenzprozessen und des Grenzwertbegriffs haben können, Bescheid zu wissen?“

„Das Wissen um die Probleme, welche die Schüler mit dem Begriff haben, ist häufig schon ein erster wichtiger Schritt zur Fehlertherapie“ schreiben Tietze et al. (1997, S. 255). Eine mehr oder weniger berechtigte Frage, die sich zuvor stellt, ist, ob überhaupt Probleme auftreten müssen. Wäre es vielleicht nicht geschickter, sich mehr auf einen didaktisch methodischen Weg zu konzentrieren, bei dem es überhaupt zu keinen Problemen kommt? Diese Frage möchte ich (persönlich) aus zwei Gründen verneinen:

1) Es wird bei einem noch so ausgeklügelten Weg nie gelingen, alle Probleme der Schüler/innen zu antizipieren und im Vorhinein zu „bereinigen“. Dies wäre auch ein Vorwegnehmen der Tatsache, dass wir Lehrpersonen es mit verschiedenen, unterschiedlichen Individuen zu tun haben und wäre so gewissermaßen Betrug an den Schülern/innen.
2) Den Schülern/innen die Chance auf die Auseinandersetzung mit (ihren) Problemen nehmen zu wollen, kann für keine Lehrperson ein didaktisches Ziel im Sinne einer Vorbereitung für das Leben sein.

Welche Vorteile hat nun ein Wissen um die Probleme? In der Literatur lässt sich dazu Verschiedenes finden (wobei ich anmerken möchte, dass ich hier nicht eine komplett strukturierte Suche durchgeführt habe, sondern sich diese Vorteile nebenbei ergeben haben und ich sie nicht verschweigen möchte, da sie auch ein weiteres Licht auf das ursprüngliche Thema werfen). Ich möchte drei „Hauptpunkte" voneinander unterscheiden. Diese überschneiden sich natürlich teilweise bzw. bedingen einander – es ist eine scharfe Abgrenzung aber nicht unbedingt notwendig, um die Vorteile aufzuzeigen, sondern es zeigt eher die Vielfalt und den Zusammenhang dieser Aspekte. Bevor ich konkret auf die Nützlichkeit eingehe, möchte ich vorher noch allgemein über Probleme sprechen.

Probleme sind in unserer Gesellschaft in erster Linie bzw. schnell mit etwas Negativem verbunden und mit einer negativen Konnotation behaftet. So geht es auch im Schulunterricht oft darum, Probleme zu verhindern oder aus dem Weg zu schaffen, um einen reibungslosen Stundenablauf zu erreichen. Unterrichts- und Schulentwicklung sind zwar nicht primär darauf bedacht und (auch) ausgerichtet, Probleme präventiv zu vermeiden; didaktische Differenzierungsmodelle etc. laufen allerdings Gefahr, als „potemkinsche Dörfer" verkannt zu werden und indirekt die Ansicht (oder Wunschvorstellung) zu transportieren, über gute Organisation und Planung ließen sich im Vorfeld Probleme aus dem Weg schaffen und ein „guter" Unterricht wäre fast schon gesichert, denn Probleme könnten diesen nicht mehr stören. (vgl. Paradies & Linser 2001, S. 17)
Diese voreingenommene Sichtweise oder Einstellung ist aber einfach falsch. Ein Problem (im Rahmen der Wissenschaft) ist per Definition (nach Müller & Halder 1984, S. 219) eine „Aufgabe, besonders eine noch nicht gelöste und schwer lösbare wissenschaftliche Streitfrage", wobei die Autoren zusätzlich anmerken, dass „in der Theologie und modernen Philosophie das, wenn auch noch ungelöste, so doch grundsätzlich (innerhalb des schon Erkannten) lösbare Problem vom grundsätzlich unlösbaren, nur *als* solchem verstehbaren Geheimnis (Mysterium) unterschieden [wird]". So werden uns Lehrpersonen im Schulalltag wohl meist lösbare Probleme und nicht unlösbare Mysterien begegnen. Der mit einem Problem verbundene Lösungsprozess erfordert natürlich das Überwinden von Hindernissen und geht manchmal einfacher, manchmal schwieriger vonstatten. Diese Hindernisse und Schwierigkeiten sollten eine Lehrperson aber nicht abschrecken, denn gerade diese sind es, die ein Lernen ermöglichen bzw. den Lernprozess anstoßen, wie wir anschließend noch sehen werden.
Im Mathematikunterricht ist dieses Bild etwas differenzierter zu betrachten, da die Problemkultur eine andere ist, wie es z.B. Vollrath & Roth formulieren (2012, S. 60): „Mathematik entsteht beim Lösen von Problemen, die sich damit als Quellen mathematischer Erkenntnis erweisen." Im Fach Mathematik werden generell Probleme in Form von Aufga-

ben und damit verbundenen Fragestellungen behandelt und somit sind Lehrperson und Schüler/innen hier eher daran gewöhnt als in anderen Fächern, da die Behandlung von Problemen ein wichtiger Teil des Unterrichts ist. *Problemorientiertes Lernen*, grob beschrieben als „Lernen, das durch ein Problem in Gang gesetzt wird“, ist für den Mathematikunterricht ein wichtiges didaktisches Konzept und ein wertvoller Aspekt, wobei eben Probleme als „richtungsweisende“ Anregungen bzw. Impulssetzungen betrachtet werden können (s. u. vgl. Vollrath & Roth 2012, S. 61/119).

Dies gewährleistet aber noch nicht das Erreichen des Ziels, das von Hiebert & Carpenter (zit. nach Besser 2014, S. 35) als „one of the most widely accepted ideas within the mathematics education community“ beschrieben wird, nämlich die „idea that students should understand mathematics“, welches sie sogar mit der „Suche nach dem Heiligen Gral“ vergleichen. Oftmals wird das Lösen von Problemen eher zur routinemäßigen Abfolge diverser Handlungsschritte, welche gelernt, aber nicht unbedingt verstanden worden sind. Das fehlende Verständnis wirkt sich dann negativ auf die Fähigkeit aus, Wissen auf andere Situationen zu transferieren: „Vergleichsstudien über die Leistungsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern beim Lösen von Aufgaben zeigen, dass Aufgaben, die bereits in einem Kontext Routineaufgaben sind, nach einiger Zeit zu Problemen werden, wenn der entsprechende Kontext fehlt (z.B. Baumert und Lehmann 1997)“, schreiben Vollrath & Roth (2012, S. 281).

Wie schon weiter oben erwähnt, ist hier weder eine systematische Schilderung beabsichtigt, noch möchte ich hier zu weit in die Lerntheorie bzw. Entwicklungspsychologie vordringen, aber ich möchte die vorher erwähnten „Hauptpunkte“ benennen und erläutern, welche eventuell auch für die späteren Betrachtungen hilfreich sind.

4.1.1. Hauptpunkt 1: Probleme sind für den Prozess des Lernens und Verstehens hilfreich und von Nutzen

Um den/einen Lernprozess in Gang zu bringen bzw. diesen „ertragreicher“ oder „nachhaltiger“ zu gestalten, ist eine Auseinandersetzung mit Problemen wichtig und notwendig.

Wie vielleicht schon erkennbar ist, sind Probleme nicht gleich Probleme. Manche werden von außen, sprich: durch gezieltes Stellen von Aufgaben, an die Schüler/innen herangetragen, um einen Denkanstoß zu initiieren, andere sind intrinsisch (durch Nachdenken) motiviert bzw. ergeben sich durch Beschäftigung mit einer vorangestellten Aufgabe. Egal wie

Probleme nun auch entstehen, sie haben die Eigenschaft, eine unbefriedigende Situation zu erzeugen, die uns Menschen (normalerweise) dazu veranlasst, über einen Sachverhalt (etc.) nachzudenken bzw. gewohnte Denkmuster zu überarbeiten. Diese Phase kann als Anfang eines Lernprozesses bezeichnet werden. Wie findet „Lernen" eigentlich statt?
Wir Menschen nehmen durch unsere Sinnesorgane die Dinge der Welt wahr. Dabei entwickeln wir im Laufe unseres Lebens verschiedene Denkmuster und Strategien, um weitere (gemachte) Erfahrungen einzuordnen. Im Zuge dessen werden gewisse Sichtweisen, sei es von Eltern, Freunden, Lehrpersonen oder aus verschiedenen Medien, übernommen und wieder verworfen oder wir entwickeln selbst welche und gestalten so, bewusst oder unbewusst, mehr oder weniger unsere Sicht der Dinge. So werden manche Informationen behalten und weiterverarbeitet, andere aber für nicht relevant empfunden und wieder vergessen. Es werden Erkenntnisse gezogen und es wird eine eigene „Wissens-Bibliothek" gebaut. Kurzum: Wir lernen, wobei sich unser bisher erstelltes „Lebens-Konzept" und unserer generierte „Wissens-Bibliothek" auf das weitere Leben und den damit verbundenen Wissenserwerb auswirken werden.

In der Mathematik ist dieser Vorgang nicht unbedingt komplexer, aber in einer Sache eventuell spezieller. Tall & Vinner (1981) gehen in ihrem Artikel auf diese Eigenheit ein, die vor allem auf der Diskrepanz zwischen „the complex manner", der Funktionsweise des menschlichen Gehirns, welches nicht eine „purely logical entity" ist, und der „logic of mathematics" fußt. Dazu entwerfen die Autoren eine Theorie und unterscheiden zwischen „concept image" und „concept definition", welche einander beim Erlernen neuer Begriffe und Konzepte gewissermaßen gegenüberstehen. Dabei steht „concept definition" für die in der (mathematischen) Theorie akzeptierte und gültige Definition oder das Konzept eines Begriffs, „a form of words used to specify that concept" (ebd., S. 152), und unter „concept image" fassen Tall & Vinner die „total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures" zusammen und führen weiter aus: „For this reason all mental attributes associated with a concept, whether they be conscious or unconscious, should be included in the concept image; they may contain the seeds of future conflict" (ebd., S. 152). So ist es durchaus der Fall, dass sich die individuelle Vorstellung und die formale Definition zu selbigem Begriff voneinander unterscheiden oder sogar gegensätzlich sind. Des Weiteren kann es vorkommen, dass Schüler/innen auf Fragen mit einer formal korrekten Definition antworten, jedoch ihr „concept image", ihre wirkliche Vorstellung darüber, nicht dazu passt. Dieses Vorgehen mag eine Zeit lang gut gehen, aber es können durch den Zwiespalt in Zukunft größere Schwierigkeiten entstehen, welche weiteres Lernen erheblich behindern oder sogar verhindern:

> A more serious type of potential conflict factor is one in the concept image which is at variance not with another part of the concept image but with the formal concept definition itself. Such factors can seriously impede the learning of a formal theory, for they cannot become actual cognitive conflict factors unless the formal concept definition develops a concept image which can then yield a cognitive conflict. Students having such a potential conflict factor in their concept image may be secure in their own interpretations of the notions concerned and simply regard the formal theory as inoperative and superfluous. (Tall & Vinner 1981, S 154.)

Es geht also ein erheblicher Einfluss von unseren *concept images* aus: Um wirkliches, authentisches Wissen bzw. Verständnis eines Begriffs oder Inhalts zu erlangen, dazu müssen unsere *concept images* immer wieder entsprechend „überarbeitet" werden, um die beiden Konzepte einigermaßen in Einklang zu bringen, damit im Anschluss sinnvoll darauf aufgebaut werden kann. In ähnlicher Weise schreiben auch Posner et al. (1982, zit. nach Williams 1991, S. 220), dass unser Wissen mit „paradigms, world views, models, or collections of central concepts that are characterized as having a structure or integrity" verbunden ist bzw. darauf aufbaut, und diese Konzepte angepasst und reorganisiert gehören. Sie geben in weiterer Folge drei Voraussetzungen an, welche für eine „accommodation or the radical reorganization of central concepts" gegeben sein müssen (ebd., S. 220):

(a) "There must be some sense of dissatisfaction with the existing conceptual framework.

(b) There must be alternative conceptions that are both intelligible and initially plausible.

(c) The alternative conception must be seen as fruitful, useful, or valuable."

Die in (a) angeführte „Unzufriedenheit" ist bei einer Auseinandersetzung mit Problemen gegeben. Allerdings geht es nicht darum, dass die Lehrperson lediglich Probleme *von außen* an die Schüler/innen heranträgt, sondern Gegebenheiten und Voraussetzungen schafft, dass sich die Schüler/innen mit ihren eigenen Problemen, Schwierigkeiten und Hindernissen, die bei der Behandlung von Begriffen etc. entstehen, beschäftigen können.

So dürfen Probleme und Schwierigkeiten nicht als Störfaktoren, oder - wie es vom Hofe (1998, S. 261) treffend formuliert – als „die Begriffsgenese störende Negativerscheinungen" gesehen werden, sondern als Chance, ein solides Begriffsverständnis zu erlangen. Vom Hofe geht in der Arbeit *„Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung* *und geistige Hindernisse"* näher auf diesen Zusammenhang ein, wobei er sich auf eine Arbeit von Sierpinska (On understanding the notion of function, 1992) bezieht und ihre „Grundgedanken kurz beleuchtet" (ebd. S. 260f). Wie vom Hofe beschreibt, geht es dabei vor allem darum, dass Probleme und Denkhürden „charakteristisch für die sachliche Struktur" sind und mit der „Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte und somit insbesondere auch mit der Entwicklung der Anwendungsfelder" des jeweiligen Begriffs oder Inhalts zusammenhängen – vom Hofe zitiert dazu Sierpinska:

> ... they seem to belong to the meaning of the concepts themselves, they are not just results of particular ways of teaching these, and they are not idiosyncratic, not something that occurs in a person or two. They are common in the frame of some culture, whether present or past and thus seem to be the most objective obstacles to a new way of knowing. (Sierpinska 1992, zit. nach vom Hofe 1998, S. 261)

Somit sind Probleme einerseits dafür verantwortlich, Denkprozesse anzustoßen und auszulösen, welche notwendig sind, um die *concept images* in positiver Art und Weise zu überarbeiten. Anderseits prägen Probleme Begriffe und Inhalte und zeichnen diese gewissermaßen aus. Sie sind als *„epistemological obstacles"*, diese Bezeichnung verwendete Sierpinska (1987), untrennbar mit ihnen verbunden, und ein wirkliches Verstehen ist nur durch eine Beschäftigung mit ihnen zu erreichen.

4.1.2. Hauptpunkt 2: (Viele) Probleme sind nicht offensichtlich, sondern versteckt und uns nicht bewusst

Im „Unterbewussten" einer Person können viele Dinge schlummern. Ebenso können sich dort im Zuge des Lernprozesses auch Probleme und (problemhafte) Vorstellungen „verstecken", welche in Folge weitere Denkvorgänge aber sehr wohl, und das meist negativ, beeinflussen können.

Generell haben Lehrpersonen nicht wirklich einen Einblick in den geistigen Werdegang und die damit verbundene Gedankenwelt ihrer Schüler/innen. Manchmal kann es natürlich sein, dass eine Lehrperson ihre Schüler/innen mehrere Jahre im Unterricht begleitet und so schon ein gewisses Gespür für die jeweiligen Schüler/innen entwickelt hat und damit über deren Denkkonzepte, Lernstrategien etc. Bescheid weiß. Das dürften aber eher Ausnahmefälle als die Regel sein und selbst dann ist es nicht gewiss, dass die Lehrperson (bei allen) einen Einblick hat; die Schüler/innenzahlen sind hoch, es werden stets neue Lerngebiete beschritten und auch der kontinuierlich zunehmende Abstraktionsgrad in der Mathematik ist diesbezüglich nicht zu unterschätzen. So werden manche Probleme von der Lehrperson trotz ihres Bemühens schon aufgrund dessen unentdeckt bleiben – dies liegt in der Natur der Sache und macht auch irgendwie den Reiz an der Arbeit mit Menschen aus, ist aber sicher keine Erleichterung. Zu einem ernsthaften Problem gerät die Sache aber dann, wenn Lehrperson und Schüler/in gemeinsam in dem Glauben arbeiten, dass ein Begriff (bzw. ein mathematischer Inhalt etc.) vollständig durchdacht und verstanden wurde, obwohl das nicht so ist. Die Lehrperson und die Schüler/innen arbeiten mit diesem Begriff weiter, um anderes, neues Wissen darauf aufzubauen, aber dadurch, dass der ursprüngliche Begriff nur scheinbar verstanden wurde, kommt es früher oder später zu (wahrscheinlich erheblichen) Lernschwierigkeiten: Der Fehler wird längere Zeit unbewusst mitgeschleppt, ist allmählich im Denken verwurzelt und offenbart sich erst an anderer Stelle, so dass es die Lehrperson, welche in der Zwischenzeit möglicherweise eine andere ist, und die Schüler/innen wundert, wie es dazu gekommen ist und wo des Übels Ursache liegt.

Es ist jetzt natürlich berechtigt, sich die Frage zu stellen, wie das möglich ist, so lange im Irrglauben zu arbeiten und ein „Scheinwissen“ aufzubauen, ohne es zu merken. Wie und warum es dazu bzw. zu falschen Vorstellungen, welche im Unbewusstsein versteckt sind und später gravierende Probleme verursachen können, kommen kann, dafür lassen sich verschiedene Gründe angeben bzw. Theorien in der Literatur finden, wobei ich zwei Aspekte herausarbeiten und betonen möchte.

Als einer davon kann der (fast) nicht vermeidbare Informationsverlust gesehen werden, der, beim Versuch die Wirklichkeit zu erfassen, einfach gegeben ist und innerhalb der Philosophie, angefangen in der Antike bei Parmenides über Nikolaus von Kues und René Descartes bis Immanuel Kant, Arthur Schopenhauer und anderen, schon immer ein Diskussionspunkt war und (teils) noch immer ist.
Tall & Schwarzenberger (1978) kommen in diesem Artikel auf diesen Punkt zu sprechen und beschreiben dabei die Problematik des Wissenstransfers von Lehrperson zu Schülern/innen: „Most of the mathematics met in secondary school consists of sophisticated ideas conceived by intelligent adults translated into suitable form to teach to developing children“ (ebd., S. 1). Die Anpassung des Stoffes auf ein gerechtes und adäquates Niveau ist einerseits mit Verlust an formaler Präzision verbunden, was wiederum das inhaltliche Verständnis beeinträchtigen kann, und andererseits kann diese „informal language of the

translation“ Schattierungen beinhalten – sie bezeichnen es als „colloquial meanings“ - welche verschiedenartige Interpretationen zulassen.
Ähnlich bespricht Fishbein (2001) das Problem der Lücke, die zwischen unserer mentalen, kognitiven Vorstellung und der Wirklichkeit klafft. Unsere selbst geschaffenen „mentalen Modelle“ sollen uns helfen, die Realität zu verstehen, vor allem „when we have to deal with concepts which are highly abstract or very complex, our reasoning tends to replace them by substitutes which are more familiar, more accessible, more easily manipulated“ (ebd., S. 328). Dies ist natürlich ein kluger Schachzug und es ist prinzipiell nichts gegen diese Vorgangsweise einzuwenden. Wir sind uns jedoch nicht immer bewusst, dass wir uns dieser *mental models* bedienen, „sometimes we are not aware of their presence and/or of their impact“ (ebd., S. 328), welche somit zu sogenannten „tacit models“ werden. Die damit verbundene Gefahr ist die Tatsache, dass ein Modell eben ein Modell bleibt, somit diverse Details nicht mit dem Original übereinstimmen und dies zu „distorted interpretations and conclusions“ führen kann, wenn unsere *tacit models* uns (unbemerkt) beeinflussen oder sich überlagern (vgl. ebd. S. 328). Als ein Beispiel führt Fishbein die Vorstellung über Punkte auf einer Linie an: „Although we know perfectly well that mathematical points have no dimensions, we continue to think tacitly, unconsciously, in terms of small spots. Practically, psychologically, we cannot get rid of these images“ (ebd. S. 315).

Der andere Aspekt beschäftigt sich mit der Frage, wie die Vergangenheit – das heißt unsere Erfahrungen und unser bisheriges Wissen - die zukünftige Wissensaufnahme von uns Menschen (oft unbewusst) beeinflusst, ja sogar mitsteuert.
Tall bespricht dies in verschiedenen Artikeln (z.B. Tall 1980, 2008 oder Tall & Vinner 1981). Ich möchte auf seinen Artikel von 2008 näher eingehen. Darin unterscheidet und beschreibt er „set-befores“ - kognitive Strukturen, mit denen wir geboren werden, wie z.B. die soziale Fähigkeit mit Menschen zu interagieren oder dass wir Dingen Namen geben, und „met-befores“, welche er als „a current mental facility based on specific prior experiences of the individual“ beschreibt (Tall 2008. S. 5f). Beide haben ihre Wirkung auf die mathematische Entwicklung. Neue Situationen bzw. mathematische Begriffe oder Regeln werden mit den *met-befores* abgeglichen, wobei diese konsistent sein können oder auch nicht. Als Beispiel nennt er hier die Methode der Subtraktion. Die Vorerfahrung „Etwas wegnehmen bedeutet weniger“ ist auf den Zahlenraum der natürlichen Zahlen übertragbar und somit hilfreich, allerdings gilt das nicht bei Subtraktion mit einer negativen Zahl. Diese paradox erscheinende Situation lässt sich aber schnell auflösen, zumal negative Zahlen

mit Schulden verglichen werden können und sich so wieder eine Analogie zur Realität herstellen lässt. Schwieriger wird es bei Beschäftigung mit unendlichen Mengen:

> The same met-before works consistently with finite sets, where taking away a subset leaves fewer elements, but is inconsistent in the context of infinite sets, where removing the even numbers from the counting numbers still leaves the odd numbers with the same cardinality. (Tall 2008, S. 8)

Met-befores beeinflussen die Art und Weise, wie wir neue Begriffe interpretieren, wobei Tall hinweist, dass „met-befores can operate covertly, […], sometimes to advantage, but sometimes causing internal confusion that impedes learning“ (ebd., S. 8). Im Zuge der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten findet ein Übergang vom bildhaft symbolischen zu formalem Denken sowie ein immerwährender Austausch untereinander statt, wobei uns unsere Vorerfahrungen unbewusst beeinflussen können.

