DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Logik im AHS-Mathematikcurriculum und in Unterrichtsmaterialien"

verfasst von / submitted by

Max Koller

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 423 406
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Chemie
Betreut von / Supervisor:	Doz. Dr. Franz Embacher

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.
Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.
Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Wien,
Mai 2017 Max Koller

DANKSAGUNG

Mein besonderer Dank gilt Franz sowie meinen Eltern.

„Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.“

(Quelle: Wittgenstein, Ludwig: Tractatus Logico-Philosophicus, 5.6.)

ZUSAMMENFASSUNG

Gegenstand dieser Arbeit ist die Rolle der Logik (insbesondere der Aussagenlogik) im Mathematikunterricht. Es werden zuerst die Lehrpläne der letzten Jahrzehnte und die Inhalte bezüglich Logik darin analysiert. Sodann werden Schulbücher der 9.Schulstufe diesbezüglich betrachtet. Dabei werden wir unter anderem feststellen, dass mit der Verbreitung von standardisierten Testungen die Aussagenlogik aus dem Lehrplan verschwunden ist. Zumindest findet sie explizit keine Erwähnung mehr, aber ist sie deshalb wirklich verschwunden?

Hinter vielen Aufgaben steckt mehr Aussagenlogik als es den Anschein hat. Es stellt sich daher die Frage, ob es wirklich sinnvoll ist, auf eine explizite Erläuterung der Grundregeln und Schlussregeln zu verzichten.

In Anbetracht der Tatsache, dass sich kaum ein anderes Kapitel der Mathematik so gut eignet, die Mathematik als eigene Sprache zu thematisieren, erscheint es mir wichtig, das auch zu tun. Nicht zu verachten ist die Rolle der Aussagenlogik beim Erlernen des Umgangs mit Variablen, dem Abstraktionsprozess beim Übersetzen von Alltagssprache in Mathematik und vieles mehr.

ABSTRACT

Subject of this work is the role played by propositional logic in Austrian math education.

First the last decades of curriculum changes regarding this point will be analysed. Thereupon a selection of 9th grade schoolbooks will be reviewed. While doing this we will find that the growing influence of standardized tests goes together with disappearance of propositional logic from the curriculum. But does that mean logic has disappeared from math education for good?

Behind quite a lot of math examples, there seems to be more logic hidden than one might think. This leads us to the question, if it really makes sense to renounce an explicit theming of propositional logic and its basic rules in class.

Considering the fact that there barely is another chapter within maths as well as logic suited to talk about math being a unique language, it seems to me that it is reasonable to do so. Despite that propositional logic has a great value in terms of teaching the proper use of variables, translating problems from everyday language into math and some other.

INHALT

1.EINLEITUNG

Ich habe mich immer für einen Rationalisten gehalten. Schon als ich noch nicht einmal wusste, was es hieß, ein solcher zu sein. Pragmatisches, logisches Denken erschien mir als anstrebenswert. Früh begann ich mich deshalb für Logik zu interessieren und als ich Wittgensteins *tractatus logico-philosophicus* zum ersten Mal las, habe ich mein rationales Herz an sie, die Logik, verloren.

In meinem Mathematikstudium begann ich sie dann erst so richtig zu begreifen. In all ihrer wunderschönen, geschliffenen Schlichtheit breitete sich etwas vor mir aus und veränderte mich. Das Verständnis der Logik bereicherte mich um eine weitere Perspektive, eine weitere Brille, durch die ich diese wunderbare Welt in ihrer unfassbaren Komplexität betrachten konnte. Durch diese Brille ergab für mich vieles Sinn, was vorher keinen hatte.

Als es darum ging, ein Diplomarbeitsthema zu finden, dachte ich daran, was mich zur Mathematik gebracht hatte und was ich darin fand, und vor allem warum ich so gerne Mathematik unterrichten wollte (und es mittlerweile auch seit beinahe zwei Jahren tue). Ich empfand, dass mir der Gedanke daran, jungen Menschen diese neue Perspektive zu vermitteln, viel Kraft gab. Eine Perspektive, die in einer Welt, die einen unaufhörlich mit Informationen überflutet, zunehmend wichtiger wird. Denn diese Perspektive verleiht einem die Macht, etwas mehr Ordnung in das Chaos zu bringen. Mit ihr kommen verbesserte Fähigkeiten im Erkennen von Zusammenhängen und die Fähigkeit kritisch Argumente zu hinterfragen. Letzteres ist besonders wichtig zur selbstständigen Bildung einer Meinung, und das wiederum erachte ich als oberstes Prinzip des an mich gerichteten Bildungsauftrags. Nämlich die Schülerinnen und Schüler zu ihrer Rolle als selbstständige, kritisch denkende Mitglieder unserer Gesellschaft zu befähigen. Gerade wenn es um Argumente geht, spielt die Logik eine entscheidende Rolle, entstand sie doch mitunter aus der Analyse solcher durch Aristoteles und die Sophisten. Die geniale Formalisierung durch Arbeiten von Frege, Russel, Whitehead und Peirce haben mich auch beeindruckt, als ich im Zuge dieser Arbeit zwei Lehrveranstaltungen am Institut für Philosophie besuchte. Der Grundkurs in Logik bei Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Dr. Esther Ramharter und die zugehörige Übung bei Mag. Dr. Günther Eder im WS2016 waren mir nicht nur wichtige Inspiration für diese Arbeit, sondern haben auch ein Feuer entzündet, das ich seit einiger Zeit in mir schlummernd vermutet habe: eine Leidenschaft für die Philosophie. Diese hoffe ich in den kommenden Semestern durch ein neues Studium weiter zu entfachen.

Beim Lesen des neuen Lehrplans, der ab September 2016 mit der Einführung der neuen Oberstufe (NOST) in Kraft trat, musste ich leider feststellen, dass Logik als Teilgebiet der Mathematik keine explizite Erwähnung mehr findet. Ich wollte verstehen, woher diese Entscheidung kam, was möglicherweise die Argumente dafür waren und ob sie gerechtfertigt war. Ich vermutete großes Potential in der Logik, vor allem in Hinsicht darauf, die Mathematik als eigene Sprache zu verstehen. Mir schien dieser auch im Lehrplan häufig betonte Aspekt der Mathematik als sehr sinnvoll und wahr. Sie den Schülerinnen und Schülern als eine neue Sprache zu präsentieren fand ich aufregend. Aber zu einer Sprache gehört eine Grammatik, und die Logik eignet sich ideal, um die einfachsten Grundregeln zu veranschaulichen. Sie ist das perfekte Modell, um vor Augen zu führen wozu wir Mathematik verwenden: Um die Welt zu abstrahieren und zu beschreiben. Durch diese Abstraktion lassen sich Dinge verstehen und Probleme lösen, bei denen wir zuvor ratlos waren. Die Logik und die ersten einfachen Übungen in der Aussagenlogik bringen genau das auf den Punkt. Dabei könnte man doch in Kauf nehmen, dass das Ganze ein wenig unrealistisch und banal wirkt, oder? Schließlich beginnt ein Maler sein Bild auch zuerst mit einer Grundierung und abstrakten Skizzen und wird dann, nach und nach, genauer und detaillierter. Ist die Logik nicht in gewisser Weise wie die Grundierung der Mathematik? Ist es wirklich sinnvoll, einem Malerlehrling gleich zu erklären, wie man die Details des letzten Abendmals nachzeichnet? Sollte man sich nicht die Zeit nehmen und zunächst erklären, wie man eine Leinwand himmelblau vorbereitet?

2.AHS LEHRPLÄNE

Bei der Untersuchung der Lehrpläne auf Inhalte, die einen Bezug zur Logik besitzen, beschränke ich mich darauf, Textstellen zu suchen, die offensichtlich einen direkten Bezug zur Logik aufweisen. Denn einen indirekten Bezug hat wohl jedes einzelne Teilgebiet der Mathematik, ist sie doch als Ganzes ein schönes Gebilde aus *schlüssigen*[1] logischen Argumenten. Es kann also nicht Sinn und Zweck meiner Arbeit sein, diese Zusammenhänge zu beleuchten, denn sie sind ja offensichtlich.

Vielmehr geht es darum, Schlagworte zu identifizieren, die in direktem Zusammenhang mit logischer Syntax oder Semantik stehen. Die einfachsten Fälle hierfür sind „*Logik*", „*Aussagenlogik*", „*logische Denkweisen*", etc.(vgl RIS, 2016a)

Aber auch Passagen, wie „*begründen können...*", „*argumentieren können...*", „*beschreiben können...*" stehen in direktem Zusammenhang mit Logik, begründet sich jene doch auf nichts Anderes als auf das Bestreben, *gültigen* und *schlüssigen* Argumenten klassifizierbare Strukturen zu geben (vgl RIS, 2016a).

Letztendlich gibt es noch einige explizite Begriffe aus dem Lehrstoff, wie zum Beispiel „*Mengen*" oder „*Stochastik*", an denen ich einen direkten Zusammenhang zur Logik verortet sehe. Dies tritt am Offensichtlichsten in der gleichwertigen Bedeutung der Junktoren „*und*", „*oder*", „*nicht*" und „*wenn..., dann...*" hervor. Bereiche der Mathematik, in welchen diese Junktoren von hoher Relevanz sind, will ich auch als mit der Logik in direktem Zusammenhang stehend betrachten.

Auch Gebiete, in denen das Verständnis von logischen Quantoren von maßgeblicher Bedeutung für das Verständnis des Ganzen ist, haben einen mit der

[1] *Schlüssiges* Argument im offiziellen Sinn, siehe Abschnitt 2.4 für die Definition

Logik eng verbundenen Charakter. Ein Beispiel hierfür ist die korrekte Formulierung des Grenzwertbegriffs:

Kann die Genialität, die hinter „*Für jedes Epsilon größer als 0 gibt es nur endlich viele Glieder, die weiter von a entfernt sind als Epsilon*“ steckt, begreifbar gemacht werden?

Wohl nur dann, wenn die verwendeten Quantoren begriffen werden!

Jetzt will ich mich den offiziellen Lehrplänen zuwenden. Auf der Homepage RIS Datenbank finden sich alle Bundesgesetzblätter, die bezüglich der Lehrpläne seit 1989 veröffentlicht wurden (RIS, 2016a). In diesem Zeitraum gab es mehrere kleine Änderungen, die meist nicht für das hier diskutierte Thema relevant sind. Und eine große Lehrplanneuerung, die 2004 zum ersten Mal als Artikel erschien. Und natürlich auch die neueste Änderung, die ab dem Schuljahr 2016/17 in Kraft getreten ist.

Ich will mich, um den Diskussionsrahmen nicht zu sprengen, in erster Linie dem AHS Oberstufenlehrplan zuwenden, um genau zu sein, der 9.Schulstufe, denn dort ist die Aussagenlogik im „altem“ Lehrplan (Stand 1989) verortet.

2.1 DER „ALTE“

Als den *„alten“* Lehrplan werde ich jenen bezeichnen, welcher 1990 in Kraft trat.

Aus der Analyse dieses Alten, dessen erste Auflage von 1989 stammt, ergeben sich folgende Punkte mit Bezug zur Logik (RIS, 2016c):

- *Logik wird mehrmals explizit erwähnt*
- *Kapitel: Mengen und logische Begriffe (Lehrstoff 5.Klasse)*
- *Aus dem Erweiterungsartikel 7046:*

  „(...) Erweiterung und Vertiefung von Inhalten, die im Pflichtgegenstand behandelt wurden, etwa:

  - Gleichungen
  - Ungleichungen
  - Zahlen
  - Logik und Mengen
  - Vektoren
  - (...)“*(RIS, 2016c)*
- *Erkennen logischer Strukturen (mehrmals)*
- *Eine ganze Bandbreite, direkt mit Logik in Verbindung stehender Begriffe:*
- *„Im Zusammenhang mit dem Erwerb von mathematischem Wissen und Können und dem Anwenden von Mathematik sind folgende Lernziele anzustreben:*

  - Argumentieren und exaktes Arbeiten.