Hier kommt dazu, dass wir Menschen meist „Gewohnheitstiere“ sind. Ist eine kognitive Struktur einmal einigermaßen aufgebaut und erprobt, so geben wir diese so schnell nicht wieder auf. Insofern übertragen wir gern unser bisheriges Wissen auf neue Situationen: So werden z.B. Regeln und Eigenschaften, welche für ein „mathematisches System“ gültig sind, auch für andere mathematische Systeme als legitim erachtet. Diese vorschnelle Übernahme ist allerdings eine gefährliche Sache, denn oft werden wichtige Details und Faktoren übersehen. Tsamir (1999) beschäftigt sich in seinem Artikel mit dieser Problematik und hält fest:

> Awareness of the changes caused by the enlargement of mathematical systems and the ability to identify the variant and invariant elements under a specific transition, are important factors in the growth of mathematical knowledge. However, research findings clearly indicate that students and teachers, pre-service as well as in-service, tend to attribute all properties of a specific domain of numbers, to a more general one (e.g., regarding rational numbers: Greer, 1994; Hart, 1981; Klein and Tirosh, 1997; regarding decimals: Moloney and Stacey, 1996; Putt, 1995; regarding negative numbers: Hefendehl, 1991; Streefland, 1996; regarding irrational numbers: Fischbein, Jechiam and Cohen, 1995; and regarding complex numbers: Almog, 1988). (Tsamir 1999, S. 209f)

Er führt diese Vorgangsweise teilweise darauf zurück, dass Schüler/innen auf ihr „intuitive knowledge“ zurückgreifen bzw. in alte, vertrautere Denkschemen zurückfallen, wenn neue Begriffe und Themen behandelt werden (vgl. ebd. S. 231).

In unserem Entwicklungs- und Lernprozess werden wir mit sehr vielen Informationen und Eindrücken konfrontiert, so dass wir uns nicht aller bewusst sein können. Wir wären sonst einer Reizüberflutung ausgeliefert, welche nicht bewältigbar wäre. Unser Gehirn schützt sich (glücklicherweise) davor bzw. arbeitet betreffend Informationsaufnahme und -

speicherung teilweise unwillkürlich automatisch. Es können famose Ideen entstehen, sich manche Fehlvorstellungen verstecken oder unterschiedliche Denkkonzepte parallel entwickeln, welche in einer Situation kongeniale Wirkung haben, in einer anderen jedoch konträr sind und uns in eine Sackgasse führen. In seiner Komplexität funktioniert unser Gehirn nicht als eine Einheit - „The human brain is not a purely logical entity […] the brain does not work that way“ (Tall & Vinner 1981, S. 151f).

4.1.3. Hauptpunkt 3: Die Qualität des Unterrichts steigt, wenn die Lehrperson mehr über Probleme und Fehlvorstellungen Bescheid weiß und sie bewusst thematisiert.

Innerhalb der Unterrichtsplanung sowie auch im Unterricht selbst kann die Lehrperson mehr auf die Schüler/innen und deren Probleme eingehen und das Geschehen bzw. das Schüler/innenverhalten aus einem weiteren Blickwinkel betrachten.

Manche Probleme der Schüler/innen können auf die Lehrperson fremd wirken und sind nicht gleich nachvollziehbar, aber eine Auseinandersetzung mit Problemen sensibilisiert die Lehrperson in einer gewissen Art und Weise für den Lernprozess der Schüler/innen. „Experts may have forgotten how they thought when they were young and are likely to need to reflect on how different students' met-befores affect their ways of learning“, ist bei Tall (2008, S. 7) zu lesen.

Folglich kann die Lehrperson eine aufgeschlossenere, offene Haltung gegenüber den Schüler/innenproblemen erlangen; sie braucht nicht Angst zu haben, dass sämtliche Probleme aufgrund ihres Unterrichts entstehen, sondern viele mit dem Entwicklungs- und Verstehensprozess selbst unweigerlich verbunden sind und bewältigt werden müssen. Wichtig dabei ist, dass sich die Schüler/innen, gemeinsam mit der Lehrperson, mit den Problemen auseinandersetzen, diese nicht nur oberflächlich behandeln, sondern sich dieser annehmen und versuchen, die Gründe bzw. die Motive (der Schüler/innen) für das fehlerhafte Handeln zu eruieren. Denn in Anlehnung an die Möglichkeit, dass zwei konträre Denkkonzepte in einem Menschen parallel existieren können (vgl. Tall & Vinner 1981), schreibt Sierpinska:

> […] if the presence of an epistemological obstacle in a student is linked with a conviction of some kind then overcoming this obstacle does not consist in replacing this conviction by an opposite one. This would be falling into the dual obstacle. It rather means that the student will have to rise above his convictions, to analyse from outside the means he had used to solve problems in order to formulate the

> hypotheses he had admitted tacitly so far, and become aware of the possible rival hypotheses. (Sierpinska 1987, S. 374)

Neues Wissen gehört richtig eingeordnet und dementsprechend sollte das bisherige Gelernte reflektiert werden. Dieser Prozess ist aber durchaus anstrengend und in dieser Hinsicht müssen Schüler/innen schon (etwas) gelenkt und geführt werden. So schreibt Bauer (2008) in seinem Buch:

> Lebenslust, Motivation und die Bereitschaft, sich für ein Ziel anzustrengen, entstehen in einem Menschen nicht von selbst. Zu den fatalen Irrtümern unserer Zeit zählt die Auffassung, das Verhalten von Menschen sei im Wesentlichen bereits durch seine Gene determiniert, weshalb äußere Faktoren nur wenig ausrichten können. (Bauer 2008, S. 18)

Dort ist auch zu lesen, „die Beziehungen zwischen Kindern und Jugendlichen auf der einen sowie Lehrern, Eltern und Mentoren auf der anderen Seite sind keine Einbahnstraße, sondern gleichen – neurobiologisch gesehen – eher einer Strecke mit lebhaftem Gegenverkehr“ (ebd., S. 28). Indem die Lehrperson die „Angst“ vor Problemen ablegt und eine aufgeschlossenere Haltung einnimmt, ist es wahrscheinlich auch für die Schüler/innen einfacher sich mit ihren Problemen offenkundig auseinanderzusetzen – ohne Spott und Häme befürchten zu müssen. Dies kann und wird auch auf den Umgang mit neuem Wissen eine positive Wirkung haben.

Abschließend möchte ich eine Textpassage aus vom Hofe (1998) zitieren, da die „didaktische Konsequenz“, welche er aus den Überlegungen zu einem Artikel von Sierpinska gewinnt, eine gute Zusammenfassung darstellt:

> Eine wichtige didaktische Konsequenz aus diesen Überlegungen besteht darin, dass man Lernprozesse nicht soweit glätten sollte, dass die für das Verständnis zentralen Probleme und Denkhindernisse ausgeklammert oder umgangen werden. Mathematikunterricht, der auf Verstehen - und nicht nur auf schematische Fertigkeiten - Wert legt, sollte vielmehr genügend Raum geben, um solche Probleme *aufzuwerfen,* sodass Schüler die Möglichkeit haben, sich mit ihnen auseinanderzusetzten, mit ihnen zu ringen – wobei auch manche gedankliche Sackgasse ein produktiver Schritt zur Problembewältigung sein kann - und sie schließlich zu überwinden. Solche Problemlösungsprozesse sind charakteristischerweise mit Anstrengungen und emotionaler Anspannung verbunden, die im günstigen Falle durch die entspannende Freude eines ‚Aha-Erlebnisses‘ belohnt werden können. (vom Hofe 1998, S. 261)

4.2. Studien und Artikel

Die im Anschluss vorgestellten Studien und Artikel beschäftigen sich auf unterschiedliche Weise mit Schwierigkeiten und Problemen im Umgang mit Grenzprozessen und dem Grenzwertbegriff. Sie umfassen eine relativ lange Zeitspanne von anno 1978 bis 2013. Es sind auch eine Studie (Fishbein et al. 1979) sowie ein Artikel (Monaghan 2001) dabei, welche in erster Linie nicht den Grenzwertbegriff, sondern den Begriff „Unendlichkeit“ im Fokus haben. Der Grund dafür ist, wie wir später noch genauer sehen werden, dass der Begriff „Unendlichkeit“ unweigerlich mit dem Begriff „Grenzwert“ verbunden ist und dieser eine große Hürde für das Verständnis darstellt. Eine Anmerkung noch: Die angegebenen Seitenzahlen beziehen sich jeweils auf den gerade vorgestellten Artikel bzw. auf die vorgestellte Studie - zwecks besserer Lesbarkeit wird der jeweilige Autor nicht dazu angeführt.

4.2.1. Tall D. & Schwarzenberger R. (1978): Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits

Die Autoren gehen in diesem Artikel auf Schwierigkeiten und Probleme beim Lernen und Verstehen von „real numbers“ und „limits“ ein, welche durch bewusste sowie unbewusste Konflikte entstehen können. Diese Schwierigkeiten bzw. Konflikte wurden teils schon im Kap. 4.1. (siehe S. 50ff) angeschnitten.

Ein grundlegendes Problem stellt für die Autoren die Wissensvermittlung zwischen Lehrperson und Schüler/innen dar; „this translation process contains two opposing dangers“ (S. 1): Auf der einen Seite bedeutet eine Anpassung des Lehrstoffs an das den Schülern/innen entsprechende Niveau meist einen Verlust an Präzision bzw. präziser Ausdrucksweise. Damit können aber gerade wichtige Details verloren gehen, was ein Verstehen der Begriffe etc. schwieriger macht. Auf der anderen Seite ist die Verwendung einer nicht präzisen Ausdrucksweise bzw. einer, wie Tall & Schwarzenberger sie bezeichnen, „informal language, [which] may contain unintended shades of colloquial meaning“ (S. 1), mit der Gefahr verbunden, dass die Schüler/innen diese verschiedenartig interpretieren, und dies gerät oft zum Nachteil.

Als Beispiel führen sie die Definition der Konvergenz einer Folge an (S. 1f):

The definition that a sequence (s_n) of real numbers tends to a limit s is:
Given any positive real number $\varepsilon > 0$, there exists N (which may depend on ε) such that $|s_n - s| < \varepsilon$ for all $n > N$.
An informal translation is: We can make s_n as close to s as we please by making n sufficiently large.

Die Folge davon ist ein Verlust an Präzision: „[…] we have not specified how close, or how large, nor the relationship between the unmentioned ε and N" (S. 2). Dies kann zu einer gewissen Unsicherheit auf Seiten der Schüler/innen führen, vor allem wenn sie sich ausschließlich auf einen Teil des Satzes konzentrieren, z.B. „What does the phrase ‚as close … as we please' mean?" (S. 2). Die Autoren geben zu bedenken, dass die Tatsache, dass die Folge s_n für gewöhnlich ihren Grenzwert s nie erreicht, bei den Schülern/innen ein unsicheres Gefühl hervorrufen kann: „[…] a feeling of repulsion that may extend to the limit process itself, giving the learner the uneasy feeling of lack of completion and repose, as if it were all a piece of mathematical double-talk, having no real-life meaning" (S. 2).
In diesem Zusammenhang erwähnen Tall & Schwarzenberger die Wichtigkeit einer für die Schüler/innen passenden Motivation bzw. dass jene Art der Motivation, „which the sophisticated onlooker can see is a simple form of what is to come, but the learner, without the later experience, sees only as something foreign to his current ideas" (S. 3), vermieden werden sollte.

Des Weiteren legen die Autoren einen sorgsamen Umgang mit dem Begriff „Unendlichkeit" bzw. dem Symbol „∞" nahe. Denn aufgrund der Antworten, welche Studenten bei einer Umfrage in ihrer ersten Studienwoche gegeben hatten, kommen die Autoren zu dem Schluss: „[…] students can develop weird ideas about infinity" (S. 5). Sie geben auch einen Auszug der Antworten an (S. 5):

- Infinity is a concept invented in order to give an endpoint to the real numbers, beyond which there are no more real numbers.
- A symbol to represent the unreachable.
- The biggest possible number that exists.
- A number which does not exist, but is the largest value for any number to have.
- The idea of a last number in a never ending chain of numbers.

4.2.2. Fishbein et al. (1979): The Intuition of Infinity

In dieser Arbeit versuchten die Autoren zwei Hypothesen nachzugehen (S. 6):

1) It was supposed that the concept of infinity (and specifically of infinite divisibility) is intuitively contradictory. Consequently, it was hypothesized that the answers would fall into two opposite categories, one supporting the idea of infinite divisibility of an interval and the other rejecting it.
2) It was supposed that neither age nor the teaching process would significantly influence the nature of genuinely intuitive answers. Consequently, we hypothesized that the frequencies of the main categories of answers would remain relatively stable across age and grades.

Dazu wurden 470 Schüler/innen aus *primary* und *junior high school* (entspricht 5. bis 9. Schulstufe, also Alter 10 – 16 Jahre) getestet: „The test consisted of 10 items in questionnaire form, which each class received in one session. The items referred to the divisibility of segments, transfinite cardinals and limits“ (S. 7). Items (1), (4), (5), (6) und (10) möchte ich als Beispiele (im Original) anführen (siehe S.7 ff):

„*Item (1):* We divide the segment AB into two equal parts (Figure 1). Point H is the midpoint of the segment. Now we divide AH and HB. Points P and Q represent the midpoints of the segments AH and HB, respectively. We continue dividing in the same manner. With each division, the fragments become smaller and smaller. Question: Will we arrive at a situation such that the fragments will be so small that we will be unable to divide further? Explain your answer.“

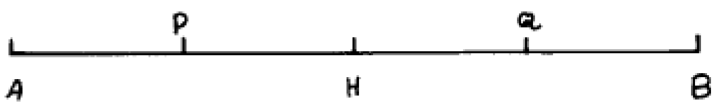


Fig. 1.

Abb. 8: „Fig. 1.“ zu „Item (1)“ (S. 7)

„*Item (4):* Consider the set of natural numbers $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ and the set of even numbers $\mathbb{D} = \{2, 4, 6, 8 \ \ldots\}$. Question: Which of the two sets contains more elements? Explain your answer.“

„*Item (5):* C is an arbitrary point somewhere on segment AB (Figure 4). We divide and subdivide segment AB as we did in question 1. Question: Will we arrive at a situation such that one of the points of division will coincide with point C? Explain your answer.”

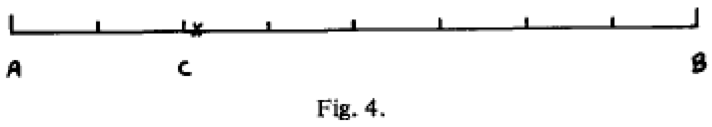


Abb. 9: „Fig. 4.“ zu „Item (5)“ (S. 8)

„Item (6): Let us consider a segment AB whose length is 1 cm and a square whose side is 1 cm (Figure 5). Question: Is it possible to find a point of correspondence on the segment for each point on the square? Explain your answer.”

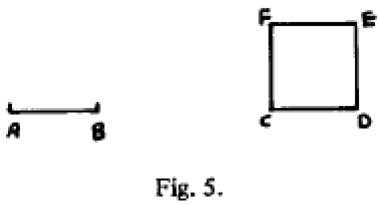


Abb. 10: „Fig. 5.“ zu „Item (6)“ (S. 9)

„Item (10): (10a) ABC is an equilateral triangle. Divide each side into 2 equal parts and label the midpoints A_1, B_1 and C_1. Let us consider the triangle A_1, B_1, C_1, and let us label the midpoints of its sides A_2, B_2, and C_2 (Figure 9). Continue the process in the same manner. Question: Does this process come to an end? (10b) What will be the area of the final Figure?”

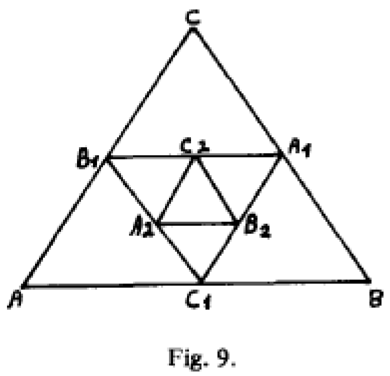


Abb. 11: „Fig. 9.“ zu „Item (10)“ (S. 10)

Die Ergebnisse und Antworten der Schüler/innen zeigen, dass bei ihnen gewisse kognitive Konflikte bezüglich ihrer Vorstellungen und Konzepte zu „Unendlichkeit“ auftreten. Das schließen die Autoren aus den Antworten, welche nämlich nicht unbedingt eine „logische

Einheit“ bilden. Bei der Untersuchung der Argumente und Begründungen der Schüler/innen für ihre Antworten bemerkte Fishbein, dass „not all ‚finitist‘ answers are accompanied by ‚concretist‘ argumentations, and not all ‚infinitist‘ answers are accompanied by ‚purist‘ argumentations“ (S. 31). Als Beispiel nennt Fishbein die Frage Nr. 4, bei der zu beantworten ist/war, „ob die Menge der natürlichen Zahlen oder die Menge der geraden Zahlen mehr Elemente beinhaltet“, wobei rund 70 Prozent der Schüler/innen die Antwort gaben, dass die Menge der natürlichen Zahlen größer sei, mit der häufigsten Begründung, die Menge der natürlichen Zahlen beinhalte die Menge der geraden Zahlen. Diese Begründung könnte als trivial abgetan werden, meint Fishbein, sollte aber nicht, denn „logically, the natural answers should have been, ‘both sets are constituted of an infinity of elements’ (again, supposing that the subjects have no idea of the different powers of transfinite cardinals, but have an elementary intuition of infinity)“ (S. 31).
Die Anzahl der „infinitist answers“ schwankt beträchtlich bei den verschiedenen Fragen, und so kommen die Autoren zu der Folgerung:

> These huge discrepancies prove, as has been said, that the natural intuition of infinity is highly labile, depending on conjectural and contextual influences. *The lability of the intuition of infinity can be explained if admitting its intrinsic contradictory nature as a psychological reality.* (S. 32)

Dies bestätigt insofern die erste Hypothese.
Ebenso konnte die zweite Hypothese aufgrund der Ergebnisse bestätigt werden. Die Verteilung der Antworten („finitist“ oder „infinitist“) waren in allen Jahrgangsstufen, speziell ab „grade 7“ (also 12-13 Jahre), sehr ähnlich und stabil (vgl. S. 32). Es lässt sich also durchaus behaupten, dass ab einem bestimmten Alter eine gewisse Stabilität, vielleicht sogar Resistenz, ausgeprägt ist, auch gegenüber Einflüssen im Mathematikunterricht. Diese sicher wichtige Erkenntnis bestätigt sich gewissermaßen in der von z.B. Sierpinska (1987) aufgezeigten Notwendigkeit eines „mental conflict“, oder von Nussbaum & Novick (1982, zit. nach Williams 1991) vorgeschlagenen Nutzung eines „exposing event“ sowie „discrepant event“, also die Erzeugung eines „guten“ Problems, um so einen Lernprozess anzuregen.
Fishbein et al. geben noch einen interessanten Hinweis, welcher sich für die Autoren aus der zweiten Hypothese ergibt:

> The intuition of infinity means what we really feel as being true or self-evident concerning the magnitude (the numerosity, the power) of infinite sets, and not what we accept as being true as a consequence of a logical, explicit analysis. This means that the concept of infinity may develop itself by the instructional process, while the intuitions of infinity may remain unchanged, starting with age 12. (S. 33)

Es ist also durchaus möglich, (m)eine ursprüngliche Intuition bzw. Meinung beizubehalten und trotzdem andere Konzepte, welche dazu konträr sind, weiterzuentwickeln. Dies kann sich sowohl negativ als auch positiv auswirken, es ist wichtig und förderlich, sich dessen bewusst zu sein.
Die Schwierigkeit, unsere intellektuellen Schemata mit (dem Konzept) „Unendlichkeit“ in Einklang zu bringen, liegt darin, dass diese auf unseren Erfahrungen in der Realität aufbauen („genuinely built on our practical, real life experience“, S. 3) und wir dort nur mit begrenzten und endlichen Objekten konfrontiert sind. So gelangen die Autoren in ihrem Artikel zu den Schlussfolgerungen (vgl. S. 37 ff):

- „Unendlichkeit“ erscheint unserer Intuition als widersprüchlich und gegensätzlich.
- Veränderungen und Fortschritte der Intuition, bezogen auf „Unendlichkeit“, konnten nur in dem Alter zwischen elf und zwölf Jahren beobachtet werden (innerhalb des Fragebogens).
- Der reguläre Mathematikunterricht beeinflusst nur das formale und „oberflächliche“ („superficial“) Verstehen des Konzepts „Unendlichkeit“, nicht aber die Intuition, das Grundverständnis. Stattdessen verstärkt der Unterricht systematisch die aktuellen logischen Schemata, welche allerdings aufgrund der Intuition auf endlichen Objekten gründet.
- “Without adequate intuitions and without resorting to an adequate mathematical control, [the before taught] consistency may degenerate into blind rigidity.“ (S. 39)

4.2.3. Tall D. (1980): Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes

Da in diesem Artikel Tall von diversen Erkenntnissen und Ergebnissen zu diesem Thema berichtet, welche er aus anderen älteren bzw. (damals) noch nicht veröffentlichten Artikeln zusammengefasst hat, wurden diese Ergebnisse bereits bei der Vorstellung der Artikel Tall & Schwarzenberger (1978) und Fishbein et al. (1979) dargestellt. Ich möchte nur kurz auf einen Punkt eingehen, der sich nicht in den eben genannten Artikeln befindet.
Tall berichtet über das Ergebnis eines Fragebogens (mit anschließender Diskussionsrunde), welchen er bei 42 Studenten/innen ausgeteilt hatte. Dabei kam zum Vorschein, dass es keiner von diesen für notwendig hielt, zwischen „potentieller“ und „aktualer“ Unendlichkeit zu unterscheiden. „Modern set theory, with that all important set $\mathbb{N}$, has retrained our intuition“ (S. 7), gibt Tall als eine Art Begründung an. Das wird in der Folge insofern zu

einem Problem, da beide „Denkkonzepte“ vorhanden sind, dies aber nicht registriert wird und so bei vielen Studenten/innen zwar Mengen als „aktual unendlich“ gegeben akzeptiert werden, jedoch ein Prozess „nur“ als „potentiell unendlich“ gesehen wird. Potentielle Unendlichkeit wird gewissermaßen als Realität aufgefasst und akzeptiert, aber „aktuale Unendlichkeit“, wenn überhaupt, als mathematische Fiktion (vgl. S. 7).

4.2.4. Sierpinska A. (1987): Humanities Students and epistemological Obstacles related to Limits

Das Ziel dieser Studie war in erster Linie, didaktische Situationen auszuarbeiten und gleichzeitig auch zu erproben, welche Schülern/innen helfen könnten, ihre „epistemological obstacles“, bezogen auf Grenzprozesse und –werte, zu überwinden und dabei auch eventuell auch weitere Hinweise für die Arbeit mit Schülern/innen zu bekommen. Sierpinska nennt dazu anfangs eine Liste dieser „epistemological obstacles related to limits“ an (S. 371):

- Scientific knowledge
- Infinity
- Function
- Real number

Die Autorin gibt an, dass vor allem die Präsentation des Beispiels bzw. das Ergebnis $0,\dot{9} = 1$ die Aufmerksamkeit der Schüler/innen erregte und im Zuge einer Diskussion folgende Schüler/innen-Ansichten festgestellt werden konnten (vgl. S. 378f):

- Eine Schülerin verweigerte das Ergebnis samt Beweis mit den Worten: „Oh, but here it doesn't hold! ... Because it's infinity... (It's like the other day, we had that approaching one, nearly…)“ (S. 378). Sie sieht „Unendlichkeit“ als Problem und Hindernis an.
- Der Beweis wird als richtig angesehen bzw. als mathematisch nachvollziehbar, jedoch wird das Ergebnis zurückgewiesen: „Arithmetically or algebraically, it's all right, but in reality... It will be close to one but will not equal one. There will be a slight, very slight difference, but a difference all the same… […]“ (S. 378). Unendlichkeit wird hier (nur) als potentielle Unmöglichkeit gesehen – „something that cannot ever be completed“. Es findet eine Unterscheidung zwischen realer und mathematischer Welt statt, wobei auf die reale Welt, die „wirkliche Realität“, mehr

vertraut wird und diese schließlich über die mathematische gestellt wird; so werden die Beispiele immer noch mit der realen Welt abgeglichen.

- Schüler/innen, welche die Mathematik als „unpersönlich“ und „formal“ betrachten, akzeptieren $0,\dot{9} = 1$ samt Beweis und Ergebnis im Gegensatz zu jenen Schülern/innen, welche das mathematische Ergebnis nicht als „endgültiges“ sehen, sondern noch über den Wahrheitsgehalt in der realen Welt diskutieren. So machte ein Schüler eine interessante Aussage: „[...] accepting the equality would be refusing the existence of infinity […] there will always be that number epsilon between 1 and zero nine nine nine“ (S. 380).

In weiterer Folge und aufgrund der Analyse der Unterrichtssequenzen unterscheidet Sierpinska verschiedene Typen von Einstellung zur Mathematik (siehe S. 382):

- *„the intuitive empiricist attitude“*: Bei dieser Einstellung werden nur absolute Wahrheiten („absolute truths“) akzeptiert, wobei sich die Mathematik an wissenschaftlichen Untersuchungen halten und orientieren soll und somit die mathematischen Axiome und Theorie intuitiv zugänglich und in der realen Welt nachvollziehbar sind. Abstraktheit wird gewissermaßen vermieden.
- *„the discursive formalist attitude“:* Diese beinhaltet die Überzeugung, dass Mathematik ein „formal game on symbols devoid of meaning“ ist. Mathematisches Wissen lässt sich so rein durch Überlegungen und Analysieren schaffen, solange es rational logisch erscheint.
- *„the discursive empiricist attitude“:* Sierpinska beschreibt noch eine dritte Einstellung, welche sich zwischen den beiden anderen einordnen lässt. Dabei sind die Probleme und Motive in der Weiterentwicklung eben aus dem (Alltags-)Leben zu entnehmen. Diese Sichtweise beschreibt sie auch als die „Lakatosion view“ (Sierpinska an Lakatos orientiert): „Mathematics is a hypothetico-deductive science but the source and motive of its development rests in problems, bold hypotheses, the verification of these and applications in the real world and in mathematics itself“ (S. 382).

Eine wesentliche Folgerung dabei ist, dass der „intuitiv empiricist“ sehr praktikabel denkt: „The principal that wins, is that supported by the largest numbers of examples“ (S. 383). Gegenbeispiele sind somit keine Notwendigkeit, ein Theorem zu verwerfen oder zu überarbeiten. Darüber hinaus zeigt sich kein Bedürfnis nach Beweisen, denn wie ein Schüler sagt: „[…] there is nothing to prove, it is obvious […]“ (S. 383). Sierpinska schreibt dazu: „Practical knowledge does not call for justification – it works“ (S. 383).

Insgesamt können zwei Punkte in dieser Studie herausgestrichen werden:

1) Sierpinska stellt fest, dass sich bei den Einstellungen der Schüler/innen, bezogen auf Mathematik, verschiedene Typen unterscheiden lassen und arbeitet diese auch heraus.
2) Für Sierpinska ist diese Einstellung maßgeblich für den Umgang mit mathematischem Wissen und mathematischen Begriffen seitens der Schüler/innen: „It seems that the students' attitudes towards knowledge, and mathematical knowledge in particular, have a strong impact on their intuitions of infinity and limits“ (S. 382). In ihrem Resümee gibt sie an, dass „some attitudes towards scientific and, in particular, mathematical knowledge turned out to very serious obstacles“ (S. 395). Somit kann es der Fall sein, dass manche Sichtweisen und Einstellungen nicht nur das Lernen und das damit verbundene Wissen beeinflussen, sondern sogar ein Hindernis darstellen können.

4.2.5. Williams S. (1991): Models of Limit Held by College Calculus Students

Ziel dieser Studie war es zu dokumentieren, wie Studenten/innen das „limit concept“ verstehen und welche Faktoren ihre Verständnis beeinflussen („students' understanding of the limit concept and the factors affecting changes in that understanding“ – S. 219). Dazu wurde bei einem Vorprozedere an 341 Studenten/innen ein Fragebogen („short one-page questionnaire about limits“) ausgeteilt. Dieser war so arrangiert/konzipiert, dass die Autoren durch die Antworten der Studenten/innen auf deren Sichtweisen schließen konnten (obwohl es sich um Studenten/innen handelt, lassen sich die Ergebnisse teils wohl auch auf Schüler/innen übertragen, da die Studenten/innen damals vor kurzer Zeit noch Schüler/innen waren).

Bei Frage 1 (siehe Abbildung 12 unten) waren sechs Antwortmöglichkeiten gegeben: Neben der formal richtigen Aussage (c) beschrieb die Aussage (a) den Grenzwertbegriff als „dynamic-theoretical“, (b) als „acting as a boundary“, (d) als „unreachable“, (e) als „acting as an approximation“, und (f) als „dynamic-practical“ (vgl. S. 221).

A. Please mark the following six statements about limits as being true or false:

1. T F A limit describes how a function moves as x moves toward a certain point.
2. T F A limit is a number or point past which a function cannot go.
3. T F A limit is a number that the y-values of a function can be made arbitrarily close to by restricting x-values.
4. T F A limit is a number or point the function gets close to but never reaches.
5. T F A limit is an approximation that can be made as accurate as you wish.
6. T F A limit is determined by plugging in numbers closer and closer to a given number until the limit is reached.

B. Which of the above statements best describes a limit as you understand it? (Circle one)

1 2 3 4 5 6 None

C. Please describe in a few sentences what you understand a limit to be. That is, describe what it means to say that the limit of a function f as $x \to s$ is some number L.

Abb. 12: „Questionnaire questions from Phase 1 of the study“ (S. 221)

Aus diesen 341 Studenten/innen wurden schlussendlich 10 für die zweite Phase der Studie ausgewählt. Diese wurden aus dem Grund ausgewählt, weil „their questionnaires were judged to most clearly and unambiguously present one of the informal viewpoints“ (S. 222). Die zweite Phase erstreckte sich über sieben Wochen, wobei sich die Studenten/innen und Forscher für fünf Einheiten trafen.

Aufgrund der Analyse der zwei Phasen kommt Williams zu folgenden Einsichten und Schlussfolgerungen.

Ergebnis der quantitativen Studie (Ergebnistabelle)

Table 1

Percentages of Subjects Indicating Each Statement as True, False, or Best on the Initial Questionnaire

Question Number[a]	Statement type	Original sample (N = 341)			Students indicating statement 3 as true (n = 226)		
		True	False	Best	True	False	Best
1	Dynamic-Theoretical	80	19	30	82	18	29
2	Boundary	33	67	3	28	72	2
3	Formal	66	31	19	100	0	29
4	Unreachable	70	30	36	65	35	31
5	Approximation	49	50	4	53	46	3
6	Dynamic-Practical	43	57	5	45	55	5

Note. In some rows, responses for true and false do not sum to 100% because of nonresponses. Responses for best statement do not sum to 100% because of nonresponses.

[a]Question statements are given in Figure 1.

Abb. 13: „Table 1" - Ergebnistabelle (S. 225)

Idiosyncratic Variations in Limit Models

Die Ergebnisse zeigen, dass die Studenten/innen eine große Bandbreite an Vorstellungen (bezogen auf Grenzprozesse und Grenzwertbegriff) haben. Dementsprechend verschieden sind ihre Ansichten, welche „Wissensfakten" für sie akzeptabel sind und zur Kenntnis nehmen – sprich was als mathematisch wahr gesehen wird.

Mathematical Truth

Im Vorfeld nahm Williams an, dass es für Studenten/innen möglich sei, sich für ein „model of limit" zu entscheiden, welches quasi das „Beste" ist, weil die Studenten/innen es erkennen und es schätzen können: „[…] that students would be able to pick a best statement or model of limit and to appreciate that such a statement would provide a maximally useful and correct set of implication" (S. 232). Dies stellte sich jedoch als falsch heraus, denn die einzelnen Studenten/innen hielten verschiedene Aussagen für wahr (bzw. falsch) und machten es vom jeweiligen Beispiel abhängig, was für sie mathematisch wahr sei (vgl. S. 232). Eine mögliche Begründung sieht Williams darin, dass Studenten/innen eher geneigt sind, Gegenbeispiele als Ausnahmen zu sehen und nicht als Gründe, ihre Sicht oder Meinung zu ändern bzw. als „incomplete concept" zu verwerfen und zu überarbeiten.

Aspects of Limit Models Valued by Students & Conclusions

In der Folge wird herausgearbeitet, dass Studenten/innen den einfacheren Weg bevorzugen. Die Studenten/innen können viele bzw. genügend Beispiele mit „ihren" Modellen bewältigen und tendieren dazu „to favor the view of limit that was expedient", wobei Williams dazu ein prägnantes Zitat anführt: „I just learned enough to get the problems done, I'd say" (S. 233).

Williams schreibt resümierend:

> Specifically, students' views of mathematical truth, the value they place on practicality and simplicity in models of limit, the everyday demands of calculus class, their previous experience graphing functions, and their faith in the a priori existence of graphs combine to make it difficult for them to appreciate the need for a more formal definition of limit. These attitudes toward pragmatism and mathematical truth are similar to those that are widely believed to be held by students of all ages, and develop over years of schooling. The end result for the students in this study is a lack of appreciation for formal thinking, which effectively removed any motivation to learn what is, after all, a very formal definition of limit. (S. 235)

Die Studenten/innen lernen oder schaffen es nicht wirklich, die nötige Motivation aufzubringen, um die formale Definition zu schätzen. Deswegen sieht er eine Chance, sich über historische Pfade der Sache zu nähern. So gibt er an, dass die „informal limit models" der Studenten/innen denen der „mathematical community prior to Cauchy" ähneln und vielleicht die Probleme, welche Cauchy motiviert haben, eben auch die Studenten/innen motivieren könnten: „Perhaps this is to say that the very historical and cultural contexts that lent vitality to the original work are the best medium through which to approach the understanding of that work" (S. 235). Wichtig erscheint Williams dabei, die Studenten/innen zu erreichen und deren Einstellungen in Bezug auf mathematisches Wissen zu ändern, denn „[…] such attitudes play a major role in learning and cannot profitably be ignored" (S. 235f).

4.2.6. Bender P. (1991): Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten

In diesem Artikel analysiert Bender - „unter der Berücksichtigung der Literatur über die empirische Forschung" - Fehlvorstellungen und –verständnisse (FVV), welche Schüler/innen bei den Begriffen „Folgen" und „Grenzwerte" haben können (S. 238). Er geht dabei auf einige Punkte und didaktische Probleme ein, wovon ich jene vorstellen und erläutern werde, welche für meine Arbeit von Interesse sind.

Zuvor sei noch kurz die Hauptthese seiner Arbeit vorgestellt, welche lautet, „dass diese sog. dynamische Auffassung von Folgen […] mit verantwortlich ist für verbreitete Fehlvorstellungen und –verständnisse (FVV) vom Begriff des Grenzwerts“ (S. 239). Bender stellt aber klar, dass die These relativ gesehen werden muss und daraus nicht gefolgert werden darf, die dynamische Sichtweise „gänzlich zu eliminieren, die ja als Einstieg und bei Anwendungen überaus erfolgreich ist“ (S. 239). So ist es seines Erachtens die Hauptaufgabe des Analysis-Unterrichts, die Lernprozesse der Schüler/innen geschickt zu steuern und die dynamischen Vorstellungen je nach Situation auszuschalten bzw. zuzulassen.

Formalismus und Sprechweisen

Zuerst macht Bender auf die symbolische, formale Schreibweise aufmerksam, wobei für ihn „das gehäufte Auftreten von Quantoren und deren Reihenfolge sowie das Auftreten von Ungleichungen mit Beträgen den Zugang“ (S. 239) offenbar erschweren. Dieses mit der formalen Definition des Grenzwerts zusammenhängende Hindernis geben auch andere Autoren an, Bender selbst beruft sich dabei auf einen Artikel von Herden et al. (1984: Eine Untersuchung zur Diskussion über Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff).
Um der Problematik der formalen Schreibweise zu entgehen, schlägt Bender die „günstigere“ verbale Definition „… falls in jeder noch so kleinen Umgebung von a ein Hauptstück der Folge liegt“ vor (S. 239). Es geht ihm vor allem darum, die Konzentration auf das „Wesentliche einer Folge“, nämlich „die Hauptstücke“ zu lenken, um geeignete Vorstellungen zu erzeugen. Dies sollte eben in Sprechweisen wie „… falls das Wesentliche der Folge in jeder noch so kleinen Umgebung von a liegt“ (S. 239) berücksichtigt werden, auch wenn es mathematisch ein wenig ungenau ist.

„Das letzte Glied einer Folge?“ vs. „Der Grenzprozess führt nicht zum Grenzwert!“

Die Schwierigkeiten sind aber nicht nur durch den Formalismus bedingt, sondern liegen für Bender offenbar tiefer, wobei er zur Veranschaulichung zwei FVV anführt.
Einerseits schreibt er:

> In [Davis & Vinner 1986] ist herausgearbeitet, daß bereits für den scheinbar einfachen Folgen-Begriff ungeeignete Vorstellungen vorliegen, die man i. w. darunter subsumieren kann, dass eine *Folge* ein *letztes Glied* (mit der Nummer ∞) hat oder dass man mit ihr zumindest ein solches erreichen kann […]. (S. 240)

Die Schüler/innen haben also die Fehlvorstellung, dass sie sich die Unendlichkeit als endlich vorstellen oder diese zumindest mit mathematischen Mitteln wie einer Folge erreichen

können. Für Bender liegt die Verantwortung hierfür bei einem kritiklosen Umgang mit „mathematischen Rede- und Schreibweisen“ und einer „unzureichenden Sorgfalt bei der Pflege“ der Grundvorstellungen, und er nennt als Beispiel die Approximation von π, bei der eben die Schüler/innen den Kreis, welcher approximiert wird, als letztes Folgenglied sehen könnten: „Da wird eine Folge von Polygonen betrachtet, die immer mehr Ecken haben, bis sie schließlich zum Kreis werden“ (S. 240). Dies ist natürlich nie der Fall - die Folge bleibt stets eine Näherung an den Kreis - jedoch können die Schüler/innen leicht einen anderen Eindruck bekommen, denn die Folge, der Grenzprozess ist ja das Mittel, um an den Grenzwert zu gelangen. Hier ist vor allem die Lehrperson gefragt und gefordert, denn „auch die verbale Beteuerung, daß man den Grenzwert nicht erreicht, verhindert nicht die Vorstellung, dass er am Ende der Folge steht, da ja das ganze Unterrichtsgeschehen genau dieses nahelegt“ (S. 240).
Andererseits bespricht Bender das von Blum & Törner aufgezeigte Problem der „Doppelnatur“, welche eine dynamische Vorstellung des Grenzwertbegriffs mit sich bringt: „$lim \cdots$ ist eine Anweisung zur Durchführung eines Grenzwertprozesses und zugleich dessen Resultat“ (S. 240). Als Beispiel dient hier $\frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots$. Mit dieser Doppelnatur ist der/die erfahrene Mathematiker/in natürlich vertraut, sie ist „eine gängige und nützliche Auffassung“ schreibt Bender, aber sie kann bei den Schülern/innen versagen, „wenn die Anweisung mit dem Durchlaufen einer (unendlichen) Folge verbunden ist“ (S. 240). Ein Grenzwertprozess ist eben ein unendlicher Prozess. So kann eine periodische Dezimalbruchentwicklung - als Folge (!) aufgefasst - natürlich immer weiter fortgesetzt werden, und es entsteht jeweils eine neue Zahl. Bender gibt so gesehen den Schülern/innen Recht, „wenn sie sich weigern, die Gleichheit $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ bzw. die noch paradoxere $0,\overline{9} = 1$ zu akzeptieren“ (S. 240).

„Verniedlichung“ (bzw. Unterschätzen) der Unendlichkeit

Die Formulierung „Verniedlichung der Unendlichkeit“ verwendet Bender so nicht, er kommt aber auf verschiedene Weise darauf, dass Schüler/innen (und manchmal auch Lehrpersonen) geneigt sind, die Unendlichkeit zu unterschätzen.
Das „Monster Unendlichkeit“ bekommt man mit einer liegenden Acht einfach in den Griff, zumindest hat es den Anschein, dass dies der Fall ist. Aber es sollte den Schüler/innen dennoch die Tragweite vor Augen geführt bzw. ein Bewusstsein dafür geschaffen werden, dass diese „liegende Acht“ eine bedeutende Errungenschaft ist, welche sorgsam und ge-

bührlich zu behandeln ist. So gibt Bender an, dass „das Durchlaufen einer Folge […] den Schülern in der S1 zu einem Erlebnis gemacht werden (muß) […] und zwar zunächst in ℕ" - Schreibt man die Zahlen der Reihe nach auf, wird einem auffallen, dass man irgendwann in Bereiche gelangt, „wo man ein ganzes Buch braucht, um (eine einzelne Zahl) im Zehnersystem aufzuschreiben" (S. 241). Der springende Punkt hierbei ist, dass den Schülern/innen verdeutlicht werden muss, dass die bereits aufgeschriebenen Zahlen, wieviele auch immer, nichts im Vergleich zu dem sind, was noch fehlt.
Des Weiteren wird laut Bender in der Schule „mit dem ‚Wert' ∞ recht großzügig umgegangen", beispielsweise bei Notationen: „Schreibweisen wie $>lim_{n \to \infty}<$ mit dem Spezialfall $>\sum_{k=0}^{\infty} <$ unterstützen die Vorstellung vom letzten Element" (S. 241). Dies kann mitverantwortlich für ungenügende Grundvorstellungen sein, welche sich dann weiter bemerkbar machen. So ist die „unterschwellige Überzeugung, dass ∞ eine Art letztes Element einer Folge sei" (S. 240) auch bei Lehramtsstudenten/innen zu finden, welche seines Erachtens eben auf ungenügende Grundvorstellungen aus der Schule zurückgeht.

4.2.7. Vom Hofe R. (1998): Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse

In der Einleitung gibt vom Hofe einen Vorausblick des Inhalts: „Anhand einer exemplarischen Fallstudie über eine Unterrichtsszene, in der sich drei Schülerinnen in einer computergestützten Lernumgebung mit dem Grenzwertbegriff auseinandersetzen, werden Probleme der Begriffsbildung aufgezeigt, die in geistigen Hindernissen bzw. ‚epistemological obstacles' begründet sind […]" (S. 257). Die genannte Unterrichtsszene ergab sich aus der Notwendigkeit einer außerordentlichen Doppelstunde, um Begriffsdefizite der Schüler/innen, bezogen auf Differenzen- und Differentialquotienten, auszugleichen.
Dazu wurde ein Arbeitsblatt an die Schüler/innen ausgeteilt, wobei der Differenzenquotient einer Exponentialfunktion in einer allgemeinen Form

$$m(x,h,b) = \frac{b^{x+h} - b^x}{h}$$

sowie in der Form

$$m(h) = \frac{2^{0+h} - 2^0}{h}$$

unter verschiedenen Arbeitsanweisungen betrachtet wurden (vgl. S. 263f).

Vom Hofe teilt die beobachtete Unterrichtspassage in drei „inhaltlich eng zusammenhängende Episoden", welche er einzeln betrachtet und analysiert. Jede Episode ist gewissermaßen von einer „Grundfrage" der Schüler/innen geprägt und vom Hofe filtert dabei verschiedene Beobachtungen und Probleme heraus.

1. Episode – Was ist eigentlich der Grenzwert?

Bei der Wiederholung der Begriffe „Differenzenquotient" und „Differentialquotient" weiß eine Schülerin nur wenig mit der Formulierung „Limes h strebt gegen null" anzufangen und stellt sich und ihrer Mitschülerin die Frage, was eigentlich ein Limes sei.

In der Folge entsteht ein interessantes Gespräch, da die Mitschülerin die Frage zu beantworten versucht, indem sie erklärt, wie man zum Grenzwert kommt: „ […] sie versucht also […] die Frage nach dem Grenzwert zu beantworten, indem sie den Grenzprozess beschreibt" (S. 268).

Aus diesem (wenn auch nur kurzen) Ausschnitt lässt sich entnehmen, dass der Prozesscharakter mehr im Vordergrund steht und auch bei der Beschreibung des Grenzwerts dominant ist. Des Weiteren werden durch das beobachtete Gespräch zwei grundlegende Problemfelder mathematischer Begriffsbildung erkennbar (S. 269):

„Der Gegensatz bzw. die Beziehungen

(1) zwischen geometrischer und rechnerisch-algebraischer Darstellungsform;
(2) zwischen Objekt- und Prozesscharakter bzw. zwischen statischer und dynamischer Betrachtungsweise."

Konkret auf den Grenzwertbegriff und auf (2) bezogen ist hier die Unterscheidung zwischen Grenzwertprozess und Grenzwert an sich gemeint. Vom Hofe meint, dass sich damit „ein tieferes Problem" erblicken lässt und spricht im Zuge dessen das „Verhältnis zwischen intuitiver Verstehensbasis und mathematisch-formaler Präzisierung" (bei Folgen und Folgengrenzwert) an, welches für ihn eine Art Spannungsverhältnis darstellt; er zeigt dieses mittels einer tabellarischen Gegenüberstellung auf (S. 269):

	intuitive Verstehensbasis	math.-formale Präzisierung
Folge	Aneinanderreihung von Elementen, in der Regel nach einer Gesetzmäßigkeit	Abbildung: $N \longrightarrow \Re$
Folgenkonvergenz	einem Ziel zustreben, sich beliebig verdichten	Konvergenzkriterien
Folgengrenzwert	das Ziel des Prozesses, das u. U. nie erreicht, aber als ideelle Vervollständigung gedacht wird; es verkörpert die Stelle der größten Verdichtung	Definition des Grenzwertes

Abb. 14: Tabellarische Gegenüberstellung (S. 269)

Vom Hofe kommentiert diese Gegenüberstellung folgendermaßen:

> Eine schwierige gedankliche Herausforderung für Lernende liegt dabei in folgendem Sachverhalt: Der Grenzwert ist in der Regel kein Bestandteil der Folge, er ist vielmehr die ideale Ergänzung (deren Existenz durch die Vollständigkeit der reellen Zahlen gesichert ist). Als ‚ideal' erweist sich dieses neue Element in doppeltem Sinne: Zum einen genügt es in optimaler Weise den oben genannten intuitiven Forderungen, zum anderen lässt es sich auf formaler Ebene als theoretisch wohlbestimmtes Objekt beschreiben. Die hinzugefügten idealen Objekte haben häufig andere mathematische Eigenschaften als die Folgenglieder: So kann etwa der Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen eine irrationale Zahl sein - und charakteristisch für eine Tangente, die sich als Grenzlage einer Sekantenfolge darstellt, ist gerade der Verlust der Sekanteneigenschaft. (S. 269)

2. Episode – Kann die Steigung null werden, wenn h beliebig klein wird?

Den Schülerinnen ist nicht ganz klar, was mit dem Grenzwert passiert bzw. der Steigung geschieht, wenn der Wert h immer kleiner wird. Sie diskutieren darüber, wie sich die Punkte (der Sekante) zueinander verhalten und inwiefern überhaupt noch eine Steigung existieren kann, da die Differenz der Punkte ja gewissermaßen dafür verantwortlich ist. „Aber wenn wir dann null machen, dann ist doch da eigentlich gar kein Punkt mehr, oder? Verstehste, da ist doch gar keine Differenz mehr", sagt ein Mädchen (S. 277).