  -Insbesondere: präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen); Vollständigkeit einer Argumentation überblicken;“ (RIS, 2016c)
- *„Erkennen logischer Strukturen; Rechtfertigen von Entscheidungen...“ (RIS, 2016c)*
- *Das Wort „Beschreiben“ kommt in der ersten Version alleine 39 mal zum Einsatz.*

Zusammenfassend möchte ich vor allem einen Punkt hervorheben: Im alten Lehrplan finden *sowohl* Semantik *als auch* Syntax der Logik eine explizite Erwähnung. Es wird also von den Verfassern beides als grundlegende mathematische Fähigkeit erachtet, die es zu erwerben gilt.

2.2 DER „GEKÜRZTE“

Die erste Version des bis 2016 geltenden Lehrplans stammt von 2004. Wenn man sich diesem Artikel widmet, nachdem man den Alten exzerpiert hat, fällt zuerst eines auf: Er ist radikal kürzer was die Anzahl an Seiten betrifft. Sein Vorgänger aus 1990 umfasste 34, die Neuerung kommt allerdings mit nur 6 Seiten aus.

Nach gründlicher Lektüre sind folgende Punkte festzuhalten.

Logik wird nicht mehr explizit erwähnt:

> „**Mathematische Kompetenzen**
>
> *Kompetenzen, die sich auf Kenntnisse beziehen:*
>
> Sie äußern sich im Vertrautsein mit mathematischen Inhalten aus den Bereichen Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik.“ (BMB, 2016)

Der Begriff *Beschreiben* spielt weiterhin eine zentrale Rolle, er kommt insgesamt 19 Mal zum Einsatz. Relativ zur Seitenanzahl ist er in seiner zentralen Rolle sogar verstärkt worden.[2](vgl BMB, 2016)

Zusätzlich zum Begründungsbegriff kommen auch andere Formulierungen, die einen direkten Zusammenhang mit der Logik beinhalten, sehr viel häufiger vor. Praktisch jedes einzelne Teilgebiet beinhaltet solche Keywords.[3](vgl BMB, 2016)

Die Symbole und die Notation der Aussagenlogik werden nicht mehr explizit angeführt, auf sie kann im Mathematikunterricht also verzichtet werden. Die Semantik, also die Argumentationsstrukturen, die auf sie [die Logik] zurückgehen und das Erkennen von *gültigen* und *schlüssigen* Argumenten, sind jedoch weiterhin im Lehrplan sehr stark vertreten. Die Bedeutung dieser werden sogar durch die Keywords sehr stark hervorgehoben. Bevor ich mehr ins Detail gehe und mich auf

[2]Im alten Lehrplan: rund 1,0 mal pro Seite; im neuen: rund 3,2 mal pro Seite
[3]Beispiele hierfür sind: „argumentieren“, „beschreiben“, „begründen“, „exakt Ausdrücken“, „folgern“,...

konkrete Textstellen beziehe, werde ich noch eine kurze Analyse des aktuellen Lehrplans darlegen.

2.3 DER „NEUE“

Das Dokument, auf das ich mich beziehe, ist mir im Frühjahr 2016 in meiner Funktion als Sondervertragslehrer an einer AHS zugestellt worden. Es handelt sich dabei um die aktuellste Fassung des Lehrplans, der ab dem Schuljahr 2016 in Kraft trat. Im späteren Verlauf der Arbeit habe ich das offizielle Dokument von der Rechtsinformationssystems-Homepage des Bundeskanzleramts zu Rate gezogen. Dieses wurde am 9.8.2016 hochgeladen.(RIS, 2016b)

Geringfügig ist der Artikel wieder länger als die Fassung von 2004, jedoch nicht wesentlich. Hauptsächlich geht dies auf eine genauere Beschreibung mathematischer Kompetenzen zurück. Das neue Kompetenzmodell, welches eine mathematische Kompetenz in Beziehung zu einer Inhaltsdimension, einer Handlungsdimension und einer Komplexitätsdimension setzt, ist zwar eine sinnvoll scheinende Erweiterung im Vergleich zur Vorgängerfassung, hat aber mit der in dieser Arbeit behandelten Fragestellung wenig zu tun. Am ehesten noch könnte man die aufgezählten Handlungsdimensionen im Lichte der Logik reflektieren, jedoch waren diese bereits in der Version von 2004 enthalten. Sie wurden nun unter dem gerade genannten Überbegriff zusammengefasst, anstatt alleine für sich zu stehen.

Für meine Analyse ergibt sich aus dieser neuen begrifflichen Handhabung kein Vorteil, da vor allem die eine Handlungsdimension „*Kritisch-argumentatives Arbeiten*“ in direkter Verbindung zum Thema steht:

- *Kritisch-argumentatives Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben. Das Beweisen von Behauptungen oder heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs.

(RIS, 2016b)

In den für diese Untersuchung wesentlichen Punkten entspricht die neue Fassung jener von 2004, lediglich einige Detailänderungen sind relevant.

Im nächsten Abschnitt widme ich mich den von mir schon angesprochenen Keywords und relativiere ihre Bedeutung, denn einige von ihnen verweisen nur in speziellen Kontexten auf einen logischen Hintergrund. Erst, wenn diese Keywords ausreichend gerechtfertigt sind, kann ich mich um spezielle Textstellen kümmern.

2.4 KEYWORDS

Bei der Betrachtung der drei Lehrplanfassungen stieß ich auf ein Problem. Genauer gesagt, bei den Artikeln von 2004 und 2016. Denn diese erwähnen Logik im Gegensatz zu ihrem Ahnen nicht explizit. Dies verhält sich übrigens im deutschen Lehrplan, nach den Änderungen in den 1970ern, nicht anders, wie Arnold Et al beobachten:

> „Im Beschluss der Deutschen Kultusministerkonferenz zu den einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA)Mathematik [7] besitzt Logik keinen großen Stellenwert. So taucht das Wort „Logik“ in dem 50-seitigen Dokument genau ein Mal auf, und zwar als einer von elf besonders geeigneten Themenbereichen für eine mündliche Prüfung.“(Arnold & Hartmann, 2007)

Da ich mich aber darum bemühe, die Stellung der Logik in diesen Dokumenten zu konkretisieren, benötige ich ein Tool, das ein Vergleichen der drei Artikel in dieser Hinsicht ermöglicht. Auch Arnold durchsucht das Dokument weiter nach mit der Logik verwandten Begriffe wie „Quantoren“ oder ähnliches, wird aber dabei nicht fündig. Im österreichischen Lehrplan kommen solche Begriffe auch nicht vor, deshalb muss ich mir etwas Anderes überlegen.

Wittgenstein bemüht sich in seinem *Tractatus logico-philosophicus* um knappe, präzise Begriffsdefinitionen, die der Sprache einen vollkommen logischen Charakter geben sollen. Keine Angst, liebe Leserinnen und Leser, inwieweit dieses Vorhaben überhaupt möglich oder sinnvoll ist, will ich hier gar nicht diskutieren. Ich will mir nur eine Grundidee daraus entlehnen. Nämlich die, dass Logik in unserer Sprache und in Begriffen enthalten ist.(Ramharter, 2016)

Natürlich ginge es zu weit zu behaupten, dass jeder Begriff und jeder Satz mit Logik zu tun hat, aber ich will versuchen, eine Liste von Worten anzuführen, welche im Lehrplan zentrale Rollen einnehmen und sich direkt auf die Logik beziehen.

Dabei handelt es sich um Ausdrücke, die eine derartige Stellung in Formulierungen einnehmen, dass der inhaltliche Anspruch, der aus dem Kontext hervorgeht, nur mit zumindest intuitivem Verständnis der Logik [seitens der Schülerinnen und Schüler] erfüllt werden kann.

Die Bedingungen die ich an ein nützliches Keyword stelle, sind also folgende:

1. *Es kommt in den untersuchten Lehrplänen relativ häufig vor.*
2. *Die Mehrheit seiner Erwähnungen ist in miteinander vergleichbaren Formulierungen eingebettet.*
3. *Die Bedeutung dieser Formulierungen stellt einen Anspruch an die Schülerinnen und Schüler, der nur Kraft intuitiven Verständnisses für Logik erfüllt werden kann.*

Einige Kandidaten für solche Keywords habe ich im ersten Abschnitt dieses Kapitels schon erwähnt. Prüfen wir sie nun auf diese drei Kriterien.

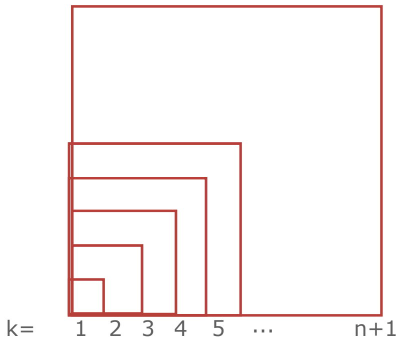
Erster Kandidat: Begründen

Der Begründungsbegriff impliziert streng genommen in jeder auffordernden Formulierung ein Verständnis für Argumentationsstrukturen. Viele der später diskutierten Autoren sehen das ähnlich. Kollosche macht dies sogar sehr explizit klar (vgl Kollosche, 2015, S. 154 f). Aber natürlich können auch zum Beispiel graphische Beweise der Teilbarkeitsregel eine gute Begründung darstellen. Um einen solchen graphischen Beweis führen zu können, muss man aber nichtsdestotrotz gültige logische Schlüsse zumindest in Gedanken verstanden haben. Zur besseren Vorstellung möchte ich hier ein Beispiel dafür angeben:

Begründe, dass folgende Aussage korrekt ist:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$$

Graphische Begründung:



Diese Begründung ist durchaus akzeptabel. Genau genommen ist es mehr als nur eine Begründung, es ist ein Beweis.

Die Lehrerin, beziehungsweise der Lehrer, setzt allerdings schon voraus, dass die Schülerinnen und Schüler dieses Bild nicht nur auswendig lernen, sondern auch verstehen, warum es sich um eine stichhaltige Begründung handelt. Die Voraussetzung, eine Begründung auch wirklich verstanden zu haben, gilt grundsätzlich. Ansonsten wäre die Forderung nach einer Begründung absurd. Daher steht jegliche Formulierung [also auch ein bildhafter Beweis] in direktem Zusammenhang mit dem Erkennen, Begreifen und Hantieren mit logischem Vorgehen.

Bedingungen 1.-3. sind demnach erfüllt. Begründen ist ein Keyword. Es findet im alten, gekürzten und im neuen Lehrplan jeweils 3 Erwähnungen. Damit ist klar: Logik ist zumindest implizit in allen drei Fassungen enthalten (vgl RIS, 2016a).

Zweiter Kandidat: Argumentieren

Mit dem Begriff der Argumentation verhält es sich derart, dass eine Beschreibung dieser Vokabel ohne Logik nicht möglich ist. Umgekehrt ist Logik ohne Argumente keine Logik. Diese Begriffe implizieren immer den anderen. Eine weitere Ausführung hierzu ist nicht notwendig.