Vom Hofe gibt zu verstehen, dass die Gedanken der Mädchen um eine Grundeinsicht kreisen, „um deren Präzisierung man in der Geschichte der Analysis wohl sehr lange gerungen hat und die sich etwa so artikuliert:

- Geometrisch: Zwei aufeinander zu laufende Punkte können eine wohl bestimmte Grenzrichtung bzw. eine entsprechende Grenzgerade festlegen.

- Arithmetisch: Eine Quotientenfolge mit gegen Null konvergierenden Nennern kann gegen einen wohlbestimmten endlichen Wert konvergieren.“ (S. 278)

3. Episode - Warum kann man für h nicht null einsetzen?

Diese Frage ergab sich aus der Fortsetzung der Überlegungen zu der Frage aus Episode 2. Wie soll jemals die Tangentensteigung „erreicht“ werden, wenn die zwei Punkte nicht zusammenfallen dürfen?

Zusammenfassung

In seiner Zusammenfassung zeigt sich vom Hofe vom Verhalten bzw. der Arbeitshaltung der Schüler/innen überrascht und beeindruckt - vor allem, wie sie sich mit den Problemen, welche eigentlich rein innermathematisch motiviert sind, auseinandersetzen. So hatten die Mädchen keinerlei Scheu sich den Problemen zu stellen, mit ihnen im wahrsten Sinne des Wortes zu hadern und zu kämpfen. Dabei fällt vom Hofe auf, dass es sich bei den Problemen um grundlegende, übergeordnete Probleme handelt, welche „in der Sachstruktur und der Epistemologie der behandelten Begrifflichkeiten begründet sind […]“ und die um „die Intuition des Unendlichen und ihre mathematische Präzisierung“ kreisen (S. 286).

Insgesamt zeigen sich für vom Hofe bei der Analyse seiner Dokumentationen „wesentliche Problemfelder […] im Gegensatz bzw. in den Beziehungen zwischen

- graphischer und rechnerischer Repräsentation mathematischer Inhalte,
- Prozess und Objekt,
- statischer und dynamischer Auffassung,
- intuitiver Vorstellung und begrifflicher Präzisierung.“ (S. 286)

In diesem Zusammenhang plädiert vom Hofe dafür, solchen Themen im Unterricht mehr Raum zu geben und sich nicht vom Leistungsniveau der Schüler/innen leiten zu lassen, sondern unabhängig davon, einen „reflektierenden Umgang mit Problemen dieser Art“ zuzulassen. Er beendet seinen Artikel mit drei kurzen Thesen, wovon ich erstere abschließend zitieren möchte:

> Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse: Lernen im Sinne des genetischen Prinzips setzt das Aufwerfen, Durchdenken und Überwinden von geistigen Hindernissen voraus. Es ist nach wie vor eine wichtige Aufgabe der Mathematikdidaktik, Lern- und Übungsformen hierfür zu entwickeln und zu erproben. (S. 288)

4.2.8. Williams S. (2001): Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids

In diesem Artikel berichtet Williams abermals über die Ergebnisse seiner qualitativen Studie von 1991 (siehe Williams 1991). Diesmal wird der Blick allerdings speziell auf zwei Studenten geworfen bzw. versucht, deren „informal models of the limit“ zu beschreiben, um detailliertere Informationen zu bekommen (S. 341). Er arbeitet (auch) in Anlehnung an seinen früheren Artikel (Williams 1991) und andere Autoren wie z.B. Kaput oder Lakoff & Nunez diverse Punkte heraus, welche (für Schüler/innen und Studenten/innen) hinderlich für ein Erlernen und Verstehen des Grenzwertbegriffs sein können. Die drei (für mich und diese Arbeit) wesentlichen Punkte werden im Folgenden beschrieben.

1. Die mathematische Herangehensweise an eine Grenze bzw. einen Grenzwert unterscheidet sich stark von der natürlichen, der „cognitiv approach“ (vgl. S. 342*).***

Schüler/innen haben eine ursprüngliche Vorstellung (“primary meaning“) von dem Begriff Grenze bzw. Grenzwert. Williams sieht diese Ursprünge in „metaphorical extension from physical experience“ (S. 341), wie z.B. an einem Pfad entlang bewegen oder sich einer Mauer nähern. Er orientiert sich hier sowohl an Kaput, welcher diese Sicht teilt, und schreibt: „Kaput (1979), indeed, has suggested that it is the motion metaphor that gives the limit notion ‘its primary meaning’ (p. 294) and argues for the ‘basic, irreducible, and essential metaphoric nature of human thinking’ (p. 289)“. Des Weiteren orientiert er sich auch an Lakoff & Nunez, welche vor allem meinen, dass unsere Vorstellung und Anschauung zuerst einfach mit Bewegungen arbeitet bzw. verbunden ist.

Williams fasst das folgendermaßen zusammen und gibt noch einen interessanten Hinweis:

> The basic point here is that the mathematical approach to limit and the cognitive approach to limit are quite different. The mathematical approach, which makes use of universal and existential quantifiers, is designed to solve mathematical difficulties, not psychological ones. (S. 342)

2. Schüler/innen und Studenten/innen klammern sich an ihre Vorerfahrungen und halten an ihren ursprünglichen Ideen fest.

Wie schon zuvor beschrieben, haben Schüler/innen eine ursprüngliche Vorstellung von dem Begriff Grenze bzw. Grenzwert, wobei sie sich hier an ihren Vorerfahrungen (der physischen, realen Welt) orientieren. Das bewirkt, dass Schüler/innen und (später auch noch) Studenten/innen eine „dynamische Vorstellung“ von einem „Grenzwert von Funktionen“ haben, welche sich darin ausdrückt, dass man sich einem Grenzwert immer mehr

nähern kann. Williams konnte das auch bei seinen zwei Probanden beobachten und bemerkte, dass dieser natürliche Zugang, um Werte zu überprüfen, welche immer „closer and closer“ zum Grenzwert kommen, die Basis für ihr Verständnis bildet (vgl. S. 363).
Das doch ein wenig Besondere für Williams dabei war, dass die zwei Studenten ihre Sicht nicht aufgaben: „[…] even though the experimental sessions were specifically designed to create some cognitive discord with this notion, both continued to believe in it and still claimed it was their fundamental way of understanding limits“ (S. 364). Damit waren die beiden nicht allein, insgesamt blieben neun der zehn Studenten/innen (aus Phase 2 der Studie von 1991) bei der Überzeugung, eine dynamische Sichtweise des Grenzwerts sei „essentially correct“ (S. 364). Die Einstellungen und Ansichten der Studenten/innen waren aber nicht starr, denn Williams konnte sehr wohl eine leichte Veränderung feststellen. So entwickelte ein Student seine Sichtweise weiter, indem er Ausdrücken wie „getting close enough“ mehr Beachtung schenkte bzw. er sich mit dem Umstand beschäftigte, inwiefern sich eine solche Aussage überprüfen lässt.
Die Studenten/innen (und so auch Schüler/innen) halten an ihren Ansichten fest, weil es für sie einfach „funktioniert“ und sie es so am besten verstehen. Die Antwort eines Studenten auf die Frage „what it would take to make him give up the notion of limit he held“ führt uns das treffend vor Augen – er antwortete: „I don't know. That's just kind of the way I look at it. If you show me an easier way….“ (S. 363).

3. Die Rolle des Begriffs „Unendlichkeit“

Der Umgang mit dem Begriff „Unendlichkeit“ und das Wissen um und die Unterscheidung zwischen „potentieller“ und „aktualer“ Unendlichkeit spielen hier eine wesentliche Rolle. Denn bei einer dynamischen Sichtweise bleibt für Schüler/innen und Studenten/innen oft unklar, was die Ausdrücke, wie z.B. „erreichen“, „beliebig nahe kommen“ oder „immer näher und näher“, bedeuten und inwiefern der Grenzwert „wirklich“ erreicht wird. Williams führt dazu wieder seine zwei Probanden als konkrete Beispiele an:

> For both the notion of ‘reaching’ a limit carried some ambivalence. Both understood that continuous functions ‘reached’ their limits in the sense of taking on the limit value, but both still felt unsure whether, in the process of taking a limit, it was accurate to say that the limit was actually reached. (S. 364)

Dieses „Unwohlsein“ bzw. diese Unsicherheit beruhen auf der „conceptual difficulty of the notion of infinity, whether actual or potential“, wobei sich Williams hier auf einen Artikel

von Tirosh bezieht und schreibt weiter, „The notion of reaching a limit rests on the fundamental distinction between actual and potential infinity“ (S. 364).
Eine Auseinandersetzung mit den Begriffen „potentielle Unendlichkeit“ sowie „aktuale Unendlichkeit“ ist bei einer Beschäftigung mit Grenzprozessen somit notwendig, als auch unumgänglich, denn es führt kein Weg daran vorbei – „Actual infinity may thus be the most important cognitive obstacle to learning the formal definition“ (S. 364).

4.2.9. Monaghan J. (2001): Young Peoples’ Ideas of Infinity

In diesem Artikel geht es, wie schon der Titel erahnen lässt, um die Sichtweisen von Kindern und Jugendlichen zum Thema Unendlichkeit, bevor sie den mathematischen Umgang mit dem Begriff „Unendlichkeit“ kennenlernen. Die vier „main sections“ des Artikels beschäftigen sich mit

1) potential pitfalls for research in this area and the work of Piaget
2) issues concerning the contradictory nature of infinity and infinity as a process and as an object
3) infinite numbers
4) contexts and tasks

wobei die Punkte 1), 2) und 4) in Bezug auf meine Arbeit interessante Ergebnisse liefern und ich deswegen auf diese näher eingehen werde. (Bei den Ausarbeitungen und Folgerungen stützt sich Monaghan auf eine im Zuge des Artikels durchgeführte Umfrage sowie auf eine ältere Studie (Monaghan 1986), welche er bis dato allerdings noch nicht veröffentlicht hatte, und er fasst seine Ergebnisse mit dieser Veröffentlichung zusammen.)

Section 1: „potential pitfalls for researchers“

Monaghan arbeitet „potential pitfalls“ heraus, die sich ergeben können, wenn sich Forscher mit Kindern und Jugendlichen über (das Thema) „Unendlichkeit“ unterhalten, um deren Vorstellungen und Ideen dazu zu untersuchen bzw. zu verstehen. Diese „potential pitfalls“ sind nicht nur für Forscher zu beachten, sondern auch für Lehrpersonen interessant, da sich ja auch diese im Unterricht mit ihren Schülern/innen beschäftigen, sei es um eine Diskussion zu führen, eine Frage zu beantworten etc.
Ein ganz einfaches Problem stellt für Monaghan natürlich die Tatsache dar, dass wir alle in einer „apparently finite“ Welt leben und deswegen eine Unterhaltung über „Unendlichkeit“ oder eine Behandlung dieses Themas für manche Schüler/innen eben keinen Sinn macht.

Wirklich problematisch dabei ist die Situation, wenn eine Lehrperson nicht bemerkt, dass die Schüler/innen eigentlich desinteressiert sind und beliebige Antworten geben, nur um in Ruhe gelassen zu werden. Diese Antworten geben dann keinerlei Aufschluss über das Denken oder den wirklichen Wissensstand der Schüler/innen und die Folge ist, dass Lehrperson und Schüler/innen einfach aneinander vorbeireden, ohne dass es die Lehrperson merkt.

Als weiteres Problem sieht Monaghan die Sprache und Ausdrücke, welche im Gespräch mit den Schülern/innen verwendet werden. So werden Aussagen wie „going on forever“ oder „going on forever and getting an answer“ innerhalb der Mathematikfachschaft verwendet, ohne dass Erklärungsbedarf besteht, für die Schüler/innen aber sehr wohl. Monaghan schreibt dazu: „This is, I believe, because the mathematical world we 'live in' is a non-temporal world where infinite summations can be done without reference to time. This is strange and we should not forget that we are strange“ (S. 240). Aufgrund der unterschiedlichen mathematischen Vor- und Ausbildung, kurz: des mathematischen Wissens, bei Lehrpersonen und Schülern/innen ist verständlich, dass solche Aussagen unterschiedlich gesehen werden. Monaghan gibt dazu auch ein explizites Beispiel an:

> […] consider the question ‘Can you add 0.1 + 0.01 + 0.001 + . . . and go on forever and get an answer?’ Outside of the world of pure mathematics the answer is 'no' because you cannot go on adding forever - you would die (of boredom!). (S. 240)

Section 2: „issues concerning the contradictory nature of infinity and infinity as a process and as an object“

Monaghan kommt zu dem Schluss, dass die meisten Schüler/innen „Unendlichkeit“ primär mit einem Prozess in Verbindung bringen und als etwas sehen „which goes on and on“ (vgl. S. 244). Manchen Schülern/innen ist durchaus zuzusprechen, dass sie „Unendlichkeit“ als Objekt sehen, allerdings ist dieses Objekt für sie eine „sehr große Nummer“ oder etwas, das mehr als endlich viele Elemente enthält – so ist dieses Objekt nicht wirklich im Sinne eines „aktual Unendlichen“ zu interpretieren.

Die primäre Auffassung, „Unendlichkeit“ als eine Art Prozess zu sehen, befürwortet eine dynamische Interpretation mancher Fragestellungen bzw. ist verantwortlich dafür (vgl. S. 253). Damit ist das Problem verbundenen, dass diese Schüler/innen meinen, eine Addition könne zu keinem Ergebnis kommen, wenn sie nie ein Ende habe, auch nicht in der Form eines Grenzwerts. Ein weiteres Problem ergibt sich, wenn zwei Mengen verglichen werden; Monaghan führt hier als Beispiel die natürlichen Zahlen und die geraden Zahlen an.

Die Auffassung der Unendlichkeit als Prozess kann zu verschiedenen Antworten führen - „'Infinity as a process' as an evaluatory scheme can lead to diverse responses:

- Both go on and on, so there's the same in both
- Both go on and on, so we can't compare them“ (S. 246).

Section 4: „contexts and tasks“

Wie seitens der Schüler/innen mit den mathematischen Begriffen „Unendlichkeit“ und „Grenzwert“ umgegangen wird, ist abhängig von der Präsentation und dem Kontext einer Fragestellung. Monaghan (an der Literatur orientiert) zieht folgende Sichtweisen bzw. „contexts“ in Betracht, die einander gegenüberstehen: „numeric vs geometric“, „counting vs measuring“ und „static vs dynamic“ (S. 250ff):

TABLE I

Does the sequence 1, 0, 0.1, 0, 0.01, ... have a limit?		Does this curve have 0 as a limit?	
Yes	79	Yes	133
unsure	20	unsure	11
No	91	No	46

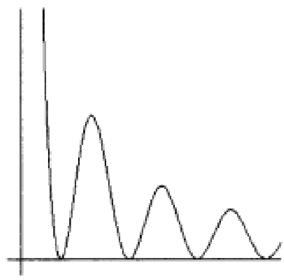


Abb. 15: „Table 1“ (S. 251)

„Numeric vs geometric contexts“

Bei einer geometrischen Abbildung wird ein Grenzwert oder eine Grenze eher erkannt, als diese(r) einer numerischen Zahlenfolge zugestanden (siehe Abbildung 15 oben). Gründe dafür sieht Monaghan, welcher sich bei der Begründung auch auf andere Autoren wie Piaget, Falk und Cornu bezieht, in den geometrischen Formen selbst: „That shapes suggest a finite real world and numbers suggest an abstract mathematical world, that approximate thinking is often acceptable in the real world, ‘it's near enough 0’, but often not acceptable in the world of number“ (S. 251).

„Counting vs measuring contexts"

„Counting contexts are generally evoked by discrete situations whereas measuring contexts are generally evoked by continuous situations", schreibt Monaghan dazu (S. 252). Eine wirkliche deutliche Aussage lässt sich dabei nicht angeben. Allerdings scheint es so, dass Schüler/innen (sowie Menschen im Allgemeinen) in einer „Zählsituation" eher geneigt sind, Unendlichkeit, in Form der potentiellen Unendlichkeit, in ihre Gedanken mit einzubeziehen. Bei einem Vergleich der beiden Zahlen-Folgen $1,2,3,4,\ldots$ und $2,4,6,8,\ldots$,also einer „Zählsituation", lassen die Schüler/innen eher die Möglichkeit zu, dass sich in beiden Folgen gleich viele Zahlen befinden. Hingegen bei der Frage „Befinden sich zwischen 0 und 1 oder 0 und 10 mehr Dezimalzahlen, oder sind es gleichviele?", welche in einen *measuring context* eingeordnet wird, tendieren Schüler/innen eher zu der Antwort „Es befinden sich zwischen 0 und 10 mehr Dezimalzahlen".

„Static vs dynamic contexts"

„Behind dynamic interpretations of infinite phenomena is the idea of infinity as a process" (S. 253), wobei Monaghan einräumt, dass es gar nicht so sehr um die Frage geht, wann welcher Kontextbezug gesetzt wird, sondern um die Interpretation selbst: „To see how this is a matter of interpretation rather than the question itself consider the question *What is* $\frac{1}{1-0,\dot{9}}$ *?*" (S. 253).

In einem *static context* existiert nicht die Vorstellung *„Es wird…"*, sondern *„Es ist…"*. So *ist* der Nenner $1-0,\dot{9}$ (im statischen Sinne) unendlich klein und daher *ist* „*the reciprocal infinitely large*" - im Gegensatz dazu *wird* im dynamischen Sinne *„the answer infinitely large"* (S. 253).

4.2.10. Lepmann L. & Lepmann T. (2008): Folgen – eine Einführung in unendliche Prozesse

In ihrem Artikel betrachten die Autoren „Zahlenfolgen und Möglichkeiten der inhaltlichen Herausbildung des Grenzwertbegriffs anhand der Erfahrungen der estnischen Schule" (S. 14). Im Zuge dessen besprechen Lepmann & Lepmann Schwierigkeiten, welche Schüler/innen bei einer Beschäftigung mit dem Grenzwertbegriff haben können. Da (für sie) der Grenzwertbegriff eng mit dem „Begreifen der unendlichen Mengen" verbunden ist, thematisieren sie auch den Begriff „Unendlichkeit" und stellen „Fehler der Schüler bei der Benutzung des Begriffs der Unendlichkeit und des Grenzwertbegriffs" vor (S. 14).

Der Begriff „Unendlichkeit“

Die Autoren gehen auf den Unterschied zwischen „potentiell unendlich“ und „aktual unendlich“ ein. Bei ersterem besteht eben nur die Möglichkeit, einen Prozess immer weiter fortzusetzen, bei zweitem wird dagegen davon ausgegangen, „dass eine unendlich große Menge und alle ihre Elemente als ein Ganzes gegeben sind, unabhängig vom Prozess ihrer Entstehung und von dessen Nichtabgeschlossenheit“ (S. 15). Diese Unterscheidung stellt die Schüler/innen vor eine gewisse Herausforderung, vor allem die Abstraktion der aktualen Unendlichkeit.

Wie verstehen die Schüler/innen die Unendlichkeit und den Grenzwert?

Um eine Antwort auf diese Frage zu bekommen, führten Lepmann & Lepmann neben einer Literaturrecherche auch eine eigene Untersuchung durch. Sie führten dazu eine Umfrage bei 177 Studenten/innen durch, welche ein naturwissenschaftliches Fach belegt hatten und sich im ersten Studienjahr befunden haben. „Die Umfrage fand ca. 2 Jahre nachdem sie in der Schule die Folgen und ihren Grenzwert gelernt hatten, statt“ (S. 16). Die Fragen und Ergebnisse (siehe S. 16 u. 17) sind im Folgenden angeführt (Ergebnisse wie im Artikel in tabellarischer Form).

Frage 1: „Wie viele Zahlen gibt es zwischen den Zahlen $0{,}8$ und $1{,}1$?“

Aktual unendlich: unendlich viele	48 %
potentiell unendlich: $0{,}8 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n <:< 1{,}1$	1%
endlich: 2 Zahlen	32%
endlich: andere Anzahl (1, 3, 30 usw. Zahlen)	10%
keine Antwort	9%

Die Antworten auf Frage 1 sind für die Autoren ein wenig überraschend, da viele Studenten/innen (42%) „ein offenes Intervall der Zahlenachse als endliche Menge“ interpretieren (S. 16).

Frage 2: „Was ist die größte Zahl, die kleiner als 1 ist?“

aktual unendlich: diese Zahl gibt es nicht	3%
potentiell unendlich: $0{,}99$ ...; $0,(9)$; $0{,}9999$ ... usw.	50%
endlich: 0; -1; $0{,}9$; $0{,}99$; $0{,}999999$ usw.	37 %
unverständlich oder keine Antwort	10%

Aufgrund der Antworten auf Frage 2 und des Vergleichs jener mit den Antworten von Frage 1 folgern die Autoren, „dass die aktuale Unendlichkeit sich nicht auf den Ideen der potentiellen Unendlichkeit zu stützen braucht und der Ausdruck ‚unendlich viel' für den Studenten doch das Endliche bedeuten kann" (S. 16). Es lässt sich auch einsehen, dass sich fast alle Studenten/innen eine gegebene, aktuale Unendlichkeit nicht vorstellen können.

Frage 3: „Was ist der Grenzwert der Folge $\mathbf{0,3; 0,33; 0,333}$; ... ?"

Dezimalbruch: $0,(3); 0{,}333(3); 0{,}333$ ... usw:	15%
die Zahl $\frac{1}{3}$	11%
endliche Dezimalbrüche nahe $\frac{1}{3}$: $0{,}3; 0{,}4; 0{,}34; 0{,}3333$ usw.	12%
andere Antworten: 0; ∞; Grenzwert existiert nicht usw.	35%
keine Antwort	27%

Durch die Antworten auf Frage 2 und Frage 3 wird ersichtlich, dass die meisten Studenten/innen „für die Beschreibung des unendlichen Prozesses am häufigsten periodische Dezimalbrüche benutzen" (S. 16). Dies lässt die Autoren auf eine dynamische Auffassung bei den meisten Studenten/innen schließen - so gaben auch nur 11% die Zahl $\frac{1}{3}$ als Antwort auf Frage 3.

Frage 4: „Was ist der Grenzwert einer Zahlenfolge?"

Unendlich: die Zahl, der sich die Folgenglieder (im Prozess $n \to \infty$) nähern; die Zahl, die die Folge nicht erreicht	25%
endlich: die letzte Zahl der Folge	13%
endlich: die größte (kleinste) Zahl der Folge	12%
endlich: die „Länge" der Folge	5%
unverständlich oder keine Antwort	45%

Die meisten der Studenten/innen gaben eine falsche Antwort auf die Frage 4, wobei eine Vielzahl den unendlichen Prozess als einen endlichen sieht, „wo der Abschluss innerhalb des Prozesses liegt" (S. 17) und der Grenzwert beispielsweise (bei 13%) als letzte Zahl der Folge gesehen wird. Eine wirklich korrekte Antwort gaben auf diese Frage lediglich 3 %: „In ihren Antworten wurde sowohl ausgedrückt, dass die Folge im Prozess $n \to \infty$ betrachtet wird, als auch das, dass in diesem Prozess die Glieder der Folge sich immer mehr einer konkreten Zahl nähern“ (S. 17).

Zusammenfassung

Abschließend lassen sich folgende Punkte bezüglich Schwierigkeiten und Probleme zusammenfassen:

- „Die Kenntnisse unserer Schüler im Begreifen der unendlichen Menge und der unendlichen Prozesse [sind] auch nach dem Abitur gar nicht ausreichend […].“ (S. 17/18)
- Es kommt (hier) zu einer Art Vermischung des aktual und potentiell Unendlichen bzw. können sich die meisten Schüler/innen ein „aktual Unendliches“ nicht vorstellen.
- Der Grenzwertprozess und der Grenzwert selbst werden nicht sauber voneinander getrennt und unterschieden.
- Der Folgenprozess wird als endlich gesehen, wobei der Grenzwert quasi die letzte Zahl der Folge ist.
- In dem Prozess selbst liegt das Resultat vor: Es liegt nur dann ein Grenzwert vor, wenn der Prozess „irgendwie“ endlich ist. (Dementsprechend kann als Umkehrung ein unendlicher Prozess keinen Grenzwert haben.)

4.2.11. Marx A. (2013): Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen

Im Zuge dieser Arbeit führte Marx eine Literatur- und Artikelrecherche durch, wobei er zu dem Schluss kommt, dass „im Bereich des Begriffsbildungsprozesses zum Grenzwertbegriff, insbesondere dem bei Folgen, intuitive Präkonzepte besonders stabil sind“, wobei „die alten, intuitiven Konzepte“ auf den bisher gemachten Erfahrungen aufbauen und sich somit auf endliche Objekte und „konkrete Handlungen“ beziehen (S. 78).

Für Marx entwickeln sich daraus die „für den weiteren Artikel treibenden Fragestellungen“ (S. 78):

- „Welche Schülerpräkonzepte zu unendlichen Prozessen und ihrem Ergebnis lassen sich identifizieren?
- Wird die Existenz unendlicher Prozesse überhaupt akzeptiert? Und daran anknüpfend:

- Auf welche (Wissens- und Erfahrungs-)Basis greifen Schüler in ihren Konzepten wie zurück?“

Um auf diese Fragen eine Antwort zu bekommen, interviewte Marx 44 Schüler/innen zweier Gymnasien, jeweils 10. Jahrgangsstufe, „wovon 22 besonders prägnante Personen zur weiteren Analyse genutzt wurden“. Als Gesprächsunterlage dienten zwei „Rätsel“:

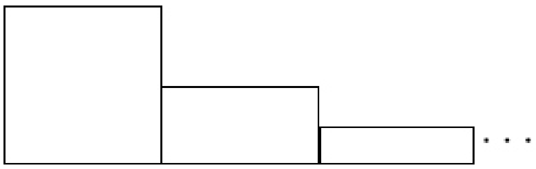
Geometrisches Rätsel	**Zahlenrätsel**
In einer Rätselzeitschrift befindet sich das folgende Bilderrätsel.  Jedes Rechteck hat die Breite 1 dm. In der Höhe unterscheiden sie sich in der folgenden Weise. Das erste Rechteck hat die Höhe 1 dm, das zweite die Höhe $\frac{1}{2}$ dm, das dritte die Höhe $\frac{1}{4}$ dm und immer so weiter. Jede Fläche ist genau halb so hoch, wie die vorhergehende Fläche. Preisfrage: Wie groß ist die Fläche aller Rechtecke zusammen?	Betrachte den Zahlenstrahl zwischen den Punkten 0 und 1. Teile diese Strecke in 10 gleichlange Teilstrecken. Nimm von diesen Teilstrecken die vierte, also die zwischen den Punkten 0,3 und 0,4. Teile auch diese Strecke wieder in 10 gleichlange Teilstrecken und wähle erneut die vierte aus, also die von 0,33 bis 0,34. Führe das Spiel weiter fort. Du erhältst so weitere Teilstrecken. Rätselfrage: Gibt es Zahlen auf dem Zahlenstrahl, die auf *allen* diesen Strecken von 0,3 bis 0,4 und von 0,33 bis 0,34 und so weiter liegen? Wenn ja, welche?

Abb. 16: "Geometrisches Rätsel und Zahlenrätsel" (S. 81)

Dabei konnte er in den Gesprächen und Interviews zwei Grundfragen der Schüler/innen ausmachen:

1) In welcher Relation stehen unendliche Prozesse zu Erfahrungen im Kontext konkreter physischer Handlungen?
2) Was soll unter dem „Ergebnis eines unendlichen Prozesses“ verstanden werden?

Die Ergebnisse und Deutungen, welche Marx zu den beiden Themenbereichen (heraus)gefunden hat, möchte ich nun darstellen und beschreiben.

„Unendliche Prozesse – ‚Realität oder Theorie‘“ (S. 80 ff)

Die Schüler/innen stellen sich einerseits die Frage, ob sie es mit einem Prozess in der Realität oder in der mathematischen Welt zu tun haben, und andererseits versuchen sie Elemente daraus miteinander zu verbinden oder abzugleichen. Dazu schreibt Marx:

> Für Schüler ist es eine zentrale Frage, welche Bedeutung sie unendlichen Prozessen in der Außenwelt beimessen sollen. Schüler sehen den Schwerpunkt von Mathematik zunächst in der Möglichkeit die Außenwelt zu beschreiben und weniger in den Errungenschaften der Mathematik als freie, von Anwendungssituationen losgelöste Wissenschaft. (S. 82)

So ist ein Prozess in der Realität unweigerlich mit einem Ende verbunden – die Erfahrung „unendlich … " kann nicht gemacht werden. In der (mathematischen) Theorie ist allerdings ein unendlicher Prozess irgendwie denkbar, jedoch wird die Unendlichkeit „als eine Art Störfaktor" interpretiert (vgl. S. 82). Marx spricht sogar davon, dass die Aufgaben bei den Schülern/innen „Irritationen darüber [stiften], ob sie dem physischen oder dem mathematischen Bereich ihrer Vorerfahrungen zuzuordnen sind" (S. 80)
Als Beispiel führt Marx eine Textpassage eines Gesprächs mit einer Schülerin an, welche bei der Aufgabe „Geometrisches Rätsel" (Anm.: $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$) aufgezeichnet wurde. Dabei lässt sich gut erkennen, welche Auswirkungen der jeweilige Kontext, entweder die physische Realität oder mathematische Welt, auf die Beantwortung des Rätsels hat:

> Dass es immer kleiner wird, der Abstand zwischen dem Gesamtwert und zwei, dass es nie zwei erreichen wird, dass man aber irgendwann in der Realität, nicht im Mathematischen, sondern in der Realität, sagen würde, das ist jetzt gleich zwei. In der Mathematik könnte man rein theoretisch immer weiter gehen bis es, äh, bis man irgendwann stirbt und die Enkel und Urenkel das weiter machen und man kommt nie zu einem genauen Ergebnis, weil es ja immer, immer weiter geht. (S. 80)

Die wesentlichste Einsicht für Marx ist dabei, dass „die Einordnung der Aufgabe in einen Kontext deutliche Auswirkungen darauf hat, wie unendliche Prozesse und mehr noch der Umgang mit ihnen konzeptualisiert werden" (S. 80).

„Unendliche Prozesse – Was könnte darunter verstanden werden?" (S. 82 ff)

Im Sinne der Frage nach der Existenz eines unendlichen Prozesses geht es in weiterer Folge den Schülern/innen darum, wie sie damit umgehen sollen und welches Ergebnis sie diesem zuordnen sollen. Marx listet folgende Konzepte auf, welche „ein Bild beobachtbarer Schülervorgehensweisen in Verbindung mit daraus abgeleiteten Vorstellungen" zeichnen (S. 82):

„Es gibt kein Ergebnis unendlicher Prozesse"

Ein Ergebnis kommt bei diesem „Denkkonzept" nur zustande, wenn ein Prozess, eine Handlung beendet ist. Es kommt quasi zu einer Gleichsetzung von Ende und Ergebnis bzw. vice versa zu keinem Ergebnis ohne Ende.

„Ein unendlicher Prozess ist lang, aber letztlich endlich“

Ein Schüler tätigt folgende Aussage (S. 84): „Ja, wir müssen davon ausgehen, dass so eine Periode irgendwann mal abbricht“. Die Existenz einer „Unendlichkeit“, in welcher Form auch immer, ist hier nicht vorhanden. Nicht einmal das potentielle immerwährende Fortschreiten einer Periode wird als möglich gesehen.

„Die Unendlichkeit legt einen Schleier über den Prozessausgang“

Dies ist eine durchaus nachvollziehbare Sicht. Dadurch, dass der Prozess nie endet, kann nie eine Aussage über das Ergebnis getätigt werden.

„Das Ergebnis eines unendlichen Prozesses passt sich veränderlich dem Prozessverlauf an“

„Die Überlegungen der Schüler betonen anhand einer gewissen Abhängigkeit der ‚Zahl‘ oder ‚Folge‘ vom Beobachtungszeitpunkt innerhalb des Prozesses seine Dynamik“ (S. 85).

„Übertragung: Was im Endlichen gilt, das gilt auch im Unendlichen“

Für Marx spielt bei diesem Konzept der „unendliche Prozess so etwas wie den Vermittler zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen“ für die Schüler/innen, wobei dieser Prozess die Eigenschaften, welche im Endlichen gelten, nun auch im Unendlichen geltend macht. Für das „geometrische Rätsel“ heißt das konkret, dass immer eine Differenz zwischen den Teilflächeninhalten und dem Flächeninhalt (der Größe Zwei) vorhanden ist.

4.3. Liste der Probleme und Schwierigkeiten

Nachfolgend werden die (wichtigsten) Ergebnisse der Studien und Artikel zur besseren Übersicht noch einmal dargestellt. Dabei wurde versucht, ähnliche Aussagen, Probleme und Schwierigkeiten jeweils zusammenzufassen und *einem* „Problem“ zuzuordnen.

Der Umgang mit der Unendlichkeit stellt eine besondere Problematik und Herausforderung dar.

- Sierpinska (1987) führt den Begriff „Unendlichkeit“ als ein „epistemological obstacle“ bezogen auf den Grenzwertbegriff an.
- Vom Hofe (1998) gibt an, dass es sich bei den Problemen um grundlegende, übergeordnete Probleme handelt, welche „in der Sachstruktur und der Epistemologie der

behandelten Begrifflichkeiten begründet sind […]“ und die um „die Intuition des Unendlichen und ihre mathematische Präzisierung“ kreisen (S. 286).

- Für Williams (2001) ist das Wissen um die potentielle und aktuale Unendlichkeit bzw. deren Unterscheidung entscheidend für das Verstehen des Grenzwertbegriffs und der Grenzprozesse, und er schreibt: „Actual infinity may thus be the most important cognitive obstacle to learning the formal definition“ (ebd., S. 364).
- „Unendlichkeit“ erscheint unserer Intuition als widersprüchlich und gegensätzlich, arbeiteten Fishbein et al. (1979) heraus.
- Die Unterscheidung zwischen potentieller und aktualer Unendlichkeit und die damit verbundenen Konsequenzen sind den Schülern/innen nicht unbedingt klar (vgl. z.B. Tall (1980) sowie Lepmann & Lepmann (2008)).
- Bei Marx (2013) wird u.a. herausgearbeitet, dass die Unendlichkeit „einen Schleier über den Prozessausgang“ (eines Grenzwertprozesses) legt.
- Manche Schüler/innen können sich unter „aktual unendlich“ nichts vorstellen bzw. können sich nicht die Existenz von „Unendlichkeit“ in irgendeiner Form vorstellen.
- Bender (1991) macht darauf aufmerksam, dass Lehrpersonen und Schüler/innen mit dem Begriff „Unendlichkeit“ etwas zu sorglos umgehen und so ungenügende Grundvorstellungen entstehen.
- Monaghan (2001) kommt zu dem Schluss, dass die meisten Schüler/innen „Unendlichkeit“ primär mit einem Prozess in Verbindung bringen und als etwas sehen „which goes on and on“. Falls die Schüler/innen „Unendlichkeit“ als Objekt betrachten, dann allerdings als eine sehr große Nummer und nicht im Sinne einer Aktualen-Unendlichkeit (vgl. Monaghan 2001), wobei dies auch andere Autoren, wie Bender (1991), angeben.
- Für manche Schüler/innen kann ein unendlicher Prozess kein Ergebnis haben, auch nicht in der Form eines Grenzwerts (vgl. z.B. Marx 2013).

Die Einstellung der Schüler/innen gegenüber der Mathematik ist unterschiedlich und kann ein Hindernis darstellen.

- Sierpinska (1987) arbeitet diesen Punkt in ihrem Artikel heraus und stellt fest: „It seems that the students' attitudes towards knowledge, and mathematical knowledge in particular, have a strong impact on their intuitions of infinity and limits“ (S. 382).

- Ähnlich schreibt auch Williams, dabei zwar bezogen auf Studenten/innen, (1991, S. 235f): „[…] such attitudes play a major role in learning and cannot profitably be ignored.“

Wie seitens der Schüler/innen mit den mathematischen Begriffen „Unendlichkeit“ und „Grenzwert“ umgegangen wird, ist abhängig von der Präsentation und dem Kontext einer Fragestellung.

- Dies arbeitet vor allem Monaghan (2001) in seinem Artikel heraus. Auch für Marx (2013) ist es eine wesentliche Einsicht, dass „die Einordnung der Aufgabe in einen Kontext deutliche Auswirkungen darauf hat, wie unendliche Prozesse und mehr noch der Umgang mit ihnen konzeptualisiert werden“ (Marx 2013, S. 80).

Es ist sehr schwer, das Grundverständnis bzw. die Intuition der Schüler/innen, hier vor allem bezogen auf den Begriff „Unendlichkeit“, zu ändern.

- Dies ist eine zentrale Aussage bei Fishbein et al. (1979).
- Williams (2001) kommt zu einem ähnlichen Schluss, nämlich, dass sich Schüler/innen (sowie auch noch Studenten/innen) an ihren Vorerfahrungen festklammern und an ihren ursprünglichen Ideen festhalten.

Der Wissens- und Informationstransfer zwischen Lehrperson und Schüler/innen ist ein grundlegendes Problem

- Tall & Schwarzenberger (1978) beschreiben dieses Problem in ihrem Artikel.
- Für Bender (1991) werden (manchmal) mathematische Rede- und Schreibweisen zu sorg- und kritiklos verwendet.
- Lehrpersonen und Schüler/innen können aufgrund ihrer unterschiedlichen Sichtweisen aneinander vorbeireden, ohne dass dies jemandem auffällt (vgl. Monaghan 2001).
- Laut Monaghan (2001) verwenden Mathematiker/innen (also auch Lehrpersonen) Redewendungen, welche für sie selbst eine andere Bedeutung haben als für die Schüler/innen, z.B. „going on forever“.

Die formale Definition eines Begriffs sowie formales Denken generell wird von Studenten/innen als auch Schüler/innen nicht immer geschätzt bzw. nicht für notwendig erachtet.

- Wie Williams (1991) feststellt, machen es Studenten/innen einerseits vom jeweiligen Beispiel abhängig, was für sie „mathematisch wahr“ ist und andererseits bevorzugen sie den einfacheren Weg. Deswegen haben die Studenten/innen manchmal „a lack of appreciation for formal thinking, which effectively removed any motivation to learn what is, after all, a very formal definition of limit“ (ebd., S. 235). Dies lässt sich auch auf Schüler/innen übertragen.

Der Formalismus bzw. die formale Schreibweise stellt die Schüler/innen vor eine Hürde und erschwert den Zugang.

- Dies ist ein die Analysis im Allgemeinen betreffendes Problem (s. z.B. Menghini 2008, S. 4), jedoch wie z.B. Bender (1991) oder auch vom Hofe (1998) sowie andere Artikel aufzeigen, kein grundlegendes Verständnisproblem - die Schwierigkeiten liegen offenbar tiefer als nur im Formalismus (vgl. Bender 1991).

Die dynamische Sichtweise bzw. Auffassung von Folgen und des Grenzwerbegriffs kann zu falschen Vorstellungen führen, ist aber gleichzeitig der natürliche Zugang.

- Diese Aussage bzw. die dynamische Sichtweise werden unterschiedlich und manchmal kontrovers diskutiert. Bei Bender (1991) ist es ja eine zentrale Aussage, „dass diese sog. dynamische Auffassung von Folgen […] mit verantwortlich für verbreitete Fehlvorstellungen und –verständnisse (FVV) vom Begriff des Grenzwerts ist“ (ebd., S. 239). Wie Bender selbst und auch Williams (2001) aber betonen, ist eine dynamische oder prozesshafte Sichtweise der natürliche Zugang.

4.4. Problemfelder

Es wird nun versucht, die Probleme und Schwierigkeiten in Problemfelder zusammenzufassen, welche als Hauptursachen bzw. Grundprobleme zu sehen sind und somit die verschiedensten anderen Probleme bedingen. Die beiden ersten Problemfelder, „Die Schüler/innen sind kein leeres Blatt“ und „Der widersprüchliche Umgang mit der Unendlichkeit“, sind dabei wahrscheinlich auch mitverantwortlich für das dritte Problemfeld: „Die Existenz eines bzw. des Grenzwerts wird in Frage gestellt“. Beim vierten Problemfeld, „Die Problematik des Wissenstransfers“, handelt es sich um die allgemeine Schwierigkeit, welche eigentlich jedem Lehrinhalt, den es zu vermitteln gilt, innewohnt, und so ist es sicher nicht schlecht, diese in Erinnerung zu rufen. Wie sich erkennen lässt, sind die Problemfelder nicht klar voneinander abgrenzbar, sondern haben auch diverse Berühr- und Überschneidungspunkte (Deswegen werden im Kapitel 5.3. auch nur zu Problemfeld 1 und 2 konkrete Überlegungen angeführt, wobei sehr wohl auch die Problemfelder 3 und 4 mitberücksichtigt werden).

4.4.1. Die Schüler/innen sind kein leeres Blatt

Schüler/innen bringen ihre Erfahrungen bewusst sowie unbewusst in den Lernprozess ein und haben eine ursprüngliche bzw. eigene Vorstellung von den Begriffen *Grenzwert* und *Grenzprozess* (s. Zusammenfassung des Artikels von Williams 2001). Diese Vorerfahrungen sind vor allem mit „endlichen“ Objekten unserer „endlichen“ Welt verknüpft. Hinzu kommt, dass der natürliche, erste Zugang zu einem neuen Begriff mit einer Handlung verbunden ist, wir „probieren“ ihn aus: „On the grounds of historical examples and in the light of cognitive schema theory we conjecture that the operational conception is, for most people, the first step in the acquisition of new mathematical notions“ (Sfard 1991, S. 1).
Diese ursprünglichen Vorstellungen sind (vorerst) meist nicht ident (kompatibel) mit den Begriffen in mathematischer Sicht und der dynamische, prozesshafte Zugang wirkt gegenüber dem eher statischen Grenzwertkonzept widersprüchlich. In dieses Problemfeld lassen z.B. folgende (umformulierte und teils zusammengeführte) Aussagen einordnen:

- *Der erste Schritt in Richtung Verstehen und Aneignung eines mathematischen Begriffs bzw. Objekts ist ein „operational conception“, also ein dynamischer Zugang.*

- *Die Schüler/*innen *versuchen, Beispiele und Begriffe in einen Kontext einzuordnen, sodass sie sich mit den Begriffen auseinandersetzen können.*

- *Die (damit verbundenen bzw. daraus resultierenden) Einstellungen gegenüber der Mathematik und der Wissenschaft allgemein, welche von Schüler/in zu Schüler/in unterschiedlich sind, beeinflussen den Umgang mit neuen Begriffen und können auch hinderlich sein.*

- *Der reguläre Unterricht hat sehr wenig bis gar keinen Einfluss auf die „Grundgedanken" und intuitive Sichtweise der Schüler/innen – eine wirkliche Reorganisation, Umstrukturierung der „concept images" bzw. der „Wissensbibliothek" findet nicht (immer) statt.*

Es ist dementsprechend schwierig, die Schüler/innen von einer Sinnhaftigkeit und einem Nutzen neuer Methoden oder Begriffe – hier der Grenzwertbegriff – zu überzeugen, vor allem wenn sie der Meinung sind, mit den „alten", „vertrauten" Methoden gleiche Ergebnisse zu erzielen.

4.4.2. Der widersprüchliche Umgang mit der „Unendlichkeit": The contra dictionary nature of infinity

Der Umgang mit der Unendlichkeit und schließlich die Akzeptanz der Möglichkeit einer aktualen Unendlichkeit wird als eine der größten und schwierigsten kognitiven bzw. psychologischen Herausforderungen im Umgang mit dem Grenzwertbegriff gesehen und z.B. bei Williams (2001) als *das* Hindernis schlechthin („the most important cognitive obstacle" – ebd., S. 364) beim Verstehen und Erlernen des Grenzwertbegriffs beschrieben. Die Tatsache, dass in jedem Artikel bzw. jeder Studie der Begriff „Unendlichkeit" in irgendeiner Weise angesprochen wird, bestätigt die Wichtigkeit (eigentlich fast schon Dominanz) dieses Problems.