Auch wird dieser Begriff in allen drei Fassungen mehrmals erwähnt. Im alten Lehrplan tritt der Begriff 40 Mal auf. In den beiden neueren jeweils nur 3 Mal. Wobei zu erwähnen ist, dass eine dieser drei Nennungen an der für mein Thema wichtigsten Stelle zu finden ist: der schon oben zitierten Kompetenz des kritisch-argumentativen Arbeitens. Der neu eingeführte Begriff der Handlungskompetenzen bezieht sich auf (nahezu) alle Kapitel des Stoffes. Im alten hingegen wurde er bei (nahezu) jedem Kapitel explizit erwähnt, deshalb folgt aus dem quantitativen Unterschied in diesem Begriff keine Abwertung der ihm zugrundeliegenden Relevanz innerhalb des Lehrplans. Vielmehr ist diese Veränderung lediglich mit dem Herausheben eines gemeinsamen Faktors zu vergleichen.

Dritter Kandidat: Beschreiben

Hier wird es problematisch, denn nicht jedes Vorkommen dieses Wortes stellt einen direkten Bezug zur Logik her.

Dieses ganze Kapitel zur Rechtfertigung der von mir verwendeten Keywords entstand nach meiner Präsentation der Fragestellung im Zuge des DiplomandInnen-Jour-Fixe der Mathematik Didaktik-Gruppe der Universität Wien. Einer der grundlegendsten Kritikpunkte bezog sich auf meine Idee, anhand von Keywords einen Zusammenhang zwischen Lehrplan und Logik herzustellen. Insbesondere der dritte von mir vorgeschlagene Begriff, um den es jetzt gerade geht, wurde in Frage gestellt. Die Kritik bezog sich vor allem auf eine unzureichende Rechtfertigung für einen direkten Zusammenhang zwischen „beschreiben“ und Logik. Diese will ich hier nun geben, denn im Kontext eines Lehrplans für das Fach Mathematik ist dieser Zusammenhang durchaus zwingend gegeben.

Das Problem hat sprachphilosophischen Charakter. Wenn wir im Alltag davon sprechen, etwas zu beschreiben, so setzt die Tätigkeit des Beschreibens nicht zwangsläufig ein logisches Verständnis voraus. Ich kann ein Gemälde beschreiben, ein Gefühl oder einen Menschen, ohne dabei auch nur im entferntesten Sinne logisch vorzugehen.

Nun bezieht sich das Beschreiben im Lehrplan aber in sämtlichen Erwähnungen immer auf mathematische Inhalte, wie folgende drei zufälligen Auszüge aus den Lehrplänen veranschaulichen:

Aus der 1990er Fassung:

Nichtlineare analytische Geometrie

Das analytische Beschreiben von geometrischen Objekten durch nichtlineare Gleichungen (Herleiten von Gleichungen), das analytische Untersuchen von geometrischen Beziehungen und das rechnerische Lösen von geometrischen Problemen sollen die Hauptaktivitäten der Schüler sein. Eine umfassende Behandlung der Kegelschnitte ist nicht erforderlich.

(RIS, 2016a)

Aus der 2004er Version:

Nichtlineare analytische Geometrie

- Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen

(BMB, 2016)

Aus dem 2016er Dokument:

Funktionen

- Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind, mittels Termen, Tabellen und Graphen beschreiben und über den Modellcharakter von Funktionen reflektieren können

(RIS, 2016b)

Ich werde nun kurz auf jedes Beispiel Bezugnehmen, bevor ich anschließend die allgemeine These, die mir vorschwebt, konkret formuliere.

Im ersten Beispiel wird an die Schülerinnen und Schüler der Anspruch gestellt, geometrische Objekte durch nichtlineare Gleichungen analytisch zu beschreiben. Dies setzt unter anderem voraus, dass die Beschreibenden begriffen haben, welche Bedeutung Parameter in gewissen allgemeinen Schreibweisen von Funktionen haben. Natürlich setzt die Verbindung zwischen einer Gleichung der Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

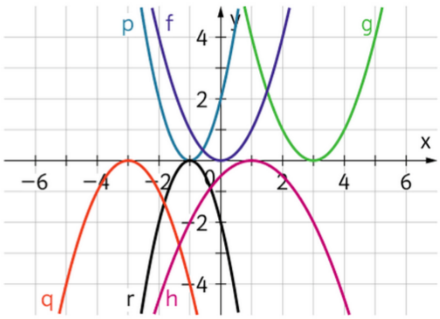
und einer graphischen Darstellung, in diesem Fall einer Parabel, noch keine Logik voraus. Dies ist eher mit dem Akt des Vokabellernens einer Sprache vergleichbar.

Doch die Bedeutung der Parameter $a, b\ und\ c$ muss offensichtlich auch verstanden worden sein, um eine spezielle Gleichung zu einem speziellen Bild herzustellen.

Betrachten wir, bevor wir weiter machen ein Beispiel aus dem Schulbuch „Lösungswege“(Freiler, Marsik, Olf, Schmid-Zartner, & Wittberger, 2015, S.142). Bei der Aufgabe geht es um die Parameter *a* und *m* quadratischer Funktionen in Scheitelform.

571. Ordne in der rechten Abbildung die Funktionsgraphen den entsprechenden Funktionsgleichungen zu.

a: $y = (x-3)^2$ c: $y = -2(x+1)^2$ e: $y = -0{,}5(x-1)^2$
b: $y = 2(x+1)^2$ d: $y = -(x+3)^2$ f: $y = =1(x-0)^2$



(Freiler u. a., 2015)

Die Vorstellung, dass irgendjemand die Auswirkungen unterschiedlicher Parameter auf die Funktion nicht-logisch verstanden hat und trotzdem in der Lage sein könnte, eine Gleichung zu einem gegebenen Graphen aufzustellen, ist widersprüchlich. Selbst wenn man behauptet, dies sei trotzdem vorstellbar, so lag es mit Sicherheit nicht in der Intention des Lehrplans, diese Möglichkeit offen zu lassen.

Für das Beispiel aus der Nachfolgeversion gilt ähnliches. Betrachtet man Mathematik als Sprache [wie es in allen drei Versionen des Lehrplans vorgeschlagen wird], kann man im Sinne der Semiotik die allgemeine Kreisgleichung, als die Art der Zeichen verstehen, welche die Vorstellung eines Kreises in der Sprache der Mathematik wiedergeben. Diese Zeichen muss man eben lernen, so wie man beim Lernen anderer Sprachen auch Buchstaben und Worte erkennen, interpretieren und widergeben lernen muss.

Um ein einfaches Beispiel zu geben, betrachte man einen Schüler, der Deutsch lernt. Wenn er, nennen wir ihn, aus aktuell politischen Gründen und um den Text ein wenig aufzulockern, *Flüchtling X*, Deutsch lernt, dann lernt er im Kapitel Verben zuerst einige Phrasen, dann später die Stammformen. Zum Beispiel das Wort

„*respektieren*“ im Infinitiv. Dies erfordert kaum Logik. Er muss sich das neue Zeichen und die zugehörige Bedeutung verknüpft miteinander einprägen. Genauso geschieht es mit der Kreisgleichung in allgemeiner Form und dem Bild eines Kreises. Es wird miteinander verknüpft abgespeichert. Im nächsten Schritt wird *Flüchtling X* nun lernen, wie man das Verb „*respektieren*“ konjugiert. Und dies geschieht nach den Regeln der Grammatik. Das Pendant hierzu finden wir nun in den Belegungen der Parameter der Kreisgleichung, um sie an einen bestimmten Kreis, mit einem bestimmten Mittelpunkt und einem bestimmten Radius, anzupassen. Auch hierbei kann man nach gewissen Regeln vorgehen, und diese Regeln ergeben sich aus der Logik.

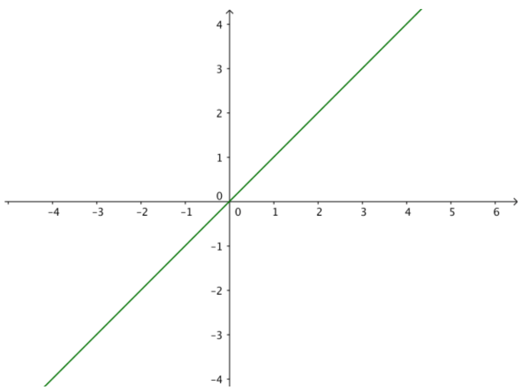
Das dritte Zitat schlussendlich muss aufgrund der Argumente aus Beispiel eins und zwei auch ein, zumindest intuitives, Verständnis von Logik seitens des Beschreibenden voraussetzen. Um trotzdem noch speziell darauf einzugehen, um mich nicht unterlassener Rechtfertigung schuldig zu machen, stelle ich noch eine Frage zu der Formulierung in den Raum:

Kann man sich eine Schülerin [oder einen Schüler] vorstellen, die eine Abhängigkeit, welche durch eine reelle Funktion in einer Variablen erfassbar ist, durch Terme, Tabellen oder Graphen korrekt beschreibt, ohne dass sie verstanden hat, wie eine Veränderung in der Abhängigkeit oder der Funktion logisch eine Veränderung in dem zur Beschreibung verwendeten mathematischen Zeichen nach sich zieht?[4] Natürlich auch keine, die (oder keinen, der) nur zufällig richtige Antworten gibt. Und selbst wenn, ist das dann nicht Themenverfehlung des Mathematikunterrichts?

Am Beispiel:

Zur Funktion $f(x) = x$ kann ich eine Gerade zeichnen, um sie zu beschreiben:

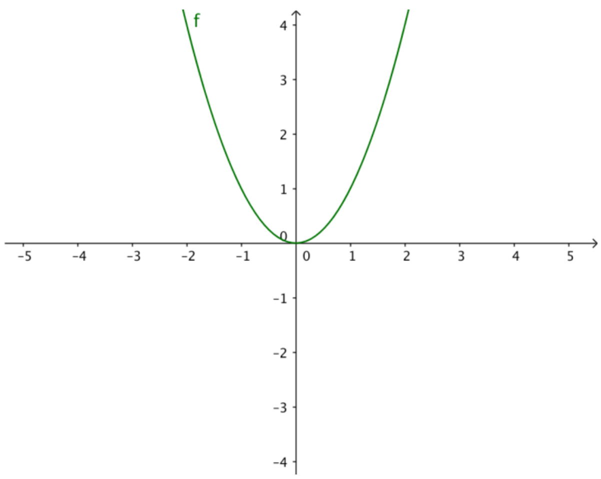
[4] Vgl. Wittgensteins Kernidee: „Einen Begriff zu haben, heißt zu wissen unter welchen Bedingungen er korrekt und inkorrekt verwendet wird,...“ aus Mitschrift zur VO Einführung in die theoretische Philosophie, Univ.-Prof. Dr. Martin Kusch, WS 2016



Ändert man die Funktion ab und ist die Abhängigkeit nun gegeben durch:

$f(x) = x^2$,

muss sich auch der Graph derart abändern, dass er zunächst langsamer werdend fällt, dann schneller werdend zu steigen beginnt und durch gewisse Punkte geht:



Meine Antwort ist: Ja, man kann sich solche Schülerinnen und Schüler vorstellen. Ich selbst unterrichte und kenne solche Schülerinnen und Schüler.

Manche Schüler und Schülerinnen lernen Mathematik nicht, indem sie sich die logischen Muster des Schließens, die Analogien, die [manchmal] versteckten Gemeinsamkeiten aller Kapitel des Stoffes einprägen und einüben, sondern behandeln jedes Beispiel wie ein „neues Wort". In diesem Argument liegt ein wirklich starker Punkt für die Position, welche sich in meiner Meinung durch die vorliegende

Arbeit langsam zu festigen beginnt. Woran es liegen könnte, dass diese Schülerinnen und Schüler Mathematik auf „ihre Art“ lernen, unterscheidet sich von Fall zu Fall und ist in den meisten Einzelfällen wohl eine Kombination aus mehreren Gründen. Sie zu erforschen wäre eine Aufgabe für eine getrennte Arbeit. Fest steht, dass Schülerinnen und Schüler, die jedes Beispiel wie ein neue Vokabel lernen, sehr schnell an ihre Grenzen gelangen.

Gründlich durchgesiebt bleibt also folgendes zu sagen:

In jedem Vorkommen des Begriffs ***„beschreiben“*** *wird vom Lehrplan ein zumindest intuitives Verständnis von logischen Strukturen, Verbindungen und Vorgehensweisen seitens der Schülerinnen und Schüler eingefordert.*[5]

Außerdem ist der Kontext im Lehrplan immer ein mathematischer und deshalb sind alle Auftritte des Begriffs insofern vergleichbar miteinander, als er immer Bedingung 3. erfüllt (damit ist auch 2. gegeben).

Bedingung 1. ist auch erfüllt, denn wir können diese Formulierungen im „Alten“ 31 Mal lesen, in seinem Nachfolger 14 Mal und im Nachfolger des Nachfolgers kommt sie zu 19 Auftritten.

Nun, da ich meine Keywords ausreichend kritisch geprüft habe, kann ich mich wieder dem eigentlichen Thema widmen. Doch was ist eigentlich das genaue Thema? Es wird dringend Zeit für eine Konkretisierung der Fragestellung.

[5] Und damit wird auch von den Lehrenden gefordert, dieses Verständnis zu vermitteln.

2.5 EIN GENAUERER BLICK UND EINE HINTERGRUNDANALYSE

Es ergibt sich nun die Frage ob es

a) möglich ist, auf die Syntax [der Logik] zu verzichten und trotzdem die Semantik zu betonen und ob es

b) sinnvoll ist, das zu tun.

Die Lehrpläne seit 2004 scheinen beide Teilfragen eindeutig mit „Ja“ zu beantworten, denn einerseits setzen sie durch ihre Formulierungen ein intuitives Verständnis der Logik voraus, andererseits ist ihnen [anscheinend] die Syntax nicht wichtig genug, um auf sie direkt Bezug zu nehmen.

Um diese Fragen für uns zu prüfen, werden wir zuerst versuchen, zu verstehen, woher diese Einstellung eigentlich kommt.

Da solche Lehrplanneuerungen auch immer zu einem gewissen Grad unter politischem Einfluss geschehen, könnte man das vorliegende Ergebnis auch in einem solchen Lichte deuten.

Dr. Josef Lechner, ein langjähriger AHS und BMHS Lehrer, sowie tätig im Bereich der LehrerInnenbildung und ehemaliger Koordinator der Lehrplangruppe „Mathematik Oberstufe“ des BM:UKK und Dr. Helmut Heugl, ebenfalls Mitglied derselben Gruppe und ebenso AHS Lehrer für Mathematik, waren bereit, mir ausführliche Antworten auf einen Recherchefragebogen zu geben. Auch sie nehmen beide in ihren Antworten Bezug auf die politische Komponente. So antwortet Dr. Heugl auf die Frage nach den Hintergründen für das Verschwinden der Logik aus dem Lehrplan:

> „Einerseits die damals propagierte Entrümpelung. Andererseits neigen Inhalte des MU dazu, sich von ihrer ursprünglichen Bedeutung zu entfernen und zum Selbstzweck zu werden (weil wir ja was zum Prüfen brauchen). Das galt damals vor allem für die Mengenlehre („Durchschnittsmenge der Buchstaben der

> Wörter Ananas und Mississippi“, …) und die Aussagenlogik. Und so wurden diese Kapitel entfernt, anstatt sie sinnvoll mit anderen Themen zu vernetzen.“ (Heugl, 2016, Anhang).

Dr. Lechner äußert sich dazu wie folgt:

> „Der Lehrplan 2004 entstand aus der Absicht heraus, den bestehenden Lehrplan 1989 zu straffen, zu „komprimieren“, und inhaltlich zu „entlasten“. Dies gipfelte in der (absurden) Vorgabe des Ministeriums, Fachlehrpläne dürfen nicht mehr als 4 A4-Seiten umfassen.
>
> So kam es, dass einige (wichtige) Kapitel tatsächlich „geopfert“ wurden (Matrizen, Grundzüge der Graphentheorie, lineare Optimierung, …) und andere „komprimiert“ wurden (Aussagenlogik, Wirtschaftsmathematik, …).“ (Lechner, 2016, Anhang).

Diese Auffassungen schüren meinen Verdacht, dass erstens doch noch vielmehr Logik im Lehrplan steckt, als es den Anschein hat, und zweitens, dass es sein könnte, dass diese Entscheidung durch die Art der Fragestellungen bei PISA (im Zuge der PISA-Studie wurden ab 2000 Erhebungen durchgeführt(Neubrand, 2002)), bei denen die Symbole der Logik eigentlich kaum eine Rolle spielen, naheliegend schien (Bifie, 2016).Es scheint deshalb naheliegend, den österreichischen Unterricht an die PISA-Studie anzupassen und auf deren Fragestellung auszurichten, weil PISA eine anerkannte Vergleichsstudie ist. Man will als Land möglichst gute Platzierungen erreichen. Diejenige Partei, die regiert und Verbesserung hinsichtlich PISA miterlebt, kann dies als Erfolg werten. Wenn man den Schulunterricht nach der Art der Fragen, wie sie bei PISA gestellt werden, ausrichtet, dann werden sich auch die Ergebnisse verbessern.

Außerdem steht der Lehrplan, wie Lechner und Heugl bestätigen, im Zeichen des Sparmodus und von Kürzung. Ihm liegt daher ein grundlegendes Leitmotiv politischer Entscheidungen zugrunde.[6]

---

[6] Zumindest ist es das derzeit.

Auf die Frage, ob sie der Meinung seien, ob Logik im AHS Lehrplan für Mathematik einen Platz einnehmen solle, antworteten sowohl Dr. Heugl, wie auch Dr. Lechner mit „Ja“.

> „Meine zwei Argumente für den Mathematikunterricht (Quelle: Bruno Buchberger) erklären mein „ja“:
>
> o „Mathematik ist die über Jahrhunderte entwickelte Technik des Problemlösens durch schließen“ - Schließen erfolgt auf der Grundlage der Logik
>
> o „Der wichtigste Ertrag des Faches Mathematik ist die zum Betreiben von Mathematik erforderliche Denktechnologie“ – und die beinhaltet ja wohl Elemente der Logik.“ (Dr. Heugl, 2016, Anhang)

Dr. Lechner fügt seiner Antwort hinzu, dass es wünschenswert wäre, aber dass die begrenzte Stundenanzahl, sowie der Ruf nach Nachhaltigkeit (insbesondere im Zusammenhang mit der standardisierten Reifeprüfung) dagegensprechen. (vgl. Dr. Lechner, 2016, Anhang).

Beide betonen vor allem die Relevanz der Logik in Form der Aussagenlogik, als Basis für gute Argumentationsfähigkeit und als Grundlage für formal korrekte Beweisführung. Dr. Lechner führt eine lange Liste an, in der er auch den Beitrag der Logik zum kritischen und exakten Denken als wichtiges Unterrichtsziel anführt. Er verweist auch darauf, dass die Logik die Basis der Sprache der Mathematik bildet. Dr. Lechner nennt als konkrete Gebiete, in denen Logik im Mathematikunterricht thematisiert werden sollte: *Mengen und Aussagen, Argumentieren, Begründen und Beweisen* und auch **als Thema für sich**. Im Mathematikunterricht sollte über Logik reflektiert werden: Was ist Logik? Welche Formen von Logik gibt es? Vor allem die Verbindung von Logik und Mathematik soll im Unterricht thematisiert werden. Hier nennt er ein Zitat von B. Buchberger:

> „Mathematik besteht im Finden der logischen und quantifizierbaren Struktur einer Situation oder eines Prozesses.“(Buchberger, 2016)

Dr. Lechner weist aber gleichzeitig auf die Gefahr hin, Logik zu syntaktisch zu vermitteln. Sie sollte hauptsächlich in Verbindung mit anderen Gebieten der

Mathematik thematisiert werden. Dabei lässt er offen, ob dies in rein verbaler Form, als Diskussion im Unterricht stattfinden sollte, oder auch logische Symbole und das abstrakte Formalisieren von logischen Schlussformen beinhalten sollte.

Wie bereits erwähnt, stellte ich beiden die Frage, aus welchem Grund ihrer Meinung nach die Logik aus dem Lehrplan verschwunden sei. Dr. Heugl antwortete weiter:

> „Im neuen Lehrplan wurde auf einiges Unverzichtbares verzichtet (z.B. Logik, präziserer Grenzwertbegriff, usw.). Leider ist das Wichtigste, 0/1-wertige Grundkompetenzitems zu trainieren. Elemente der Logik kommen aber im Grundkompetenzkatalog nicht vor. Ich halte das für eine große Gefahr für den Mathematikunterricht. " (Dr. Heugl, Anhang)

Dr. Lechner verwies auf ähnliche Stellen, wie ich sie bereits im vorherigen Kapitel angeführt hatte, die direkten Bezug zur Logik aufweisen. Seiner Meinung nach sei sie nicht ganz aus dem Lehrplan verschwunden, werde aber „leider nicht mehr explizit erwähnt".

Die Entwicklung in Sachen Logik im Lehrplan sind übrigens nicht nur auf Österreich beschränkt. In Deutschland wurde die Logik bereits in den 70ern großteils aus dem Lehrplan genommen.

> „...[in Deutschland ist] in den 1970-er Jahren zusammen mit der Mengenlehre auch die Logik weitgehend aus den Lehrplänen gestrichen wurde."(Arnold & Hartmann, 2007).

Wedekind Et al kritisieren diese Entwicklung zwar in Zusammenhang mit dem Informatikunterricht, was sie zu sagen haben, ist aber auch in dieser Arbeit von Bedeutung:

> „Mit unserer natürlichen Sprache teilt die Logik das Schicksal, gewissermaßen wildwüchsig erworben zu werden. Dass dieser Erwerb der korrigierenden und fördernden Ergänzung durch die Schule bedarf, ist im Fall der Sprache eine Selbstverständlichkeit, im Fall der Logik jedoch nicht auf der Agenda."(Wedekind, Inhetveen, & Ortner, 2005).

Es könnte aber sein, dass die Notation der Logik, und das Sichtbarmachen von ihr als eigenständigem Gebiet innerhalb der Mathematik, auch aus einem anderen Grund als nicht notwendig klassifiziert wurde. Jedes Kapitel ist ohnehin übersät mit logischen Strukturen. Jede Definition, jeder Merksatz, jede Feststellung in den Schulbüchern ab der ersten Klasse enthält elementare Aussagen, Junktoren und Quantoren und innermathematisch schlüssige Argumente.[7]

Leider gehen politischen Überlegungen nicht über Spekulationen hinaus und ich will mich daher darauf konzentrieren, ob es aus fachdidaktischer Sicht wichtig ist, Aussagenlogik im Mathematikunterricht zu behandeln und ob nach einer sachlichen Überlegung nicht auch der vorliegende Lehrplan eigentlich eine Beschäftigung mit Logik im Mathematikunterricht suggeriert. Dr. Lechner antwortet auf meine Frage, ob das Verschwinden der Aussagenlogik gerechtfertigt sei, mit:

> „Nun, es wird ja nicht auf die Aussagenlogik verzichtet, sie ist aber nicht mehr in dem Umfang vertreten als dies früher der Fall war." (Lechner, Anhang)

Der Erwerb von mathematischem Metawissen (Vollrath & Roth, 2012) rückte mit dem neuen Lehrplan von 2004 jedenfalls in den absoluten Vordergrund. Die beiden Autoren stehen diesem Wissen, das sich die Schülerinnen und Schüler beim „learning by doing" aneignen, sehr skeptisch gegenüber. Doch dazu später mehr.