Wie Heuser (2008, S. 115ff) aufzeigt, ist in der Definition (des Unendlich-Kleinen) von Weierstraß das Aktual-Unendliche mit den Worten, „[…] daß für alle Werte von h, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist, φ(h) kleiner als ε ist", in Form einer aktual-unendlichen Menge, versteckt eingearbeitet. Die Formulierung „für *alle* Werte" bzw. „für *alle* $n \geq N$" ist in jeder Definition in Zusammenhang mit dem Grenzwert zu finden.

4.4.3. Die Existenz des Grenzwerts wird in Frage gestellt

Die Frage „Inwiefern kann ein Grenzwert überhaupt existieren?“ (und das damit verbundene Problemfeld) ist in verschiedenen Ausprägungen und Variationen bei den Schüler/innen zu finden und resultiert gewissermaßen aus den zwei vorigen Problemfeldern.
Da wir eigentlich in einer endlichen Welt leben und „alles“, wie Hilbert bemerkt, „was uns im täglichen Leben begegnet, was Gegenstand unserer Erfahrung ist, sei es, dass wir es wissenschaftlich experimentell untersuchen oder beobachten, […] stets und überall den Charakter des Endlichen an sich hat“ (zit. nach Ewald & Sieg 2013, S. 670), können wir uns (anfangs) nur sehr schwer etwas bzw. nichts unter „Unendlichkeit“ vorstellen. Dennoch versuchen wir die Begriffe zu verstehen, und dementsprechend werden die neuen Begriffe mit unseren bestehenden Denkstrukturen oder Gewohnheiten abgeglichen und dabei kann es zu verschiedenen (berechtigten) Fehlvorstellungen kommen:

- *Ein (unendlicher lang dauernder) Grenzprozess kann zu keinem Ergebnis kommen und dementsprechend auch kein Ergebnis in Form eines Grenzwerts haben.*

- *Die „Unendlichkeit“ wird generell nicht akzeptiert, da es sie ganz einfach nicht gibt und so muss ein unendlicher Prozess irgendwann abrechen bzw. hat eine unendliche Folge ein letztes Folgenglied.*

4.4.4. Die Problematik des Wissenstransfers

Dieses Problemfeld ist durchaus als ein allgemeines, den gesamten Unterricht betreffend, zu sehen und dementsprechend auch in Bezug auf den Grenzwertbegriff relevant und wurde schon im Kapitel 4.1.2. aufgegriffen und besprochen.

5. Abschließende Betrachtungen

5.1. Folgerungen

Die vorher angestellten Überlegungen und Einsichten zu den Problemen und der Genese des Grenzwertbegriffs führen zu zwei wesentlichen Folgerungen.

5.1.1. Erste Folgerung

Unabhängig davon, wie die Lehrperson den Grenzwertbegriff im Unterricht thematisiert, mit den Problemfeldern, mit den wesentlichen Verständnisschwierigkeiten, welche als solche durchaus sämtliche andere Probleme direkt und indirekt mitbedingen, werden sich die Schüler/innen (gemeinsam mit der Lehrperson) immer auseinandersetzen müssen. Diese sind für ein wirkliches Verständnis unumgänglich.

Die Hauptprobleme, welche ich als Problemfelder bezeichnet habe, ergeben sich aus „Schnittstellen" der Probleme der verschiedenen Studien. Trotz diverser Unterschiede zwischen den Artikeln, betreffend Fragestellung, gewählter Aufgaben und vor allem Alter der Schüler/innen, gibt es (doch) Ähnlichkeiten sowie Übereinstimmungen in den Ergebnissen. Diese Tatsache legt die Folgerung nahe, dass es sich bei den aufgezählten Schwierigkeiten und Problemen um solche handelt, von denen wir Lehrpersonen durchgehend begleitet und mit denen wir immer wieder aufs Neue konfrontiert werden – unabhängig vom jeweiligen Zugang.

Hiermit ist vor allem gemeint bzw. bestätigt dies die weiter oben getätigte Aussage, dass sich die Lehrpersonen und die Schüler/innen gemeinsam mit diesen Schwierigkeiten und Problemen auseinandersetzen müssen: Diese Probleme sind für den Lernprozess und das Verständnis wichtig und entscheidend und zwar in dem Sinn, dass sie bewusst gemacht und bewusst durchdacht werden und nicht ins „Hinterstübchen" geraten sollten. Somit sollte sich eine Lehrperson wohl eher dann Sorgen oder zumindest Gedanken machen, wenn niemand in der Klasse seinen bzw. ihren Unmut äußert oder Unverständnis kundtut (vgl. Kap. 4.1.3. bzw. die darin angeführten Zitate von Sierpinska und vom Hofe).

Diese Folgerung gilt auch für Anwendungen, bei denen das Konzept des Grenzwerts zum Tragen kommt, beispielsweise bei der Ableitung. Danckwerts & Vogel (2010) diskutieren die Frage, welcher Zugang zum Ableitungsbegriff den Schülern/innen ein tragfähiges

Grundverständnis ermöglicht, wobei sie dem Zugang „Ableitung als lokale Änderungsrate" gegenüber dem „Tangentenproblem" den Vorzug geben:

> Die beim geometrischen Zugang ausgesparte Frage ist, *warum man sich für den lokalen Anstieg interessiert*. Es erscheint angebracht, die Problematik in Sachkontexte einzubetten, die die Frage nach dem lokalen Anstieg in natürlicher Weise enthalten und zudem möglichst nahe an der Erfahrungswelt der Schüler liegen. […]
> Um Schwierigkeiten, die mit dem Grenzübergang verbunden sind, nicht zur Hauptsache werden zu lassen, sind solche Beispiele zu bevorzugen, in denen man sich in intuitiver Weise des Zeitkontinuums bedient. (Danckwerts & Vogel 2010, S. 50)

Dem ist zuzustimmen, allerdings ist ihre Aussage „Der Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate ist in kinematischen Kontexten vergleichsweise [Anm.: im Vergleich zum Tangentenproblem] unproblematisch, weil der funktionale Weg-Zeit-Zusammenhang sich in intuitiver Weise des Zeitkontinuums bedient" (ebd., S. 58) mit Vorsicht zu genießen. Denn wie z.B. Friedrich (2001) festgestellt hat, ist für Schüler/innen auch die Vorstellung (der Existenz) einer Momentan-Geschwindigkeit durchaus problematisch. Die „Einkleidung"[10] ist nicht entscheidend, da die lokale Änderungsrate - als Grundvorstellung für den Ableitungsbegriff - „in sich das Grundparadoxon infinitesimalen Denkens als geistiges Hindernis trägt" (ebd., S. 148). Friedrich verglich seine Ergebnisse mit den Transkripten des Artikels von vom Hofe (1998), welcher den „geometrischen Zugang" gewählt hatte, und stellte fest, dass fast idente Probleme („geistige Hindernisse") bei den Schülern/innen auftraten (vgl. Friedrich 2001). Ähnlich berichten auch Henning & Hoffkamp (2013): Der Umgang mit durchschnittlichen Änderungsraten ist für Schüler/innen unproblematisch, allerdings sind sie „nicht von der Existenz einer momentanen Änderungsrate bzw. einer Momentangeschwindigkeit zu überzeugen: ‚*Die kann es nicht geben, das muss immer ungenau sei*' [ein Schülerzitat]" (ebd., S. 38).

[10] Eine der Möglichkeiten („Art"), einen Realitätsbezug im Mathematikunterricht herzustellen, sind „*Eingekleidete mathematische Probleme,* bei denen mathematische Begriffe/Verfahren in vermeintliche Anwendungskontexte ‚eingekleidet' werden" (Kaiser 1995, nach Hinrichs 2008, S. 4). Das *Momentangeschwindigkeits*- als auch das *Tangentenproblem* sind demnach nicht unbedingt „Einkleidungen" – allerdings dürfte klar sein, was gemeint ist.

5.1.2. Zweite Folgerung

Der Grenzwertbegriff selbst ist nicht der Auslöser der mit ihm verbundenen (besser: in Verbindung gebrachten) Probleme und Schwierigkeiten. Folglich wird der Grenzwertbegriff die (zuvor entstandenen) Verständnisschwierigkeiten auch nicht vollständig auflösen können. Manche Schwierigkeiten bleiben einfach bestehen, aber der Umgang wird ein anderer.

Wie der Blick in die Geschichte zeigt, wurde mit der Entwicklung und (letztlich damit verbundenen) Definition eines (neuen) Begriffes versucht, (alte) Schwierigkeiten in den Griff zu bekommen, Mehrdeutigkeiten auszuschließen, also die unterschiedlichen Interpretationen verschiedener Mathematiker/innen auf einen Nenner zu bringen. Es können dann sehr wohl neue Schwierigkeiten entstehen und so andere Fragestellungen auftauchen.

Die Schwierigkeiten und Probleme der Schüler/innen, welche in den Studien und Artikeln genannt werden, waren vorhanden bzw. hatten Mathematiker/innen (auch) schon, bevor die Entwicklung des Grenzwertbegriffs abgeschlossen war. Natürlich gibt es einzelne Probleme, welche direkt im Zusammenhang mit der Definition des Grenzwertbegriffs stehen. So „erschwert offenbar das gehäufte Auftreten von Quantoren und deren Reihenfolge sowie das Auftreten von Ungleichungen mit Beträgen den Zugang“, ist bei Bender (1991, S. 239) zu lesen, welcher aber ausdrücklich darauf hinweist, dass „die Schwierigkeiten tiefer als nur im Formalismus [liegen]“ (ebd., S. 240, vgl. dazu die Zusammenfassung über Bender, 1991).

Die damit verbundene Konsequenz für die Unterrichtsgestaltung ist, dass die Probleme und Schwierigkeiten unabhängig von der Einführung des Grenzwertbegriffs thematisiert werden sollten. Dies bedeutet auch, den Schülern/innen bewusst zu machen, dass der Grenzwertbegriff eigentlich das mathematische Werkzeug ist, um diese Probleme endlich in den Griff zu bekommen bzw. unter Verwendung dieses Werkzeugs sich nicht über diese Schwierigkeiten Gedanken machen zu müssen: Die Stärke des formalen Grenzwertbegriffs und des mathematischen Umgangs mit dem Unendlichen besteht gerade darin, das Prozesshafte am Unendlichen (so gut es geht) in der Beschreibung auszublenden. Damit werden aber die „Schwierigkeiten beim Verstehen dessen, was ein Grenzwert ist“ nicht aufgehoben, wie es auch Danckwerts & Vogel formulieren:

> Die abstrakte Grenzwertdefinition (‚Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass…‘) hebt jedoch die Schwierigkeiten dessen, was ein Grenzwert ist, nicht auf. Im Gegenteil: Die Definition umgeht diese

> Probleme geradezu, indem sie eine Operationalisierung bereitstellt und damit den Grenzwertbegriff handhabbar macht. (Danckwerts & Vogel 2010, S. 25)

In der Folge gehört auch klar formuliert bzw. uns als Lehrpersonen selbst immer wieder klar gemacht, dass die mathematische Fassung von Begriffen von unseren Alltagsvorstellungen zu unterscheiden ist. Danckwerts & Vogel schreiben treffend:

> Brüche zwischen innermathematischer Klärung und ursprünglichem Verstehen sind unvermeidlich und geradezu charakteristisch für einen sinnstiftenden Umgang mit Mathematik. Die Grundbegriffe infinitesimaler Mathematik […] sind Paradebeispiele für dieses Spannungsfeld. Sie zeigen zugleich, dass sich gehaltvolle (und daher bildende) Mathematik im Allgemeinen nicht als *bloße* Verstärkung des Alltagsdenkens verstehen lässt [die Autoren kommentieren dies mit einer Fußnote: Lernen heißt eben auch Abschiednehmen von Gewohntem]. Vielmehr kommt es darauf an, die Naht- und Bruchstellen zwischen intuitiver Vorerfahrung und theoretischer Begriffsbildung bewusst zu thematisieren und als kognitive Konflikte geeignet zu inszenieren. (Danckwerts & Vogel 2010, S. 32)

5.2. Die Geschichte als Hilfesteller und Ratgeber

Die Überlegung, den Unterricht bzw. die Gestaltung des Unterrichts für Schüler/innen interessanter und nachvollziehbarer zu machen, indem geschichtliche Betrachtungen herangezogen und in den Unterricht eingebaut werden, ist nicht neu. Bereits 1927[11] wies Otto Toeplitz bei einem Vortrag während der DMV-Tagung auf diese Möglichkeit indirekt hin, denn er stellte den damaligen Aufbau einer Anfängervorlesung an der Universität mehr als in Frage und tätigte die inzwischen wohlbekannte (und oft zitierte) Aussage, welche weitreichende Auswirkungen hatte:

> […] alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden, der Mittelwertsatz, die Taylorsche Reihe, der Konvergenzbegriff, das bestimmte Integral, vor allem der Differentialquotient selbst, und bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen?, alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen. (Toeplitz 1927, zit. nach Hischer 2012, S. 25)

In weiterer Folge beschäftigten sich Mathematiker/innen sowie Mathematikdidaktiker/innen mit dieser Thematik und Problematik; beispielweise auch Felix Klein, welcher

[11] Walther Lietzmann hielt sogar noch früher, 1921, eine Vorlesung über Unterhaltungsmathematik, bei der er „die Bedeutung sozialer und kultureller Aspekte und das Potential historischer Kontexte für die unterhaltsame Gestaltung des Mathematikunterrichts thematisiert[e]“ (Weiss-Pidstrygach et al. 2013, S. 291).

aufgrund von Ergebnissen der damals entstehenden „Kinderpsychologie“ für sich zu der Einsicht kam (Klein 1933, nach Vollrath & Roth 2012, S. 117): „Die Darstellung auf der Schule muß nämlich, um ein Schlagwort zu gebrauchen, psychologisch, nicht systematisch sein.“

Somit entwickelte sich das *genetische Prinzip*[12]. Dieses fordert, dass der „Mathematikunterricht im Hinblick auf die Mathematik authentisch und auf die kognitive Entwicklung der Lernenden adäquat sein [soll]“, wobei im Zuge dieser Forderung auch diskutiert wurde, „inwieweit sich der Unterricht an der historischen Entwicklung zu orientieren habe“ (Vollrath & Roth 2012, S. 116/118).

Die *historische Verankerung* als eigenes didaktisches Konzept wurde dann in dem Artikel *„Historische Verankerung“ als methodische Variante im Mathematikunterricht* von Hischer im Jahre 1981 „mit Bezug auf [Vollrath 1976] vorgeschlagen“ und entwickelt (Hischer 2012, S. 24). Hischer geht dabei von der Hypothese aus, „dass sich fundamentale Ideen in ihrer *Historizität* und *Archetypizität* in Verbindung mit der Erwartung an die *Durchgängigkeit* und die *Transparenz* der Unterrichtsgestaltung als ‚verankernde Idee‘ erweisen (und auch sollen)“ (ebd., S. 24) und somit *historische Verankerung* als eine „historisch geprägte *innermathematische Beziehungshaltigkeit*“ verstanden werden kann (ebd., S. 31). Hier beschreibt Hischer auch, wie sich dies im Unterricht umsetzen ließe:

> Eine solche historische Verankerung soll durch Verwendung historischer Beispiele im Unterricht erreicht werden, die sich als tragfähige Bausteine einer Unterrichtseinheit erweisen. Diese Beispiele sollen gemäß Toeplitz vom ‚Staub der Zeit‘ befreit und in heutiger Formulierung dargestellt werden. ‚Geschichte der Mathematik‘ kann auf diese Weise ein spannender *didaktischer Aspekt* zur methodischen Gestaltung von Unterricht sein – und zugleich wird ein *Beitrag zur Kulturgeschichte* geliefert, wobei die deskriptiven und normativen Kriterien für fundamentale Ideen zum Tragen kommen. (Hischer 2012, S. 31)

Unter Beispielen werden hier nicht nur konkrete Rechenaufgaben verstanden, sondern ebenso historische Texte oder Ähnliches, wobei für Hischer die *fundamentale Idee* eine Art Schlüsselrolle spielt.

Hischer (2012, S. 19ff) bespricht in seinem Buch den Begriff „fundamentale Idee“ sehr ausführlich und gibt auch „Kriterien bezüglich fundamentaler Ideen“ an (ebd., S. 21):

[12] Die Bezeichnung stammt von Erich Wittmann (vgl. Hischer 2012, S. 28)

Fundamentale Ideen der Mathematik …

🕮	… sind aufzeigbar in der *historischen Entwicklung* der Mathematik,	**Historizität**
☯	… sind, gewissermaßen als *Archetypen des Handelns und Denkens,* auch *außerhalb der Mathematik* und *vor der wissenschaftlichen Aufnahme* auffindbar,	**Archetypizität**
Σ	… geben (zumindest partiell) Aufschluss über *das Wesen der Mathematik*,	**Wesentlichkeit**
⇳	… sind tragfähig, um curriculare Entwürfe des Mathematikunterrichts *vertikal* zu gliedern,	**Durchgängigkeit**
	… sind geeignet, den Mathematikunterricht beweglicher und *durchsichtiger* zu gestalten.	**Transparenz**
≈	… sind eher vage als präzise.	**Vagheit**

Abb. 17: Kriterien fundamentaler Ideen (aus Hischer 2012, S. 21)

Das Konzept bzw. der Ansatz der Orientierung (des Curriculums) an *fundamentalen Ideen* geht auf Jerome Bruner im Jahre 1970 zurück. Seine These:

> […] dass die Grundlagen eines jeden Faches jedem Menschen in jedem Alter in irgendeiner Form beigebracht werden können [und dass] die basalen Ideen, die den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden, und die grundlegenden Themen, die dem Leben und der Dichtung ihre Form verleihen, ebenso einfach wie durchschlagend sind […] (Bruner 1970, zit. nach Hischer 2012, S. 19)

inspirierte viele Didaktiker und löste eine fachliche Diskussion über *fundamentale Ideen* aus. Mittlerweile ist „die Orientierung an fundamentalen Ideen, […] eines der wichtigsten globalen normativen fachdidaktischen Prinzipien" (Danckwerts & Vogel 2010, S. 9).

Welche *Bausteine* zur Unterrichtsgestaltung auch verwendet werden, ein entwickelnder Unterricht - „Toeplitz nennt das die ‚direkte genetische Methode'" (Vollrath 1968, S. 2) - hat bei all seinen Vorteilen generell einen gravierenden Nachteil, somit auch gegenüber einem systematischen Aufbau: die Zeit. Das Zeitproblem sprechen u.a. sowohl Vollrath (1968) als auch vom Hofe (1998) an. Ähnliches, vielleicht etwas aus dem Zusammenhang gerissen, berichtet auch Williams (1991, S. 235) von seinen durchgeführten „treatments": „The brief time may have been insufficient to allow students to determine that an alternative view of limit would be fruitful, useful, or valuable." Der Zeitfaktor ist dementsprechend nicht zu vergessen.

Ohne weiter auf die Vorteile und Nachteile einzugehen: Eine Thematisierung bzw. eine Auseinandersetzung mit der Geschichte im Unterricht kann und soll den Schülern/innen ein tieferes Verständnis der Mathematik ermöglichen und den Unterricht auf vielfältige Art bereichern (vgl. dazu z.B. Vollrath 1968, Schorcht 2013 sowie Weiss-Pidstrygach et. al

2013). Im Fall der Probleme und Schwierigkeiten in Bezug auf den Grenzwertbegriff, welche ein tieferes Grundverständnis verlangen, um ihnen beizukommen, bieten sich damit Möglichkeiten an.

5.3. Möglichkeiten die Geschichte im Unterricht zu nutzen

Es offerieren sich durch einen Blick in die Geschichte grundsätzlich zwei Möglichkeiten, welche die Lehrperson zu ihren Gunsten oder ihrem Nutzen (in Bezug auf Probleme mit dem Grenzwertbegriff) verwenden kann. (Das Wahrnehmen der ersten Möglichkeit ist dabei die Voraussetzung für die zweite Möglichkeit.)

5.3.1. Die indirekte Methode

Durch eine Beschäftigung mit der Geschichte bzw. der Genese eines bestimmten Begriffes – hier des Grenzwertbegriffs - wird die Lehrperson für Probleme der Schüler/innen sensibilisiert und gelangt zu „neuen“ Einblicken – vergleichbar mit der bzw. angelehnt an die „indirekte(n) genetische(n) Methode“ Toeplitz‘ (vgl. Vollrath 1968, S. 2).

> Aktuelle Forschungsergebnisse lassen […] zwar keineswegs eine allgemeine, übergreifende Aussage zum Zusammenspiel von Überzeugungen und einem erfolgreichen Umsetzen eines verständnisorientierten, kognitiv aktivierenden Mathematikunterrichts im Sinne kognitivistischer Überlegungen zum Lehren und Lernen zu, trotz uneinheitlicher Befunde lassen aufgeführte Studien […] die Vermutung von Auswirkungen konstruktivistischer bzw. transmissiver Überzeugungen von Mathematiklehrkräfte auf die Qualität von Mathematikunterricht dennoch naheliegend erscheinen. (Besser 2014, S. 69f)

Diese Aussage ist zusammen mit jener von Bauer (2008, S. 28) „[…] die Beziehungen zwischen Kindern und Jugendlichen auf der einen sowie Lehrern, Eltern und Mentoren auf der anderen Seite sind keine Einbahnstraße […]“, fast ein Beleg für den Nutzen bzw. die Wirksamkeit der *indirekten genetischen Methode* oder stellt zumindest eine Motivation für eine Beschäftigung mit ihr dar.

Es existieren (einige) Parallelen zu den Schlüsselproblemen bzw. Problemfeldern der Schüler/innen und der Entwicklung des Grenzwertbegriffs. So zeigen z.B. die Dauer der Entwicklung und die beachtlichen Ergebnisse, welche auch ohne den formalen Grenzwertbegriff erreicht wurden, dass die Notwendigkeit (der Einführung) dieses Begriffs nicht von vornherein einleuchtend scheinen muss und die Schüler/innen dementsprechend motiviert werden müssen. Dies stellt sicher eine zentrale Einsicht dar, und auch Tall & Schwarzenberger sprechen diesen Punkt indirekt an (1978, S. 2f): „[…] we must avoid the kind of 'motivation' which the sophisticated onlooker can see is a simple form of what is to come, but the learner, without the later experience, sees only as something foreign to his current ideas."

Die Tendenz (vgl. Kap 3.2), (vorerst) mit einem „anschaulich geprägten" Grenzwertbegriff zu arbeiten und auch auf diesem die Begriffe Ableitung und Integral aufzubauen, ist in diesem Zusammenhang wahrscheinlich die richtige. Es ist auch bei Danckwerts & Vogel (2010, S. 17 – an Blum 1979 anlehnend) zu lesen, dass „man […] sehr wohl auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs den Ableitungs- und Integralbegriff in intellektuell ehrlicher Weise zugänglich machen und zugleich den Weg für eine spätere analytische Präzisierung des Grenzwertbegriffs offen halten [kann]". Hier sei betont, dass es für die Motivation der Schüler/innen hilfreich ist, sich mit jenen Problemfeldern auseinanderzusetzen, welche aber nach wie vor eine Herausforderung darstellen.