Es klingt zumindest plausibel, zu argumentieren, dass es keinen praktischen Mehrwert hat, sich in der ohnehin knappen Unterrichtszeit mit der aussagenlogischen Notation auseinanderzusetzen. Noch dazu kommen die wichtigsten Symbole sowieso verstreut über andere Kapitel (vorwiegend in den Kapiteln zu Mengen) vor. Dr. Lechner sieht auch gute Gründe für diese schmerzlichen Kürzungen. So meint er, dass viele Kapitel, unter anderem die Aussagenlogik, unter der Straffung leiden müssen, obwohl sie sinnvollerweise in den Mathematikunterricht gehören würden, weil

[7] In Kapitel 3 werde ich feststellen, dass es auch Bücher gibt die genau das nicht explizit machen. Z.B.: Lösungswege 5

„- nur eine begrenzte Stundenzahl (von der wiederum nur ein Teil tatsächlich stattfinden kann, da auf Grund diverser Projekte, Lehrausgänge, Exkursionen, Sportwochen, und und und … ein nicht unbeträchtlicher Teil entfällt),

- der Ruf nach Sicherung der Nachhaltigkeit, der es erfordert (insbesondere im Zusammenhang mit der standardisierten zentralen Reifeprüfung), das Besprochene und Erarbeitete immer wieder präsent zu halten (was natürlich auch Unterrichtszeit in Anspruch nimmt),

- die Beachtung der Grundkompetenzen, die eine Art „Kernlehrplan" darstellen, neben dem die darüberhinausgehenden Inhalte weniger Bedeutung für SchülerInnen besitzen." (Lechner, Anhang)

Es ist also eine durchaus vertretbare Ansicht, die sich im neuen Lehrplan wiederspiegelt. Um sie sinnvoll diskutieren zu können, müssen wir uns aber noch weiter in die Materie vertiefen, weshalb wir uns, bevor wir die Teilfragen a) und b) erneut aufgreifen, einige spezielle Passagen ansehen wollen.

„… Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von …"

(BMB, 2016)

Diese Passage hat einen direkten Zusammenhang zur Logik, weil hier Mathematik als Sprache vermittelt werden soll und weiter unten in dem Text dieser sprachliche Aspekt wie folgt spezifiziert wird:

Sprachlicher Aspekt:

Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden

(RIS, 2016b)

Gerade, wenn es darum geht, sich so exakt wie möglich auszudrücken, muss die Bedeutung gewisser Worte explizit gemacht werden. Es scheint sinnvoll, auf die alltagssprachliche Unschärfe der Formulierungen „und", „oder", „wenn..., dann..." hinzuweisen. Denn der Unterschied zwischen einem einschließenden und einem ausschließenden „oder" ist nicht nur für das exakte Ausdrücken wichtig, er ist überhaupt für das Verständnis exakter Ausdrücke notwendig. Selbiges gilt für den Unterschied zwischen „genau dann, wenn...“ und „wenn...,dann“. Auch das mathematische „Und“ ist wesentlich schärfer als das umgangssprachliche.

Zum Beispiel verbindet ein mathematisches „Und“ Bedingungen, die dann beide erfüllt werden müssen, um eine Schlussfolgerung treffen zu können:

„Alle x, die reelle Zahlen sind und größer als fünf sind, gehören zur Menge M.“

Oder es verbindet zwei Konklusionen die **immer** gleichzeitig folgen:

„Eine Zahl aus der Menge M ist größer als 5 und eine reelle Zahl.“

Wohingegen ich im Alltag das Wort auch in folgendem Sinne benutzen kann:

„Wir gehen alle in die Shoppingmall und dann ins Kino.“

Hier kann ein Sprecher auch meinen, dass er mit fünf Freunden in die Mall geht, einer dann zur Arbeit muss, der Rest geht aber trotzdem ins Kino.

Außerdem sind beide Teilsätze weder Bedingungen noch Schlussfolgerungen.

Es scheint also schon in gewissem Sinne festhaltenswert, diesen Unterschied einmal vor Augen geführt zu bekommen.

Hierzu ein Auszug aus dem alten Lehrplan:

> Arbeiten mit logischen Begriffen:
>
> Präzisieren des Gebrauchs folgender Begriffe: ,,und", ,,oder", ,,wenn ... dann", ,,genau dann ... wenn"; Erkennen des Auftretens entsprechender Aussagen und Beziehungen in unterschiedlichen, vorwiegend mathematischen Situationen. Verneinen von Aussagen, insbesondere von Und-, Oder-, All- und Existenzaussagen.

(RIS, 2016a)

Es ist auch augenscheinlich problematisch, diese „kleinen Worte“ und die zu ihnen gehörenden großen semantischen Unterschiede zwischen der Sprache der Mathematik und Alltagssprachen nicht im Unterricht zu thematisieren. Wenn man dies als Lehrkraft nicht in seinem Mathematikunterricht tut, und zwar eigentlich bei jeder Gelegenheit, in der besagte Junktoren vorkommen, läuft man Gefahr, unabsichtlich Fehlvorstellungen zu generieren. Diese Gefahr geht von der Alltagsbedeutung der Junktorenworte aus.[8]

Der neue Lehrplan legt eigentlich auch Wert darauf, diese Unterschiede zu beleuchten, nur benutzt er Worte wie „beschreiben" oder „exakten Ausdruck" etc., um die Wichtigkeit zu betonen, anstatt die Semantik gewisser Worte gezielt hervorzuheben. Es wird viel Platz für Interpretation gewährt.

Auch Arnold Et al kritisieren diese Ist-Situation [in Deutschland]. Sie stellen in ihrem Artikel fest, dass kaum jemand den Unterschied zwischen einer hinreichenden und einer notwendigen Bedingung kennt(Arnold & Hartmann, 2007). Dieser Unterschied ist aber ein unglaublich wichtiger Bestandteil der Mathematik. Unterscheidungen wie diese sind notwendige Bedingungen für die Stärke der Sprache der Mathematik: ihre Exaktheit.

Eine weitere Stelle, die ich kurz reflektieren will, ist jene, die Aktivitäten beschreibt, an denen man mathematische Kompetenzen feststellen kann. Speziell die Aktivität des kritisch – argumentativen Arbeitens:

> - *Kritisch - argumentatives Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs

(RIS, 2016b)

Es geht also darum, den Schülerinnen und Schülern beizubringen, wie ein gültiges Argument aussieht und wie man ein schlüssiges Argument konstruiert. Zweiteres ist nichts anderes als Beweisen und ersteres nennt man hier Begründen.

Die Struktur einer Begründung ist das zentrale Thema der reinen Logik. Sie dreht sich um gültige Argumentationsstrukturen.

Ein gültiges Argument hat eine Form, welche garantiert, dass die Wahrheit der Konklusion aus der Wahrheit der Prämissen folgt, oder präziser:

[8] vgl. Auch die Überlegungen von Freudenthal (Freudenthal, 1973)

- *Ein Argument heißt **gültig** (valid), gdw (genau dann, wenn) es nicht sein kann, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist.*

(Ramharter, 2016)

Der Logik innerhalb der Mathematik ist das noch nicht einmal genug. In der Mathematik meinen wir mit Beweisen und Begründungen sogar ***nur*** *schlüssige* Argumente. Also Argumente, die dieselbe Struktur haben wie oben, nämlich Prämissen, aus denen eine Konklusion folgen kann. Aber in der Mathematik verwendet man ***nur*** wahre Prämissen, wodurch auch die Konklusion, vorausgesetzt es liegt eine gültige Struktur des Arguments vor, unbedingt wahr ist. Solche Argumente heißen dann schlüssig.

- *Ein Argument heißt **schlüssig**(sound), gdw. es gültig ist und die Prämissen alle tatsächlich wahr sind.*

(Ramharter, 2016)

Solche schlüssigen Argumente interessieren uns in der Mathematik besonders. Die Logik untersucht, wie solche Argumente aussehen. Das heißt, die Logik in der Mathematik klärt uns auf, dass Beweise, die eine bestimmte Struktur haben, schlüssig sind. Im Mathematikunterricht sollten wir darin geschult werden, einen unkorrekten (unschlüssigen) Beweis zu erkennen. Wir sollten lernen, zu erkennen, was mit einem Beweis fehlt, um schlüssig zu werden.[9]

Zum Beispiel besteht ein induktiver Beweis immer aus einem Induktionsanfang, einer Induktionsannahme und einem Induktionsschluss[10]. Diese Beweisstruktur führt immer zu einem gültigen Argument und wenn die Prämissen wahr sind, eben auch zu einer wahren Konklusion.

Selbiges gilt für die Struktur direkter und indirekter Beweise.

[9](vgl. Mag. Dr. Josef Lechner. 2016. Originalskript. Frage 3. Im: Anhang.)
[10]Die Begriffe, um die Struktur zu beschreiben, variieren von Autor zu Autor. Das ist aber nebensächlich, weil es immer darum geht, die Struktur hinreichend und notwendig zu beschreiben.

Wieder lässt der neue Lehrplan aber all das, was hier zwischen den Zeilen eigentlich steht, ungesagt und überlässt es der Interpretation des Lesers bzw. der Leserin, wie man die Fähigkeit, „kritisch - argumentativ zu arbeiten“, zu vermitteln hat.

Doch liest man weiter, so kommt man zu einer Stelle, in der Aspekte der Mathematik aufgezählt werden, die den Schülerinnen und Schülern klarzumachen sind. Unter diesen findet sich auch der „Autonome Aspekt“ der Mathematik:

> Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen - von festgelegten Prämissen ausgehend - stringent abgeleitet werden können; Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess

(RIS, 2016b)

Ist dies nicht genau jenes logische Vorgehen, welches oben geschildert wurde? Kann dieser Aspekt überhaupt vermittelt werden, wenn man nicht über allgemeine Beweisstrukturen und allgemein darüber redet, was „stringent ableiten“ eigentlich bedeutet? Oder ist diese Stelle so gemeint, dass man Schülerinnen und Schüler einfach immer wieder mit Beweisen konfrontiert und davon ausgeht, dass dies früher oder später zu einem intuitiven Verständnis für mathematische Beweise führt? Colin Hannaforth beschreibt in seinem Paper „Mathematic teaching is democratic education“ die zentrale Rolle, die Logik in der Erziehung zur Demokratie spielt (Hannaford, 1998).

Der neue Lehrplan ersetzt jedenfalls viele elementare Arbeitsbegriffe, die klare verständliche Bedeutung haben, wie z.B.: „schlüssige Argumente“, durch neue Formulierungen, deren Bedeutung nicht einmal annähernd so technisch-klar sind („in der Aussagen – von festgelegten Prämissen ausgehend – stringent abgeleitet werden können“). Dadurch ergibt sich ein wesentlich breiteres Interpretationsintervall.

Im Unterricht sollen außerdem Beiträge zu Bildungsbereichen entwickelt werden. Einer davon ist jener, den Mathematik in der Sprache und Kommunikation liefert:

> Mathematik ergänzt und erweitert die Umgangssprache vor allem durch ihre Symbole und ihre Darstellungen, sie präzisiert Aussagen und verdichtet sie; neben der Muttersprache und den Fremdsprachen wird Mathematik so zu einer weiteren Art von Sprache

(RIS, 2016b)

Nimmt man diese Passage ernst und überlegt sich, was damit gemeint ist, so müsste man den Schülerinnen und Schülern die oben von mir dargestellte Überlegung zur Fähigkeit der Strukturerkennung schlüssiger Argumentationen und der Fähigkeit, schlüssige Argumente zu konstruieren, innerhalb der Mathematik zusammen mit einem Transfer auf Strukturen gültiger Argumente in Alltagssprache vermitteln. Wie und anhand welcher Begriffe, oder gar anhand welcher Kapitel das geschehen soll, wird nicht erklärt. Es bleibt jeder Lehrperson selbst überlassen, sich für einen Weg zu entscheiden.