Welche (weiteren) Einblicke bekommt nun die Lehrperson?

Überlegungen zum Problemfeld: Die Schüler/innen sind kein leeres Blatt

Die eigene Sichtweise auf bzw. Einstellung gegenüber Dinge(n), Begriffe(n) etc. kann hinderlich sein, da der eigene Geist immer eine gewisse Einschränkung darstellt und eine einzige Sichtweise einschränkend ist. Es gibt jedoch in diesem Sinn nicht die *eine* richtige, da die wirklich problematische jene wäre, welche (die) anderen Sichtweisen ausschließt und nicht offen für Alternativen ist.

Dies zeigt uns auch die Geschichte. Die Wissenschaftler/innen und Mathematiker/innen hatten unterschiedliche Einstellungen und Zugänge zu Methoden, Begriffen und Problemstellungen. Die verschiedenen Einstellungen sind den unterschiedlichen Lebenswegen, den jeweilig unterschiedlichen Akzentuierungen in den Ausbildungen etc. zuzuschreiben und so entstanden verschiedene Sichtweisen zu ähnlichen oder gleichen Aufgaben. Damit gab es nicht nur einen Lösungsweg, sondern verschiedene Möglichkeiten und Methoden, sich einer Aufgabe zu nähern und diese letztendlich zu lösen. Versagte eine Methode, war vielleicht eine andere besser geeignet. Die jeweiligen Einstellungen und damit verbundenen Sichtweisen der Mathematiker/innen veränderten und formten im Laufe der Zeit erste Gedanken zu propädeutischen Ansätzen des Grenzwertes bis herauf zu dem heute uns (Mathematikern/innen und Lehrpersonen) vertrauten Begriff. Die entscheidenden Entwicklungsschritte gelangen bzw. geschahen, weil manche Personen „offener“ waren bzw. es verstanden, die Vorarbeit ihrer Kollegen richtig zu nutzen, die richtigen Fragen stellten und eine/die entsprechende Motivation vorfanden, bestehende Methoden zu verändern und neue zu erfinden.

Demokrit (gemeinsam mit seinem Lehrer Leukipp) hatte einen anderen Zugang zur *Urfrage* als andere antike Denker. Er ließ bei seiner Atomlehre das Seelen- und Geistesleben der Menschen mehr oder weniger außer Acht, ohne sich dabei ganz wohl zu fühlen. Wie auch immer, seine Gedanken, seine „Erwartung, alles aus den Bewegungszuständen kleinster Teilchen im leeren Raum erklären zu können [wurden in der Renaissance] zur Voraussetzung der naturwissenschaftlichen Weltdeutung“ (Göbel 1998, S. 51).

Fermat hatte keine Probleme – im Gegensatz zu Descartes - die Informationen, welche er aus dem Briefwechsel mit diesem bekam, zu nutzen und manches zur Verfeinerung seiner Methoden zu verwenden oder sich davon zumindest inspirieren zu lassen. Descartes‘ „finite Einstellung“ bedingte die Entwicklung der Kreismethode, welche ohne die Verwendung infinitesimaler Größen auskam und so einen *sicheren* Anhaltspunkt, einen Vergleichswert für andere Tangentenberechnungen lieferte.

Leibniz hatte einen „philosophischen“ Zugang, Newton einen „physikalischen“ zur Infinitesimalmathematik, und vielleicht wäre die weitere Entwicklung anders verlaufen, hätte es nur eine Sichtweise gegeben.

Die Motivation wiederum, welche die Mathematiker/innen, allen voran Cauchy und Weierstraß, zu einer strengeren Begründung antrieb und zu einer Überarbeitung der Grundlagen führte, war die Tatsache, dass sie ihren Studenten/innen eine Anfängervorlesung bieten wollten, welche nicht auf vagen, sondern soliden, präzisen Begriffen aufbaute, und zusätzlich „[verstärkte] der Prozeß der Emanzipation der Mathematik von den Naturwissenschaften das Gefühl […], daß die Grundlagen revidiert werden müßten“ (Lützen in Jahnke 1999, S. 192).

Als Lehrpersonen können wir nicht davon ausgehen, dass die Schüler/innen (gleich anfangs) eine geeignete Vorstellung zu einer gewissen Thematik haben, jedoch müssen wir uns auch nicht allzu große Sorgen machen. Denn solange die jeweilige Einstellung der Wissenschaft gegenüber nicht völlig ablehnend ist, kann auf dieser aufgebaut bzw. mit dieser gearbeitet werden. Die Schüler/innen haben meist eine praktische Sicht der Dinge und bevorzugen den „simplen“ Weg (vgl. Williams 1991 oder auch Sierpinska 1987). Das waren ja auch die (ersten) Zugänge der naturwissenschaftlichen Mathematiker/innen.

Wichtig ist es, diese Einstellungen zu akzeptieren, oder besser, diese zu respektieren (natürlich nur im Rahmen der Möglichkeiten) und mit diesen arbeiten zu wollen. Des Weiteren gehört bedacht, dass der Schritt zu den abstrakten Begriffen, etwa dem Grenzwertbegriff, also der „Bruch mit dem Alltagsdenken", nicht plötzlich vollzogen worden ist, sondern sich (mit vielen kleinen Schritten) über einen langen Zeitraum erstreckte. Dementsprechend bedarf es immer wieder einer Motivationshilfe seitens der Lehrperson, welche sich über die Frage „Bitte, wozu brauchen wir das eigentlich?" nicht ärgern darf, sondern diese als Chance für den Lernprozess wahrnehmen sollte und (mit Hilfe der Geschichte) sich um eine ehrliche, authentische Antwort bemühen sollte.

Überlegungen zum Problemfeld: Der widersprüchliche Umgang mit der „Unendlichkeit"

Die im Kapitel „Die Frage nach der Beschaffenheit des Raums" angesprochene Gretchenfrage „Wie hältst du es mit der Unendlichkeit?" zog sich seit der Antike durch die Naturwissenschaften und hat heutzutage noch immer nichts von ihrer Faszination eingebüßt. Die Möglichkeit eines *Aktual-Unendlichen* in unserem Denken zuzulassen und die damit verbundenen Konsequenzen zu begreifen ist eine grandiose, fast unmögliche kognitive Leistung. Es darf uns, sowohl Schüler/innen als auch Lehrpersonen, auch immer wieder aufs Neue Kopfzerbrechen bereiten, denn selbst wenn wir mittels mathematischer Sätze und Begriffe eine Möglichkeit zum Umgang gefunden bzw. bereitgestellt bekommen haben, die Tiefe und der Gehalt der Thematik bleiben unabhängig davon bestehen.

Das Zustandekommen (einer Akzeptanz) des Begriffs *Aktual-Unendlich* war ein Kampf über viele Jahrhunderte und der Begriff musste viele *Paradoxien* und Aussagen berühmter Denker wie Bacon, Galilei und allen voran Aristoteles überwinden. Erst Cantor, mit seiner Verneinung der „Zuordnungsfrage" (vgl. Kap. 2.5.: Georg Cantor), bewies Abstufungen im Unendlichen und ermöglichte es, über das Unendliche differenzierter zu diskutieren und unendliche Mengen zu vergleichen. Das ist aber der springende Punkt: Cantor vergleicht Mengen, er durchläuft sie nicht und nimmt die Menge $\mathbb{N}$ „nur" als Maßstab. Des Weiteren lässt Cantor die Zeit aus dem Spiel, denn es ist ihm sehr wohl bewusst, „wer die Zeit in die Zahl bringt, sitzt in der Falle" und er „hat sich denn auch immer wieder gegen die Auffassung gewandt, dass die Zahl sich auf dem Zeitbegriff gründe" (Heuser 2008, S. 223). So kann ich, die Zeit außer Acht lassend, die Menge $\mathbb{N}$ sehr wohl *abzählen*, irgendwann gelange ich zu jeder natürlichen Zahl, doch bei der Menge $\mathbb{R}$ wird mir dies nicht gelingen, da sie *nicht abzählbar* ist.

Mit diesem Wissen gewappnet, können wir uns auch den Zenonschen Bewegungsparadoxien stellen, so wie z.B. dem „Wettlauf zwischen Achill und der Schildkröte“:

> Das Langsamste [die Schildkröte] kann in seinem Lauf vom Schnellsten [Achill] niemals eingeholt werden. Denn der Verfolger muss, bevor es zum Überholen kommen soll, erst einmal den Punkt erreicht haben, an dem der Verfolgte gestartet war (ein Verhältnis, das sich dauernd fortsetzt), so dass das Langsamere dauernd einen gewissen Vorsprung behalten muss. (Aristoteles: Physik 239b, zit. nach Heuser 2008, S. 86)

Die Lösung mit Hilfe eines Grenzwertverfahrens, welche uns eine konvergente geometrische Reihe und somit einen Grenzwert liefert, ist bekannt und löst dieses Paradoxon auf. Doch warum ist das so? Natürlich müssen unendlich viele Wegpunkte passiert werden – und unter der Annahme, „dass die Laufstrecke ein Kontinuum ist, […] muss der Läufer unendlich viele, immer kleiner werdende Stücke dieses Kontinuum durchlaufen und das, so Zenon, kann nicht in endlicher Zeit ausgeführt werden“ (Sonar 2011, S. 57). Aber im Sinne Cantors handelt es sich dabei um abzählbar unendlich viele Wegpunkte, welche Achill passieren muss, um die Schildkröte schließlich einzuholen.

So kann ich (beispielsweise) eine Zuordnung zwischen (beliebig endlicher) Zeit, sprich: einem Zeitintervall, und den (unendlich vielen) Wegpunkten, welche letztlich auch nur eine endliche Strecke beschreiben, herstellen. Angenommen wir nehmen 1 Minute, so gebe ich vor, dass der erste der Wegpunkte x_1 in einer halben Minute, also $\frac{1}{2} min$ erreicht wird, der zweite Punkt x_2 eine Viertelminute später usw. Damit kann ich zeigen, dass es „mathematisch“ möglich ist, unendliche viele, immer kleiner werdende Strecken in endlicher Zeit zu durchlaufen, weil das verwendete Zeitintervall als Teilmenge der reellen Zahlen aufgefasst und im Sinne des Aktual-Unendlichen mir unendlich viele Zeitpunkte zur Verfügung stellt. Diese Zeitpunkte kann ich so anordnen, dass ich unendlich viele Zeitintervalle bekomme, deren Summe (natürlich) ein endliches Zeitintervall ergibt (bzw. ergeben muss), und dessen Existenz kann ich mit Hilfe des Grenzwertbegriffs und einer geometrischen Reihe beweisen.

5.3.2. Die direkte Methode

Gemäß dem Prinzip der historischen Verankerung können historische Beispiele den Schüler/innen helfen, ihr Grundverständnis, ihre Denkschemen umzustrukturieren oder ihnen einfach als Motivationsquelle dienen – vergleichbar mit der bzw. angelehnt an die „direkte(n) genetische(n) Methode“ Toeplitz‘ (vgl. Vollrath 1968, S. 2).

Welche Beispiele (hierunter sind nicht nur reine Rechenbeispiele, sondern auch Texte u.Ä. zu verstehen – das gilt auch für die weiteren Ausführungen) können zu einem tieferen Verständnis verhelfen bzw. einen Denkanstoß oder ein Umdenken auslösen? Und (fast wichtiger) welche Aspekte gehören beachtet?

Hier sei bedacht, dass eine Beschäftigung mit der Geschichte im Unterricht kein Selbstläufer ist und ein alleiniger Konsum bzw. ein einfaches Abarbeiten der Beispiele nicht ausreichend sein wird. Denn so wie überall werden die Schüler/innen auch hier ihre Vorerfahrungen miteinfließen lassen und sich nicht (automatisch) in die geistige Lage der jeweiligen Zeit und Mathematiker/innen versetzen, sondern es „werden mathematikhistorische Überlegungen auf dem Hintergrund der gegenwärtigen Lebenswelt erschlossen“ (Schorcht 2013, S. 280 bzw. siehe Kap. 4.1.). So sind wir Lehrpersonen gefordert, den Schüler/innen eine Motivationshilfe zu geben bzw. die Schüler/innen bewusst auf manche Probleme hinzuführen, da Probleme ja nicht immer augenscheinlich sein müssen, wie wir weiter oben erörtert haben (siehe Kap. 4.1.2.). Durch eine Beschäftigung mit *der indirekten Methode* und einem *Wissen über bzw. um die Probleme*[13] sollte dies kein unmögliches Unterfangen sein, vor dem die Lehrperson kapitulieren müsste.

Eine weitere Frage ist, wie anspruchsvoll die Beispiele sein sollten; diese lässt sich nur bedingt klar beantworten. Die Lehrperson sollte sich keinesfalls von der (augenscheinlichen bzw. vermeintlichen) Einfachheit oder Schwierigkeit eines Beispiels abschrecken bzw. beeinflussen lassen oder dies als Maßstab für die Verwendbarkeit eines Beispiels sehen.

Es gibt (für mich) neben den Problemfeldern als Art Richtungsweiser eine entscheidende Frage, welche aufgrund der „Schlüsselrolle“ von *fundamentalen Ideen* zu stellen ist: „Welche fundamentale Idee wird mit dem Grenzwertbegriff letztlich zum *Ausdruck gebracht*

[13] Die beschriebenen *Problemfelder* werden sich (wahrscheinlich) nie gravierend ändern, aber auf vielfältige Weise der Lehrperson begegnen.

und *perfektioniert* bzw. welche fundamentale Idee *liegt* dem Grenzwert *zugrunde*?“ Diese Frage schließt auch die Aussage mit ein, dass der Grenzwertbegriff selbst keine fundamentale Idee ist. Er ist zwar fundamental in Hinblick auf die Grundlagen der Analysis, aber wie die meisten Grundlagen ist auch er (nur) das Werkzeug, um eine fundamentale Idee fassbar zu machen, um ihr eine „Gestalt“ zu verleihen, aber nicht die fundamentale Idee selbst. Diese Unterscheidung ist eine ganz wesentliche und muss den Schülern/innen vor Augen geführt werden, wie auch Danckwerts & Vogel fordern:

> Eine Stärkung des inhaltlichen Verstehens im Mathematikunterricht ist untrennbar verbunden mit einer Priorität für den Aufbau von Grundvorstellungen beim Lernenden. Hierzu gehört, bei Begriffsbildungen und Begründungen stärker inhaltlich und weniger formal zu argumentieren. Weiter ist es notwendig, zwischen Idee und Bedeutung eines mathematischen Begriffs oder Verfahrens einerseits und dem kalkülhaften Umgang damit andererseits deutlich zu unterscheiden. (Danckwerts & Vogel 2010, S. 9)

Schenken wir der von Jerome Bruner aufgestellten These (siehe S. 102) Vertrauen und betrachten wir die von Sfard (1991) beschriebene *dual nature of mathematical conceptions*, welche besagt, „abstract notions […] can be conceived in two fundamentally different ways: *structurally* – as objects, and *operationally* – as processes“, wobei (wie weiter oben schon erwähnt) „the operational conception is, for most people, the first step in the acquisition of new mathematical notions“ (Sfard 1991, S. 1) – dann lässt sich folgende Behauptung[14] aufstellen:

Der entscheidende Unterschied zwischen fundamentaler Idee und Grundlage ist der, dass fundamentale Ideen bei einem Menschen intuitiv vorhanden sind, hingegen die Grundlagen erst erarbeitet und sinngemäß erschlossen werden müssen. Somit ist für einen Menschen der Zugang zu einer fundamentalen Idee erheblich einfacher und natürlicher bzw. der Zugang zu Grundlagen (resp. abstrakte Objekte) über fundamentale Ideen verständlicher.

Was ist nun diese fundamentale Idee, bezogen auf den Grenzwertbegriff? Naiv und grob gesprochen: die Wirklichkeit bestmöglich zu beschreiben – mathematisch(er) ausgedrückt: mittels Modell einen Sachverhalt (Größe etc.) zu beschreiben und dabei den Fehler angeben zu können. Der Blick in die Fachliteratur gibt endgültig Aufschluss; so gehört zu den für die Analysis bedeutsamen fundamentalen Ideen (Danckwerts & Vogel 2010, S. 13)

- „die Idee des *Approximierens* (die über den Grenzwertbegriff zum inhaltlichen und operativen Kern der Analysis wird)“.

---

[14] Diese Behauptung wurde sicher in der einen oder anderen Art schon getätigt

Über sie ist bei Tietze et al. (1997) zu lesen:

> Eine der wesentlichen Aufgaben der Analysis ist es, *Grenzprozesse* (im weitesten Sinne) zu untersuchen. Es wurde bei den Mathematisierungsbeispielen bereits deutlich, daß dabei die *Approximation* eine Grundidee darstellt: Zahlen, Größen, Funktionen und deren Graphen, geometrische Figuren, die komplizierter oder zunächst gar unbekannt sind, werden durch einfachere, leichter zu handhabende oder besser zugängliche angenähert oder ersetzt. Ziel ist es dabei, die Abweichung vom Original so klein wie nur irgend möglich zu machen. (Tietze et a. 1997, S. 211)

Damit ist sie gewissermaßen (als „Spezialform“) in der „Idee des mathematischen Modellierens“[15] eingebettet. Diese beiden Ideen, des Approximierens und des Modellierens, sind nach Hischers Kriterien (vgl. Abbildung 14, S. 102) fundamental, und die beiden sind es auch, welche sich durch die Geschichte hindurch ziehen, die Mathematiker/innen immer wieder angetrieben haben und letztendlich mittels dem Grenzwertbegriff ihre *Vagheit* ablegten und präzisiert wurden. Diese Präzision ist für einen/eine Mathematiker/in eine (fast) unabdingbare Sache (Forderung), denn von einer präzisen, gesicherten Grundlage aus lassen sich neue Gebiete erschließen, aber für die Schüler/innen wird dadurch die Idee, und somit der Zugang, verschleiert.

Die verschiedenen Schüler/innenaussagen und Schwierigkeiten drehen sich um diese fundamentale(n) Idee(n) bzw. um ihre Verschleierung, wie die Problemfelder (bzw. sämtliche Schwierigkeiten und Schüler/innenaussagen) erkennen lassen. Des Weiteren hängen viele Schwierigkeiten zusammen und bedingen einander – so ist ein separates Behandeln eines Problems relativ schwierig, aber zum anderen nicht zwingend notwendig. Damit ist nicht gemeint, dass die Lehrperson den Schwerpunkt nicht auf ein einzelnes Problem legen kann bzw. soll, sondern dass sie nicht erwarten darf, keinen weiteren Schwierigkeiten zu begegnen. Dabei darf sie sich nicht davon abschrecken lassen, sondern sollte die Schwierigkeiten aufgreifen. Denn Schwierigkeiten und Probleme sind für den Lernprozess wichtig und notwendig, und die Lehrperson sollte diese begrüßen. Der entscheidende Schritt ist es dann, den Schülern/innen eine sinnvolle, eine sinnstiftende Auseinandersetzung zu ermöglichen. Eines dürfen wir Lehrpersonen nämlich nie vergessen und sollten wir uns als Prämisse immer wieder vor Augen führen: Schüler/innen wollen (primär) Dinge verstehen.

[15] Eine der sechs „zentralen Ideen“ von Heymann (vgl. z.B. Hischer 2012)

Überlegungen zum Problemfeld: Die Schüler/innen sind kein leeres Blatt

Die Idee des Approximierens finden wir beispielsweise bei dem Versuch der Kreisquadratur. Sie zieht sich durch die Geschichte der Mathematik und förderte die Entwicklung des Grenzwertbegriffs (vgl. Kap. „Geschichte und Genese des Grenzwertbegriffs").

Ein entscheidender Schritt war der Ausbau der Proportionslehre durch Eudoxos. Dabei entstand das Messaxiom (Elemente V, Def.4, nach Thiele in Jahnke 1999, S. 8):

> „Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können."

In weiterer Folge ermöglicht uns das die Formulierung des *Archimedischen Axioms* (s. u. vgl. Sonar 2011, S. 27):

> „Zu jeder noch so kleinen positiven reellen Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl n, so dass gilt:
>
> $$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon\,."$$

Genau diese Überlegungen ermöglichen uns eine beliebig genaue Approximation.

Die von Eudoxos entwickelte Exhaustionsmethode, welche die *erste strenge Form* einer *beliebig genauen Approximation* war und von Archimedes zum Beweisen seiner heuristischen Methoden und Berechnungen genutzt wurde, fußt auf dem *Wegnahmesatz.* Mithilfe dessen wurde gezeigt, dass die übrigbleibende Differenz, also der Fehler zwischen der gesuchten Größe und der zur Annäherung verwendeten Größe beliebig verkleinert werden konnte.

Der Gedanke einer „beliebig genauen Approximation" wurde somit zentral, er ließ die Mathematiker/innen nicht mehr los. Er wurde zur deren Spielwiese und forcierte immer „neuere" Begriffs-Ausprägungen.

Einen ersten Schritt wagten die „Schwerpunktrechner". Valerio und Stevin nutzten das *Archimedische Axiom* für ihre Berechnungen und Überlegungen. Lässt sich eine Beziehung zwischen zwei Größen F_1 und F_2 derart herstellen, dass $|F_1 - F_2| < \varepsilon$ (wobei ε eine beliebig klein gewählte positive reelle Zahl darstellt), dann argumentierte Stevin (Baron 1987, zit. nach Sonar 2011, S. 170):

1. „Unterscheiden sich zwei Größen, dann unterscheiden sie sich um eine endliche Größe.
2. Diese Größen unterscheiden sich um weniger als eine endliche Größe.
3. Diese Größen unterscheiden sich nicht."

Somit sind F_1 und F_2 gleich (groß). „Weniger als eine endliche Größe" war der Bezug zum Archimedischen Axiom, und dieses wurde dementsprechend auch in die Beweise miteinbezogen.

Durch Kepler, Cavalieri, Fermat und später Leibniz und Newton kam die *infinitesimale Größe*, das *Unendliche-Kleine*, immer mehr ins Spiel, wobei sie auf unterschiedliche Weise genutzt wurden. Doch diese Größen waren noch nicht definiert, und es hat (fast) den Anschein, als wären sie damals rein intuitiv genutzt worden. Cavalieris Ideen wurden auch unter anderem von Galilei kritisiert (siehe S. 27). So musste sehr wohl darauf geachtet werden, wie sie genutzt werden sollten. Leibniz' Brief an Varignon, in dem er schreibt „daß der Irrtum geringer ist als irgendeine angebbare Größe, da es in unser Macht steht, das Unvergleichbarkleine, - das man ja immer so klein, als man nur will, annehmen kann - zu diesem Zweck hinlänglich zu verringern" (zit. nach Meschkowski 1961, S. 54), zeigt, wie er sein „dx" verstand, nämlich im Sinne des Archimedischen Axioms – sprich, den Fehler beliebig klein verringern zu können.