Außerdem möchte ich an dieser Stelle festhalten, dass die Mathematik sogar mehr ist als nur eine zusätzliche Sprache, die erlernt werden soll. Indem sie Aussagen verdichtet und die Alltagssprache ergänzt, wirkt sie sich auf die individuellen Sprachfähigkeiten in jeder vom Individuum gesprochenen Sprache aus. Ich will mit einer saloppen Formulierung beginnen, um meinen Punkt hernach präziser auszuführen:

Je mehr man „mathematisch" sprechen lernt, desto mehr verändert sich auch Satz- und Denkstruktur in allen anderen Sprachen, derer man fähig ist.

Erst muss ich verstehen, wie man mathematisch etwas beweist. Nämlich, dass ich zuerst für meine Zwecke dienliche Prämissen finden muss, die allgemein als wahr akzeptiert werden. Diese muss ich dann nach speziellen Regeln und Ausdrücken miteinander kombinieren, um ein *schlüssiges* Argument zu bilden, an dessen Ende dann eine wahre Konklusion über eine Frage, die zweifelhaft schien, steht. Habe ich das nun verstanden, dann wirkt sich dieses Verständnis auch auf meinen Gebrauch der Alltagssprache aus. Ich verstehe, dass ich, um zu überzeugen, meine Argumentation an einem gemeinsamen Nenner ansetzen muss. Ich brauche einen Punkt, an dem mein Gegenüber und ich gleicher Meinung sind. Es müssen Prämissen sein, die für alle Seiten als wahr akzeptiert werden, erst dann kann ich „losargumentieren". Und auch hierbei muss ich gewisse Strukturen von Schlüssen einhalten. Versuche ich mich selbst von etwas zu überzeugen, dann muss ich auch erst den Punkt finden, bis zu dem ich überzeugt bin. Von dort kann ich mich dann mit passenden Gedankenschritten weiterbewegen. Analoges läuft beim selbstständigen Lernen ab. Stellen wir uns vor, wir sitzen an einem Mathematikbeispiel, dass wir nicht verstehen. Zuerst muss ich den Punkt finden, bis zu welchem ich alles verstehe. Z.B.: Verstehe ich die Frage? Kann ich die Frage mathematisieren? Verstehe ich die mathematischen Inhalte aus der Angabe? Welche Zahlen haben welche Bedeutung im Kontext? Habe ich dann den Punkt gefunden, ab dem ich nicht mehr weiter weiß, kann ich von dort nach weiteren Verständnisschritten suchen. Z.B.: Wie haben wir das in ähnlichen Beispielen gemacht? Was steht auf der Theorieseite zu diesen Beispielen im Buch? Mit logisch verknüpften Schritten gehe ich los und einer ergibt den nächsten und ist niemals unabhängig vom vorrangegangenen.

Durch das Präzisieren von Ausdrücken innerhalb der Mathematik erlernt man auch die Fähigkeit, sich in allen Sprachen, die man beherrscht, gezielter Strukturen zu bedienen und gezielter zu argumentieren.

Mathematik ist also mehr als nur eine weitere Sprache, sie ist eine *sprachübergreifende Formulierungsstruktur*.

Wenn ich diese Funktion der Mathematik im Unterricht vermitteln soll: Kann ich das ohne Syntax der Logik tun?

Es gibt sicherlich gute Gründe zu sagen: Die Syntax der Logik ist dazu nicht notwendig. Diesen Aspekt vermittelt man ohnehin durch das Sprechen im Mathematikunterricht und durch das Lösen von Aufgaben. Spielerisch entsteht früher oder später in jedem Schüler und jeder Schülerin dieses Verständnis und es tut nichts zur Sache, ob es diesen bewusst ist oder ob es unbewusst geschieht. Mit Hischer werde aber ich in Kapitel 4 einen Autor vorstellen, der die Wichtigkeit der Symbole für die Entstehung von Wissen im Unterricht begründet.

Zusammenfassend kann man auf die Teilfrage a) vorläufig antworten: Ja es scheint – auch für die Verfasser des Lehrplans – möglich zu sein, die Grundlagen der Logik auch ohne Syntax und ohne ein entsprechendes Kapitel im Schulstoff zu vermitteln.

Wie weit aber wirklich auf logische Symbole und Begriffe verzichtet wird, will ich feststellen, indem ich mich dem „inoffiziellen“ Lehrplan zuwende. Ich werde Schulbücher der Oberstufe untersuchen, und zwar speziell die Teile in den Schulbüchern, die zu den im Folgenden aufgelisteten Passagen des Lehrplans zu gehören scheinen. Diese wurden von mir aufgrund des stark betonten argumentativen Charakters der Kapitel, durch ihre innere Beschaffenheit, sowie durch die auffällige Verwendung der Keywords, welche ich schon weiter oben erläutert habe, ausgewählt. Ich werde mich dabei auf Kapitel aus der 9.Schulstufe beschränken, weil laut altem Lehrplan in diesem Jahr ein Kapitel der Aussagenlogik gewidmet war.

Als erstes werde ich folgende Inhalte in Lehrbüchern untersuchen, weil im Kapitel über Zahlenmengen die Junktoren „und“ und „oder“ eine entscheidende Rolle spielen. Vor allem werde ich versuchen, Beispiele zu finden, die die Symbole $\wedge$ und $\vee$ offiziell definieren und Beispiele für Bücher, in denen einfach mit „und“ und „oder“ gearbeitet wird.

Zahlen und Rechengesetze

- Reflektieren über das Erweitern von Zahlenmengen an Hand von natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen

(RIS, 2016b)

selbiges gilt für diesen Punkt des Lehrplans:

- *Arbeiten mit Primzahlen und Teilern, Untersuchen von Teilbarkeitsfragen* (RIS, 2016b)

Bei der Einführung des Funktionsbegriffes interessiert mich vor allem die Handhabung der Quantoren in den Schulbüchern. Auch die auffällig häufige Nutzung des Wortes „Beschreiben“ weckt starkes Interesse für dieses Kapitel.

Funktionen

- Beschreiben von Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind (mittels Termen, Tabellen und Graphen), Reflektieren über den Modellcharakter von Funktionen
- Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen (zB a/x, a/x^2, ax^2+bx+c, abschnittweise definierte Funktionen)
- Untersuchen von Formeln im Hinblick auf funktionale Aspekte, Beschreiben von direkten und indirekten Proportionalitäten mit Hilfe von Funktionen

(RIS, 2016b)

Aus dem Bereich der Geometrie will ich mich vor allem mit dem Punkt aus dem Stoff für die 5.Klasse

- Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden

(RIS, 2016b)

beschäftigen. Ich will dabei die Fragestruktur für solche „Beschreibungsbeispiele" untersuchen. Wie ist die Formulierung? Wieviel Logik wird zur Beantwortung der Fragestellungen vorausgesetzt?

3.LEHRBÜCHER

3.1 BÜCHER LAUT „ALTEM“ LEHRPLAN

Mein erster Griff galt natürlich meinem eigenen alten Lehrbuch. Ich begann die 5.Klasse 2005. Das Buch folgt demnach dem Lehrplan von 2004. Es trägt den Titel „Mathematik Lehrbuch“ und stammt von den Autoren Götz, Reichel, Müller und Hanisch. Eigentlich wollte ich ja gezielt das Thema Zahlen und Rechengesetze nachschlagen, aber ich konnte nicht umhin, kurz in das Einführungskapitel zu blicken. Es heißt „Die Sprache der Mathematik“ und beschäftigt sich mit Aussagen und Mengen. Nach einer kurzen Einführung legt das Buch los und erklärt zu aller erst, was Aussagen sind, bevor es gleich im Anschluss Quantoren einführt. Beispiele für Allquantoren und Existenzquantoren werden gegeben und diese dann erklärt. Das Ganze in einer äußerst formalen und korrekten Art und Weise:

Allaussagen	**Existenzaussagen**
(3) „**Alle** ganzen Zahlen sind durch 1 teilbar“ formal: $\forall x \in \mathbb{Z} : 1 \mid x$ (w. A.)	(4) „**Es gibt eine** ganze Zahl zwischen 242 und 250, die Primzahl ist“ formal: $\exists x \in \mathbb{Z},\ 242 < x < 250 : x \in \mathbb{P}$ (f. A.)
(5) „**Alle** ganzen Zahlen sind durch 3 teilbar“ formal: $\forall x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x$ (f. A. – Gegenbeispiel: $x = 4$)	(6) „**Es gibt eine** ganze Zahl zwischen 342 und 350, die Primzahl ist“ formal: $\exists x \in \mathbb{Z},\ 342 < x < 350 : x \in \mathbb{P}$ (w. A. – Beispiel: $x = 347$)
allgemein: „**Alle**[3] x von G haben die Eigenschaft a(x)“ formal: $\forall x \in G : a(x)$ Allquantor Grundmenge Eigenschaft	allgemein: „**Es gibt mindestens ein**[4] x von G mit der Eigenschaft a(x)“ formal: $\exists x \in G : a(x)$ Existenzquantor Grundmenge Eigenschaft

(Götz, Reichel, Müller, & Hanisch, 2006)

Die Mathematik wird hier also als Sprache eingeführt, indem die Grammatik erklärt wird. Die Grammatik liefert in diesem Fall die Prädikatenlogik. Es wird erklärt, wie ein Satz aussehen muss, um wohldefiniert zu sein und Sinn zu ergeben. So wie man im

Deutschunterricht irgendwann einmal lernt, dass das Verb in einem Aussagesatz immer an zweiter Stelle steht.

Gleich im Anschluss wird ausgiebigst über die Negation von Aussagen inklusive korrekter Notation und Wahrheitsbedingungen berichtet, bevor dann die ersten Beispiele folgen:

12 Schreibe die folgenden Aussagen unter Verwendung des Symbols „$\forall$"! Im Fall einer falschen Behauptung ist ein Gegenbeispiel anzugeben!

a) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $x \geqslant 0$
b) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $x > 1$
c) Für alle $x \in \mathbb{N}_u$ gilt: $2|2x$
d) Für alle $x \in \mathbb{N}_g$ gilt: $2|x$
e) Für alle $x \in \mathbb{N}_u$ gilt: $x + x \in \mathbb{N}_g$
f) Für alle $x \in \mathbb{N}_u$ gilt: $x - x \in \mathbb{N}_g$
g) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $x^2 > x$
h) Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $x^2 > 0$

(Götz u. a., 2006)

18 Wie lautet jeweils die Negation der folgenden falschen Existenzaussagen **(1)** in „umgangssprachlicher", **(2)** in „formaler" Formulierung? Formalisiere zuerst die gegebene Aussage!

a) Es gibt eine ganze Zahl, die vermehrt um ihren Kehrwert 1 ergibt.
b) Es gibt eine ganze Zahl, deren Produkt mit ihrem Kehrwert kleiner als 1 ist.
c) Es gibt Primzahlen, deren Quadrat wieder eine Primzahl ist.
d) Es gibt Primzahlen, deren Doppeltes wieder eine Primzahl ist.
e) Die Gleichung $x^3 + (x+1)^3 = (x+2)^3$ ist in $\mathbb{N}$ lösbar.
f) Die Gleichung $(x-1)^2 - (x+1)^2 = 4$ ist in $\mathbb{N}$ lösbar.
g) Es gibt eine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist.
h) Es gibt eine rationale Zahl, deren 3. Potenz 4 ist.

(Götz u. a., 2006)

Zwei Seiten weiter finde ich mich in mitten einer Aufklärung über den Unterschied der Alltagssprach und der Sprache der Mathematik, hinsichtlich der Junktoren „und" und „oder", wieder:

Man findet mit *drei Verknüpfungen* (und damit Symbolen) sein Auslangen:

1) Beschreibt man die gesuchten Mengen mit Hilfe der Eigenschaften a(x) und b(x) bzw. $x \in A$ und $x \in B$, so findet man mit der **Negation** und den beiden folgenden *logischen Verknüpfungen* sein Auslangen:
   - **Logische „Und"-Verknüpfung (Konjunktion[1]):**
     Man schreibt: „$\wedge$" und liest: „. . . **und** . . ." oder: „**sowohl** . . . **als auch** . . ."
   - **Logische „Oder"-Verknüpfung (Disjunktion[2])**
     Man schreibt: $\vee$ und liest: „. . . **oder** . . ."

   Beachte, dass man mit „$\vee$" das *nicht-ausschließende*[3] „oder" im Sinn des lateinischen „vel" meint, von dessen Anfangsbuchstaben das Symbol abgeleitet ist. Wo es die Deutlichkeit verlangt, liest man das Symbol daher besser in der Form **„entweder . . . oder . . . oder auch beides.**

(Götz u. a., 2006)

Im Anschluss an dieses Unterkapitel werden Wahrheitstafeln eingeführt, um die Wahrheitsbedingungen von Aussagen zu überprüfen. Dies geschieht, indem die Autoren erst Bezug auf die Informatik nehmen, um dann die „0"-„1"-Notation zur Beschreibung der Wahrheitswerte nachvollziehbar einzuführen.

Das interessante an dem Buch ist, dass im Anschluss an dieses Kapitel all die Symbole und Techniken kein einziges Mal mehr verwendet werden. Mit einer Ausnahme: der Äquivalenzpfeil kommt einige Male zum Einsatz. Aber „und" und „oder", sowie „Es existiert", „Es existiert mindestens ein...", „Für alle ...", all diese so mühsam eingeführten Zeichen kommen nur mehr in ausgeschriebener Form vor.

Das Kapitel der Teilbarkeitsfragen ist erwartungsgemäß stark mit logischen Argumenten verknüpft. Die Aufgabestellung nahezu jedes Beispiels dieses kleinen Kapitels beginnt mit: „*Beweise*..."(Götz u. a., 2006).

3.2 BÜCHER LAUT 2004-LEHRPLANVERSION ODER NEUER

Zwei 5.Klasse Bücher, die nach 2004 erschienen sind, finden sich in der Fachbibliothek an der Fakultät für Mathematik. Eines davon ist „Mathematik verstehen 5", erschienen 2010 beim Österreichischen Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, beim Zweiten handelt es sich um die neuere Version von „Mathematik Lehrbuch 5". Die neue Auflage des letzteren unterscheidet sich kaum von der zuvor beschriebenen. Ich wende mich also zunächst dem Ersteren zu und werde im Anschluss das an der Schule, an welcher ich selbst tätig bin, verwendete Buch „Lösungswege 5", genauer betrachten. Ich werde danach versuchen, Unterschiede und Gemeinsamkeiten hervor zu heben.

Mathematik verstehen 5

Aussagen und Mengen

Zunächst ist zu erwähnen, dass „Mathematik verstehen 5" das Kapitel „Aussagen und Mengen" mit einer Einführung in die Aussagenlogik beginnt.

Sehr knapp und konkret wird erläutert, was Aussagen sind und dass jede Aussage so genannte Wahrheitsbedingungen besitzt. Ohne große Umwege über Beispiele aus der Welt werden die theoretischen Termini der Negation, Konditional, Konjunktion und Disjunktion und die zugehörigen Wahrheitsbedingungen in Form von Wahrheitstabellen (mit den Werten „w" und „f" und nicht „0" und „1") eingeführt. Sehr deutlich wird auf den Unterschied der beiden Konditionale.

- $A \Rightarrow B$ *bedeutet: „Wenn A* ***wahr*** *ist, dann ist B auch* ***wahr****. Aber wenn A* ***falsch*** *ist, kann B entweder* ***wahr oder falsch*** *sein."*
- $A \Leftrightarrow B$ *bedeutet: „A ist* ***<u>genau dann</u>*** ***wahr*** *ist,* ***<u>wenn</u>*** *auch B* ***wahr*** *ist.*

Nachdem auch Allaussagen und Existenzaussagen und die entsprechenden Zeichen eingeführt sind, wird an Hand der **Gesetze von de Morgan** ein erster Äquivalenzbeweis geführt.

Das Buch gibt für zwei Fälle eine Faustregel zur Beweisführung und veranschaulicht diese durch die Negation der Aussagen:

Beachte die korrekten Verneinungen von All- und Existenzaussagen:

Merke

Aussage:	Verneinung:
Für **alle** x gilt …	Für **mindestens ein** x gilt **nicht** …
Es gibt **mindestens ein** x mit …	Für **alle** x gilt **nicht** …

Beispiele:

Aussage	Verneinung
Für alle x gilt $x \geq 3$.	Richtig: Es gibt (mindestens) ein x mit $x < 3$. Falsch: Für kein x gilt $x \geq 3$.
Es gibt (mindestens) ein x mit $x < 0$.	Richtig: Für alle x gilt $x \geq 0$. Falsch: Es gibt kein x mit $x < 0$.

Beachte:

- Eine **Existenzaussage** kann man **beweisen**, indem man ein **Beispiel** angibt.
- Eine **Allaussage** kann man **widerlegen**, indem man ein **Gegenbeispiel** angibt.

Beispiele:

- Die Aussage „Es gibt eine Zahl x mit $x^2 = 4$." kann man beweisen, indem man ein Beispiel angibt: $2^2 = 4$.
- Die Aussage „Alle Primzahlen sind ungerade" kann man widerlegen, indem man ein Gegenbeispiel angibt: 2 ist eine gerade Primzahl.

(Malle u. a., 2010)

Die Aufgaben dieses Kapitels sind sehr abwechslungsreich gestaltet und fordern dazu auf, Aussagen bezüglich mathematischer Inhalte zu zeigen oder zu widerlegen, aber auch „Aussagen aus der Welt" sollen geprüft werden. Hier ein paar Beispiele:

2.09 Beweise mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle!

1) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Man nennt $\neg B \Rightarrow \neg A$ die Kontraposition von $A \Rightarrow B$.)

2) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$

3) Gilt auch $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$? Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel!

2.10 Wir betrachten folgende Aussagen:

A: Alle Menschen sind glücklich.

B: Nicht alle Menschen sind unglücklich.

C: Alle Menschen sind unglücklich.

D: Nicht alle Menschen sind glücklich.

E: Mindestens ein Mensch ist unglücklich.

F: Mindestens ein Mensch ist glücklich.

Welche der folgenden Aussagen sind sicher wahr? In welchen Fällen gilt sogar Äquivalenz?

$A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow \neg E$, $\neg A \Rightarrow C$, $F \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow F$, $F \Rightarrow \neg C$, $\neg C \Rightarrow B$, $\neg C \Rightarrow A$, $\neg E \Rightarrow F$, $\neg A \Rightarrow E$

2.11 Bilde die Verneinung der folgenden Aussage! Ist die Aussage oder ihre Verneinung wahr?

a) $\forall x \in \mathbb{Z}: x^3 \geqslant 0$ **b)** $\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 > 0$

2.12 Begründe oder widerlege!

a) $\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 - x > 1$ **b)** $\exists x \in \mathbb{Z}: x^3 < 0$

(Malle u. a., 2010)

Zum Abschluss des Kapitels über Aussagen wird ausführlich auf die von der Alltagssprache unterschiedliche Bedeutung der Schlüsselworte der Mathematik, Junktoren und Quantoren, hingewiesen. Explizit wird für jeden Begriff eine Erwähnung in der Alltagssprache angegeben, in der sich die Bedeutung grundsätzlich von der in einer mathematischen Aussage unterscheidet.

Umgangssprache und mathematische Sprache

In der Mathematik werden manche Wörter, die auch in der Umgangssprache vorkommen, oft in anderer Bedeutung verwendet. Dazu einige Beispiele:

Doppelte Verneinung
Diese bedeutet in der Mathematik eine Bejahung, im Alltag aber oft eine einfache Verneinung. Dies spiegelt sich in manchen Dialekten wider, zB: „Ich sag nie nix."

Und
Die Und-Verknüpfung ist in der Mathematik kommutativ: $A \wedge B = B \wedge A$. Im Alltag hat das Wort „und" häufig die Bedeutung von „und dann", beinhaltet also eine zeitliche Aufeinanderfolge und ist deshalb nicht kommutativ. Der Satz „Ich ärgerte ihn und er wurde böse" ist nicht gleichbedeutend mit „Er wurde böse und ich ärgerte ihn".

Oder
$A \vee B$ wird in der Mathematik stets im nichtausschließenden Sinn verwendet, dh. von den Aussagen A und B muss mindestens eine wahr sein, es können aber auch beide wahr sein. Im Alltag ist es oft anders. Wenn bei einem Menü „Leberknödelsuppe oder Frittatensuppe" angeboten wird, kann der Gast eine dieser beiden Suppen wählen, aber sicher nicht beide.

Wenn ..., dann ...
Diese Wendung wird im Alltag oft im Sinne von „genau dann ..., wenn ..." verwendet.

Beispielsweise folgt in der Mathematik aus $A \Rightarrow B$ nicht die Aussage $\neg A \Rightarrow \neg B$, wohl aber meist im Alltag. Der Satz „Wenn die Schularbeit gut ausfällt, gehen wir ins Kino." beinhaltet selbstverständlich auch „Wenn die Schularbeit nicht gut ausfällt, gehen wir nicht ins Kino."

In der Mathematik ist $A \Rightarrow B$ aber gleichbedeutend mit $\neg B \Rightarrow \neg A$. Das gilt nicht unbedingt im Alltag. Der Satz „Wenn du nach Australien fliegen willst, buchst du einen Flug." ist nicht gleichbedeutend mit „Wenn du keinen Flug buchst, willst du nicht nach Australien fliegen."

Ein
Dieses Wort bedeutet in der Mathematik stets „mindestens ein", im Alltag aber häufig „genau ein". Mit dem Satz „Ein Kind der Familie Müller war ein musikalisches Genie." meint man gewöhnlich nicht, dass auch weitere Kinder dieser Familie musikalische Genies waren.

Einige
Dieses Wort bedeutet in der Mathematik „einige, möglicherweise alle", im Alltag aber meist „einige, aber nicht alle". Mit dem Satz „Einige Kinder der Klasse sind Nichtschwimmer" will man nicht ausdrücken, dass alle Kinder der Klasse Nichtschwimmer sind.

Höchstens und mindestens
„Höchstens" wird in der Mathematik stets im Sinn von „kleiner oder gleich" verwendet. Die Aussage „Die Erde hat höchstens 100 Monde." wird man im Alltagsleben als unsinnig bezeichnen, im Sinn der Mathematik ist sie jedoch richtig. Denn bezeichnen wir die Anzahl der Monde der Erde mit x, dann wird $x \leqslant 100$ ausgesagt. Dies bedeutet $x < 100$ oder $x = 100$, wobei nur mindestens eine dieser beiden Aussagen wahr sein muss. Da die erste dieser beiden Aussagen wahr ist, ist auch die Aussage $x \leqslant 100$ wahr.