Schließlich gab Weierstraß eine befriedigende Antwort auf die Frage, was dieses Unendlich-Kleine nun sei, mit der Definition (Sonar 2011, S. 525):

> *„Eine unendlich kleine Größe ist eine Funktion φ der Variablen h derart, daß man zu gegebenem ε immer ein δ mit der Eigenschaft finden kann, daß für alle Werte von h, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist, $\varphi(h)$ kleiner als ε ist."*

All diese Ideen, Überlegungen und Methoden führten letztlich zur heutigen Definition des Grenzwerts (einer Folge) (hier aus Forster 2004, S. 28):

> „Sei $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt konvergent gegen $a \, \epsilon \, \mathbb{R}$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \, \epsilon \, \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. [...] Konvergiert (a_n) gegen a, so nennt man a den Grenzwert oder den Limes der Folge [...]."

Diese Definition kommt einem nun fast vertraut vor und wirkt durchaus lebendig und gar nicht so statisch oder befremdend. Es lassen sich ebenso die Ideen von Eudoxos, Archimedes, Stevin usw. erkennen.

In moderner Ausdrucksweise sind Stevins Größen F_1 und F_2 (veränderliche) Größen, also Folgen, welche wir zu einer Folge F_n zusammenfassen können, die sich einer dritten (fixen) Größe F_G nähert. Nun überlegt Stevin folgendermaßen: Falls sich die veränderlichen Größen und die fixe Größe „um weniger als eine endliche Größe" unterscheiden, dann sind sie gleich und nicht verschieden. Wie entscheiden wir (und Stevin) das? Natürlich mit Hilfe des Wegnahmesatzes und des Archimedischen Axioms als Kriterium, d.h. wenn wir die Differenz der fixen Größe und der annähernden Größen beliebig klein, also kleiner als jede beliebige Größe machen können… sprich die Differenz eine unendlich kleine Größe wird, womit wir letztlich bei Weierstraß gelandet wären.

Die einzelnen Stationen eignen sich, um die (fundamentale) Idee, welche dem Grenzwertbegriff innewohnt, den Schülern/innen vor Augen zu führen. „Den Fehler (Irrtum) beliebig (genau) verkleinern“ zu können bzw. „eine beliebig genau Approximation“ sind auch gute Verbalisierungen des formalen Grenzwertbegriffs (vgl. Danckwerts & Vogel 2010, S. 26).

Überlegungen zum Problemfeld: Der widersprüchliche Umgang mit der „Unendlichkeit“

Die verschiedenen Paradoxien eignen sich hier optimal, um die Zwickmühlen, das Problematische des Begriffs der Unendlichkeit zu offenbaren, zu thematisieren und letztlich (hoffentlich) auch aufzulösen. Den Schülern/innen gehört dabei auf jeden Fall klar gemacht, was hier zu gedanklichen Verstrickungen führt bzw. führen kann.

Wie bei Heuser (2008, S. 224) zu lesen ist, hat Cantor „den Satz des hl. Thomas[16] ernst genommen: ‚lmpossibile est i'1finitum transire‘ (‚Es ist unmöglich, das Unendliche zu durchlaufen‘)“ und Heuser fügt dazu: „‚Zählen‘ ist kein Durchlaufen, sondern ein Vergleichen. Es hat zu tun mit der wohl elementarsten Operation unseres Geistes“. Um unendliche Mengen zu vergleichen, zu beweisen, dass sie *gleichmächtig* sind, müssen „diese umkehrbar eindeutig und ohne Rest gekoppelt (‚gepaart‘) werden können“ (ebd., S. 214) – d.h. es muss zwischen ihnen eine bijektive Abbildung möglich sein.

Die Möglichkeit der Angabe einer bijektiven Abbildung zwischen Quadrat und Strecke ist der Beweis dafür, dass Quadrat und Strecke gleichmächtig sind. Dies gelang Cantor auch, wobei er wie folgt vorging (s. Sonar 2011, S. 568):

„Sind die Koordinaten eines Punktes im Einheitsquadrat gegeben durch

$$x = 0.a_1a_2a_3a_4 \dots$$
$$y = 0.b_1b_2b_3b_4 \dots,$$

dann konstruiert Cantor die Abbildung als

$$(x, y) \leftrightarrow 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4 \dots "$$

[16] Thomas von Aquin war ein vehementer Gegner des Aktual-Unendlichen – und so sehen wir wieder ein Beispiel für die Offenheit bzw. Bereitschaft, auch Sichtweisen seiner Gegner zu respektieren und zu nutzen.

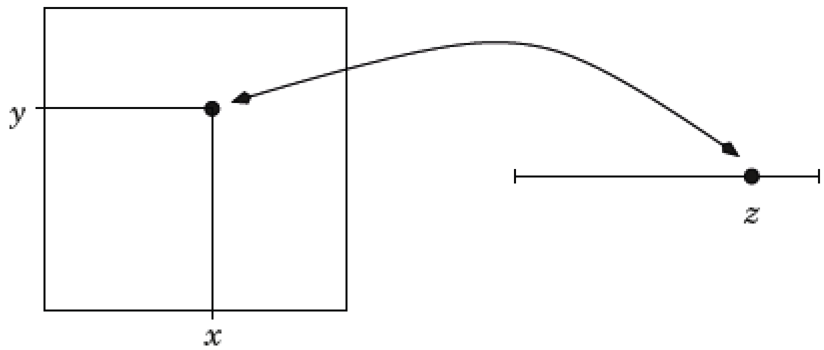


Abb. 18: „Bijektive Abbildung eines Quadrates auf eine Strecke“ (aus Sonar 2011, S. 569)

Cantor übermittelte diesen Beweis seinem Freund Dedekind, dem dabei auffiel, dass diese Abbildung allerdings nicht stetig ist, und dass das „mit der Nichteindeutigkeit der Zahldarstellung zu tun hat“ (Sonar 2011, S. 569).

Das ist nicht (unbedingt) weiter störend, denn der Beweis ist dennoch gültig und führt uns das Unglaubliche bzw. die Macht der Mathematik gut vor Augen. Natürlich werden wir nie fertig, wenn wir versuchen, die Abbildung vollständig „als Prozess“ durchzuführen, aber das machen wir auch nicht – wir durchlaufen nicht, wir vergleichen (bloß). So lösen sich die Paradoxien, welche gegen die sinnvolle Auseinandersetzung mit dem Aktual-Unendlichen sprechen, (fast) auf. Natürlich spricht es gegen unsere erste bzw. gewohnte Anschauung, dass unterschiedlich lange Strecken *gleichviele Punkte* enthalten sollen oder dass die (unendliche) Menge der geraden Zahlen, als Teil der (unendlichen) Menge der natürlichen Zahlen, gleich viele Elemente enthalten soll. Genau dies nimmt Zenon mit seinen Paradoxien auf, er wendet sich sowohl gegen atomistische als auch kontinuierliche Vorstellungen - aber wir haben durch Cantor eine Grundlage erhalten, uns darüber auszutauschen und den Paradoxien entgegentreten zu können.

Können uns diese Überlegungen helfen, unendliche Grenzprozesse anders zu sehen? Bei Grenzwertprozessen haben wir es mit Folgen zu tun. Wenn wir nun bedenken, dass eine Folge eine Abbildung, also eine Funktion von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n$ ist, dann können wir alle erhaltenen Werte der Folge abzählen, und daher haben wir sie gewissermaßen (mathematisch) unter Kontrolle und können auf dem Papier und in Gedanken das Archimedische Axiom grenzenlos nutzen und jedes noch so kleine ε unterbieten. Der dynamische Aspekt, welcher in der Grenzwertdefinition noch immer enthalten ist und sich durch das ewige Spiel, zu jeder neuen Zahl ε einen passend Index für a_n zu finden, so dass ich wieder innerhalb der durch ε vorgegebenen Genauigkeitsschranken bin, auszeichnet, kann so erhalten bleiben, weil wir einen anderen Umgang gefunden haben. Denn die Mathematik schreitet mit Hilfe von Cantor ein, und zwar mit einer simplen Überlegung: Hast du alle Zeit der Welt, so habe ich sie auch, und dadurch, dass wir eine Folge (reeller) Zahlen mittels der abzählbaren Menge $\mathbb{N}$ durchwandern, können wir jede Zahl erreichen und unsere Approximation verbessern.

6. Resümee

Eine Auseinandersetzung mit der Geschichte ist vor allem für die Lehrperson wichtig und interessant, denn diese bekommt dadurch eine zusätzliche Sichtweise und kann daraus Hinweise und Lehren für den Unterricht bzw. den Umgang mit Schwierigkeiten und Problemen seitens der Schüler/innen ziehen.

Für die Lehrperson ist es dabei wesentlich, einzusehen bzw. zu akzeptieren, dass sich die Sichtweisen auf manche Dinge (wie z.B. es für sinnvoll zuhalten, die „beste Definition" herauszusuchen und mit dieser zu arbeiten) zwar im Sinne einer Verbesserung ändern können, jedoch die Hauptschwierigkeiten bestehen bleiben werden und auch müssen. Diese zwei Hauptschwierigkeiten sind in zwei Fragestellungen abgebildet, welche sich auf Erden und in absehbarer Zeit nie gänzlich beantworten lassen werden. Die eine Frage ist die nach dem Moment, dem Jetzt, also nach dem *unendlich Kleinen* und die andere die nach der (Existenz der) Unendlichkeit generell. Die Beschäftigung mit ihnen ist spannend und frustrierend zugleich, und mögliche Antworten darauf übersteigen unsere Vorstellungskraft. Einen möglichen (mathematischen) Ausweg aus diesem Dilemma zeigt uns eine Blick auf die Geschichte bzw. die Entwicklung des Grenzwertbegriffs: Wir können uns nur indirekt und unter Zuhilfenahme anderer Begriffe über diese Themen unterhalten und uns möglichst gut den Antworten annähern. Die Diskussion und die Annäherung können aber in höchster Präzision durchgeführt werden.

Die Mathematik stellt somit einen Raum zur Verfügung, in dem wir uns über Paradoxien und Dinge, die sich unserer Erkenntnis (fast) gänzlich entziehen, unterhalten können bzw. liefert Werkzeuge, welche uns einen operativen Umgang mit diesen ermöglichen. Die Mathematik kann so durchaus den Anschein erwecken, über diese Hauptschwierigkeiten erhaben zu sein. Aber das ist nicht ihre Absicht und auch nicht die Absicht der Mathematiker/innen. Wie wir beispielsweise gesehen haben, war es nicht so sehr die vermeintliche Existenz eines Aktual-Unendlichen, sondern die damit verbundenen Konsequenzen, welche große Probleme bereitete(n), und erst in Folge wurde die Existenz dessen (mehr als) in Frage gestellt. Dies sollten wir eben offen und ehrlich gegenüber den Schülern/innen thematisieren.

Des Weiteren zeigt uns die Geschichte, welche Probleme und Fragestellungen eine Motivation für die Mathematiker/innen darstellten. Die (fundamentalen) Ideen hinter den abstrakten Begriffen lassen sich damit gut darstellen und entwickeln. Sie bieten einer Lehrperson Vorbilder, Hilfen und Beispiele, mit denen die Probleme und Schwierigkeiten thematisiert werden können, ohne auf den Grenzwertbegriff direkt eingehen zu müssen. Zusätzlich dienen diese Beispiele, bzw. die damit aufgezeigten fundamentalen Ideen, den Schülern/innen als Anker, im Sinne einer *historischen Verankerung*, da sie die Grundvorstellungen und Intuition ansprechen und somit unabhängig von der jeweiligen Einstellung der Schüler/innen einen Lernprozess anstoßen.

Die Geschichte kann somit der Lehrperson als Hilfestellung dienen, und das auf verschiedene Art und Weise. Einerseits bekommt sie selbst eine zusätzliche Sichtweise der Dinge bzw. mathematischen Begriffe. Andererseits kann sie direkt die Geschichte als Quelle für Beispiele und andere Unterrichtsinhalte nutzen. Der Vorteil dabei ist, dass die Geschichte vielfältig und fast nach Belieben einsetzbar ist und genau diese Vielfalt sollten wir den Schülern/innen vor Augen führen. Denn sie zeugt von dem Spannungsverhältnis, welches der Mathematik innewohnt: verschiedene und unterschiedliche Einstellungen bzw. Ansichten drehen sich um eine fundamentale Idee – hier bezogen auf den Grenzwertbegriff. Dies zeigt, dass die Mathematik kein starres, immer schon fertiges Produkt war und auch nicht ist, sondern eine durchaus lebendige Wissenschaft, welcher sich die Schüler/innen über verschiedene Zugänge nähern können.

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit befasst sich mit Problemen im Umgang mit dem Grenzwertbegriff und der Frage, ob und inwiefern uns (Lehrpersonen) die Auseinandersetzung mit der Geschichte der Entwicklung des Grenzwertbegriffs helfen kann, (um) Verständnisproblemen und Schwierigkeiten seitens der Schüler/innen besser entgegenzukommen.

Nach der Einleitung widmet sich das 2. Kapitel der Genese des Grenzwertbegriffs, wobei u.a. die Fragen „Warum hat die Entwicklung des Grenzwertbegriffs so lange gedauert?“, sowie „Hatten die ‚alten Griechen‘ in der Antike schon eine Ahnung von diesem Begriff?“ miteinbezogen werden. Deswegen wird ein relativ langer Zeitraum, angefangen von der Antike bis herauf ins 20. Jahrhundert, in diesem geschichtlichen Abriss beleuchtet.

Im 3. Kapitel wird die Rolle des Grenzwertbegriffs in der heutigen Zeit, sowohl in der (klassischen) Analysis als auch im Mathematikunterricht kurz dargestellt: In der (klassischen) Analysis wird der Grenzwertbegriff am Anfang mittels präziser Definition eingeführt und dient fortan als Grundlage für weitere Begriffe, wie z.B. die Ableitung. Im Gegensatz dazu tendieren die schulischen Lehrpläne in Richtung eines anschaulich-geprägten Grenzwertbegriffs.

Anschließend beschäftigt sich das 4. Kapitel mit Problemen und Schwierigkeiten im Umgang mit dem Grenzwertbegriff. Dabei werden zwei Aspekte verfolgt: Einerseits wird anhand dreier Punkte aufgezeigt, dass es von Vorteil ist, über die Probleme Bescheid zu wissen, welche Schüler/innen beim Erlernen und Verstehen von Grenzprozessen und des Grenzwertbegriffs haben können. Andererseits werden diverse Studien und Artikel, welche sich auf unterschiedliche Weise mit der Problematik im Umgang mit dem Grenzwertbegriff beschäftigen, vorgestellt um in weiterer Folge Probleme und Schwierigkeiten der Schüler/innen angeben und benennen zu können. Diese Probleme und Schwierigkeiten werden dann sogenannten Problemfeldern zugeordnet, welche für mich die „Hauptprobleme“ darstellen und in gewisser Weise der Grund für andere Probleme und Schwierigkeiten sind bzw. diese mitbedingen. Diese Problemfelder sollen vor allem einen einfacheren Überblick ermöglichen und sie sind für die angestellten Überlegungen im darauffolgenden Kapitel hilfreich.

Das 5. Kapitel beschreibt zwei Folgerungen, welche aufgrund der Ergebnisse in den vorangegangen Kapitel gezogen werden. Des Weiteren beschäftigt es sich mit der oben gestellten Frage ob und inwiefern uns (Lehrpersonen) die Auseinandersetzung mit der Geschichte der Entwicklung des Grenzwertbegriffs helfen kann, (um) Verständnisproblemen und Schwierigkeiten seitens der Schüler/innen besser entgegenzukommen. Dabei werden Möglichkeiten beschrieben, die Geschichte als Hilfesteller und Ratgeber zu nutzen, wobei die Problemfelder miteinbezogen werden.

Literaturverzeichnis

Ableitinger, C. & Heitzer, J. (2013). Grenzwerte unterrichten. Propädeutische Erfahrungen und Präzisierungen, *Mathematik Lehren*, 180, S. 2-10

Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten, *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 44, S. 238–243

Bauer, J. (2008). *Lob der Schule.Sieben Perspektiven für Schüler, Lehrer und Eltern.* München: Wilhelm Heyne Verlag

Besser, M. (2014). Lehrerprofessionalität und die Qualität von Mathematikunterricht. Quantitative Studien zu Expertise und Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. In: Kaiser, G., Borromeo-Ferri, R. & Blum, W. (Hrsg.). *Perspektiven der Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer Spektrum

Breidbach, O. (2015). *Geschichte der Naturwissenschaften. Die Antike.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum

Bundesministerium für Bildung und Frauen / Internetseite (2015). Zugriff am 6. Juni 2015 unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.html

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2010). *Analysis verständlich unterrichten*. Berlin, Heidelberg: Spektrum Verlag

Deiser, O. (2008). *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen (2. Aufl.).* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Deiser, O. (2012). *Erste Hilfe in Analysis.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Deiser, O. (2013). *Analysis 1 (2. Aufl.)*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Ewald, W. & Sieg, W. (2013). *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Fishbein, E. (2001). Tacit Models and Infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 48, 2/3, S. 309-329

Fishbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity, *Educational Studies in Mathematics,* 10, S. 3-40

Friedrich. H, (2001). *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*. Dissertation. Paderborn: Universität Gesamthochschule Paderborn, Fachbereich 17 Mathematik und Informatik

Göbel, D. (1998). *Glanzlichter der Philosophie.* Augsburg: Bechtermünz Verlag

Hairer, E. & Wanner, G. (2011). *Analysis in historischer Entwicklung*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Henning, A. & Hoffkamp, A. (2013). Der analytische Schritt. Kann man Grenzwerte erlebbar machen?, *Mathematik Lehren*, 180, S. 38-40

Heuser, H. (2003). *Lehrbuch der Analysis, Teil 1 (15. Aufl.).* Wiesbaden: Teubner Verlag

Heuser, H. (2008). *Unendlichkeiten. Nachrichten aus dem Grand Canyon des Geistes.* Wiesbaden: Teubner Verlag

Hischer, H. (2012). *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung*. Wiesbaden: Springer-Spektrum

Hischer, H. & Scheid, H. (1995). *Grundbegriffe der Analysis.* Berlin, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Jahnke, H. N. (Hrsg.) (1999). *Geschichte der Analysis.* Berlin, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Kaplan, R. (2005). *Die Geschichte der Null (5.Aufl.).* München: Piper-Verlag

Lepmann, L. & Lepmann, T. (2008). Folgen – eine Einführung in unendliche Prozesse, *Der Mathematikunterricht,* 54 (2), S. 14-24

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen - Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses, *Journal für Mathematik Didaktik*, 34, S. 73–97

Menghini, M. (2008). Konstruktive Methoden für den Aufbau des Grenzwertkonzepts, *Der Mathematikunterricht,* 54 (2), S. 4-12

Meschkowski, H. (1961). *Denkweisen großer Mathematiker*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlags GmbH

Monaghan, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 48, 2/3, S. 239-257

Müller, M. & Halder, A. (1984). *Kleines Philosophisches Wörterbuch (11. Aufl.).* Freiburg: Herder Verlag

O'Shea, D. (2010). *Poincarés Vermutung (3. Aufl).* Frankfurt am Main: S. Fischer Verlag

Paradies, L. & Linser, H. J. (2001). *Differenzieren im Unterricht.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

Paturi, F. R. (2008). *Mathematische Leckerbissen. Das Buch für Querdenker.* Düsseldorf: Patmos Verlag

Schorcht, H. M. (2013). Mathematik als historischen Prozess wahrnehmen. In: Rathgeb, M., Helmerich, M., Krömer, R., Lengnink, K. & Nickel, G. (Hrsg.) (2013). *Mathematik im Prozess* (S. 279-290). Wiesbaden: Springer Spektrum

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on the processes and objects as different sides oft he same coin, *Educational Studies in Mathematics,* 22, S. 1-36

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, S. 371-397

Sonar, T. (2011). *3000 Jahre Analysis.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Struve, H., & Witzke, I. (2013). Zur historischen Entwicklung des Begriffs „Grenzwert von Funktionen“, *Mathematik Lehren*, 180, S. 44-45

Tall D. (1980): Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 170–176

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics, *Mathematics Education Research Journal,* 20 (2), S. 5-24

Tall, D. & Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, 82, S. 44–49

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics,* 12, S. 151-169

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II; Band 1: Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis.* Braunschweig - Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlags GmbH

Tsamir, P. (1999). The Transition from Comparison of finite to the Comperison of infinite Sets: Teaching prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics,* 38, S. 209–234

Vollrath, H.-J. (1968). Die Geschichtlichkeit der Mathematik als didaktisches Problem. In: *Neue Sammlung* 8 (1968), 108-112

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (2. Aufl.).* Berlin, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse, *Journal für Mathematik Didaktik*, 19 (98) 4, S. 257-291

Weiss-Pidstrygach, Y., Kvasz, L. & Kaenders, R., (2013). Geschichte der Mathematik als Inspiration zur Unterrichtsgestaltung. In: Rathgeb, M., Helmerich, M., Krömer, R., Lengnink, K. & Nickel, G. (Hrsg.) (2013). *Mathematik im Prozess* (S. 291-304). Wiesbaden: Springer Spektrum

Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (3), S. 219-236

Williams, S. R. (2001). Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids, *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (4), S. 341-367

Wußing, H. (2008a). *6000 Jahre Mathematik – Teil 1.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Wußing, H. (2008b). *6000 Jahre Mathematik – Teil 2.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Zorich, V. A. (2006). *Analysis 1.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag

Lebenslauf

Angaben zu meiner Person

Name: Motsch Maximilian

Geburtsdatum und –ort: 22.01.1986 in Neunkirchen

Staatsbürgerschaft: Österreich

Name und Beruf der Eltern: Martina Motsch, diplomierte Sonderpädagogin
Gerhard Motsch, AHS-Lehrer für Religion

Schulische Ausbildung

1992 – 1996: Volksschule Wartmannstetten

1996 – 2004: Bundesrealgymnasium Neunkirchen

Grundwehrdienst / Zivildienst

2004 – 2005: Lastkraftfahrer in Götzendorf beim ZEV

Studium

2005 – 2015: Lehramtsstudium an der Universität Wien in den Fächern Bewegung & Sport und Mathematik

Berufliche Ausbildung

2003: Ausbildung zum Tennisübungsleiter (NÖTV)

2009: Ausbildung zum Snowboardinstruktor (Wiener Landesskiverband)

2010: Ausbildung zum staatlich geprüften Tennisinstruktor (BSPA Wien)

Berufliche Erfahrungen

Snowboardbegleitlehrer bei Schulskikursen seit 2006

Regelmäßige Tätigkeit als Tennislehrer beim ATSV Ternitz und TC Neunkirchen seit 2003

Nachhilfe in Mathematik

2011 – 2014: Sondervertrags-Lehrer (Fach Bewegung und Sport) am PORG 23 St. Ursula/Wien