Analoges gilt für „mindestens". Die Aussage „Ein Dreieck hat mindestens einen spitzen Winkel." wird man im Alltag nicht als besonders sinnvoll ansehen, weil ein Dreieck ja mindestens zwei spitze Winkel hat. Im Sinn der Mathematik ist diese Aussage jedoch wahr. Denn bezeichnen wir die Anzahl der spitzen Winkel eines Dreiecks mit x, dann wird $x \geqslant 1$ ausgesagt. Dies bedeutet $x > 1$ oder $x = 1$, wobei nur mindestens eine dieser beiden Aussagen wahr sein muss. Da die erste Aussage wahr ist, ist auch die gesamte Aussage $x \geqslant 1$ wahr.

Das Wort „höchstens" bezieht sich in der Mathematik stets auf eine beliebige obere Schranke, die nicht die kleinstmögliche obere Schranke sein muss. Analog bezieht sich das Wort „mindestens" stets auf eine untere Schranke, die nicht die größtmögliche untere Schranke sein muss.

(Malle u. a., 2010)

Bevor ich mich jetzt dem Kapitel der Funktionen widme, möchte ich zusätzlich noch zwei Punkte festhalten, auf die wir in der Diskussion zurückkommen werden:

- *Es wird nie darüber gesprochen, was ein „Beweis" eigentlich ist. Auch wird nicht erwähnt, was gültige oder schlüssige Argumente sind.*

- *Außerdem werden die eingeführten Symbole und Beziehungen im ganzen restlichen Buch weiterverwendet. In vielen Kapiteln finden sich All- und Existenzquantoren und auch $\wedge$ und $\vee$ treten einige Male wieder auf.*

Hier ein Beispiel aus dem Kapitel „Quadratische Gleichungen“:

Lösen quadratischer Gleichungen mit Parametern

4.58 Löse die Gleichung allgemein nach x und gib dann die Lösungen für die angegebenen Werte der Parameter an!

a) $2x^2 - ax - a^2 = 0$
$[a = 0,\ a = 2,\ a = -2]$

b) $3x^2 - (2a - 3b) \cdot x - 2ab = 0$
$[a = b = 0,\ a = 1 \wedge b = 2,\ a = 3 \wedge b = 5]$

Lösung: **a)** $2x^2 - ax - a^2 = 0$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{4}$$
$$x = \frac{a \pm \sqrt{9a^2}}{4}$$
$$x = \frac{a \pm 3a}{4}$$
$$x = a \vee x = -\frac{a}{2}$$

Für $a = 0$: $x = 0$

Für $a = 2$: $x = 2 \vee x = -1$

Für $a = -2$: $x = -2 \vee x = 1$

b) $3x^2 - (2a - 3b) \cdot x - 2ab = 0$

$$x = \frac{2a - 3b \pm \sqrt{(2a - 3b)^2 + 24ab}}{6}$$
$$x = \frac{2a - 3b \pm \sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2 + 24ab}}{6}$$
$$x = \frac{2a - 3b \pm \sqrt{4a^2 + 12ab + 9b^2}}{6}$$
$$x = \frac{2a - 3b \pm \sqrt{(2a + 3b)^2}}{6}$$
$$x = \frac{2a - 3b \pm (2a + 3b)}{6}$$
$$x = \frac{2a}{3} \vee x = -b$$

Setze selbst die Werte für a und b ein!

(Malle u. a., 2010)

Funktionen

Für viele Aufgaben im Kapitel Funktionen können die Schülerinnen und Schüler korrekte „...genau dann, wenn...“ Verknüpfungen mitdenken, um auf die richtige Lösung zu kommen. Schülerinnen und Schüler, welche diese „...genau, dann wenn...“-Argumente mitdenken oder artikulieren können, haben genau genommen diese Beispiele perfekt verstanden.

Sehr deutlich ist das zu erkennen, wenn man Beispiele folgender Form betrachtet:

Gegeben ist eine Funktionenklasse, gefragt ist nach einer bestimmten Eigenschaft einer konkreten Funktion, die in direktem Zusammenhang mit der Belegung eines der Parameter der Funktionenklasse steht.

z.B.:

8.09 Ist der Graph der gegebenen Funktion eine steigende oder fallende Gerade?
a) $f(x) = 11x - 11$ **b)** $f(x) = \frac{x}{2} + 6$ **c)** $f(x) = -3x + 14$ **d)** $f(x) = -x + \frac{1}{2}$

(Malle u. a., 2010)

8.79 Zwei Ballonfahrer landen. Der erste Ballon befindet sich 420 m über dem Boden und sinkt um 6 m pro Minute. Der zweite Ballon befindet sich 380 m über dem Boden und sinkt um 4 m pro Minute. Beantworte rechnerisch und grafisch:
1) Wann erreicht der erste Ballon den Boden, wann der zweite?
2) Nach welcher Zeit ist der erste Ballon tiefer als der zweite?

8.80 In einem Öltank steht das Öl 4,8 m hoch. Das Öl wird über einen Schlauch in einen breiteren Tank umgefüllt, wobei der Ölspiegel im ersten Tank um 5 dm pro Stunde sinkt und im zweiten Tank um 4 dm pro Stunde steigt. Ermittle rechnerisch und grafisch, nach welcher Zeit das Öl in beiden Tanks gleich hoch steht!

8.81 Zwei zylindrische Tanks mit gleicher Grundfläche werden mit einer Flüssigkeit gefüllt. Im ersten Tank befinden sich zu Beginn 1000 l und pro Minute fließen 250 l zu. Der zweite Tank ist zu Beginn leer und pro Minute fließen 500 l zu. Beantworte rechnerisch und grafisch:
1) Nach welcher Zeit enthalten beide Tanks gleich viel Flüssigkeit?
2) Zu welchen Zeitpunkten unterscheiden sich die beiden Tankinhalte um 125 l?

(Malle u. a., 2010)

Bei 8.80 beispielsweise durchläuft eine Schülerin oder ein Schüler, welche das Beispiel verstanden hat einen Gedanken den man folgendermaßen formulieren könnte:

„Das ist **genau dann** der Fall, **wenn** sich die beiden Funktionsgraphen [nämlich der des Spiegels im ersten Tank und der des Spiegels im zweiten Tank] schneiden."

Es ist dabei egal, ob die Schülerin diesen Gedanken hat, bevor sie auf die Idee kommt, beide Spiegel als Funktionen darzustellen oder danach. Für das Aufstellen dieser Gleichungen kommen dann auch wieder Genau-Dann-Wenn-Relationen ins Spiel, aber diese weiter zu erläutern, ist hier nicht nötig, denn was ich behaupten will, ist die Aussage, dass mögliche Lösungswege logisch formulierbar sein sollten.

Damit meine ich natürlich nicht durch die Schüler, aber korrekt gelöst ist es dann, wenn die Argumente auch der Logik standhalten. Es liegt natürlich im Ermessen des Lehrers/der Lehrerin, wie streng logisch die Schüler argumentieren müssen.

Man könnte von ihnen verlangen, die symbolische Notation zu verwenden, oder die Junktoren auszuschreiben oder aber weder noch. Im letzteren Fall wird man einfach bewerten, ob die Schüler das richtige meinen, ob die logischen Schritte zur Genüge nachvollziehbar sind.

Teilbarkeit

3.9 Teilbarkeit

Weil $3 \cdot 4 = 12$ ist, sagt man: „3 und 4 sind Teiler von 12". Allgemein:

Definition Es seien $a, b \in \mathbb{N}^*$. Man nennt **a** einen **Teiler von b**, wenn es ein $x \in \mathbb{N}^*$ gibt, sodass $a \cdot x = b$.

Man schreibt: $a|b$ [Lies: a ist Teiler von b. Oder: a teilt b]
$a \nmid b$ [Lies: a ist kein Teiler von b. Oder: a teilt nicht b]

Satz Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ gilt:
Transitivitätsregel: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ **Vielfachenregel:** $a|b \Rightarrow a|(b \cdot c)$

Beweis:
Transitivitätsregel: Es gelte $a|b \wedge b|c$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{N}^*$ mit $b = a \cdot x$ und ein $y \in \mathbb{N}^*$ mit $c = b \cdot y$. Daraus folgt $c = a \cdot x \cdot y$. Setzen wir $x \cdot y = z$, folgt $c = a \cdot z$ mit $z \in \mathbb{N}^*$. Somit gilt $a|c$.
Vielfachenregel: Kann ähnlich bewiesen werden (Aufgabe 3.101a). □

Satz Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ gilt:
Summenregel: $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b + c)$ **Differenzregel:** $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b - c)$ (sofern $b > c$)

Beweis:
Summenregel: Es gelte $a|b \wedge a|c$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{N}^*$ mit $b = a \cdot x$ und ein $y \in \mathbb{N}^*$ mit $c = a \cdot y$. Daraus folgt $b + c = a \cdot (x + y)$. Setzen wir $z = x + y$, folgt $b + c = a \cdot z$ mit $z \in \mathbb{N}^*$. Somit gilt $a|(b + c)$.
Differenzregel: Kann analog bewiesen werden (Aufgabe 3.101b). □

Satz Für alle $a, b, c, n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a = b + c \wedge n|a \wedge n|b \Rightarrow n|c$

Beweis: Aus $n|a \wedge n|b$ folgt nach der Differenzregel $n|(a - b)$, also $n|c$. □

(Malle u. a., 2010)

Wie man erkennen kann, wird beim Einführen der Teilbarkeitsregeln die aussagenlogische Notation verwendet. Der „∧"-Junktor spielt eine tragende Rolle und auch die mathematische Version des „Wenn..., dann...", ⇒, kommt in jeder Regel zum Einsatz.

Die erste Definition (Teiler) ist allerdings auffällig, weil hier anscheinend bewusst auf Notation in logischen Symbolen verzichtet wird. Alternativ hätte man auch schreiben können:

Definition Teiler

$$\exists x \epsilon \mathbb{N}\ für\ das\ gilt: x \cdot a = b\ \wedge a, b \in \mathbb{N}, dann\ heißt\ a\ Teiler\ von\ b.$$

Zugegeben, diese Formulierung scheint ein wenig umständlich und schwerfällig.

Erwähnenswert erscheint mir auch, dass jeder der Sätze mit den Worten „Für alle a,b,c $\epsilon \mathbb{N}^*$gilt:" beginnt. Obwohl die Quantoren im 2.Kapitel über Aussagen erklärt werden:

> Gelegentlich werden in der Mathematik die Zeichen **∀ x** [Lies: für alle x] und **∃ x** [Lies: es gibt ein x] verwendet. Die Zeichen ∀ und ∃ heißen **Quantoren**.

(Malle u. a., 2010)

Trotzdem verzichten die Autoren darauf, hier mit „∀" zu arbeiten. Ob darin wirklich eine Vereinfachung für die Schüler und Schülerinnen liegt, erscheint mir fraglich. Verwendet man konsequent das Symbol für den Allquantor, anstatt „Für alle" auszuschreiben, wird dieses Symbol sicher sehr schnell verinnerlicht. Immerhin würde es hier auf einer einzigen Seite bereits drei Mal sehr zentral auftauchen. Durch die exakte Definition und eine regelmäßige Wiederholung dieses Symbols im Mathematikunterricht würden die Schüler und Schülerinnen sicher sehr schnell die Bedeutung desselben erkennen. Immerhin sind sie in Mathematik nicht gerade mit einer allzu großen Menge an neuen Symbolen konfrontiert. In jeder [anderen] Sprache müssen sie sich ungleich viel mehr neue Vokabeln merken. Obendrein kann man argumentieren, dass Mathematiker einfach zu faul/lässig/cool sind, jedes einzelne Mal „Für alle..." zu schreiben, deshalb haben sie einfach eine Abkürzung dafür erfunden: ∀. Das sollte zumindest für einige grinsende Sympathisanten in der Klasse sorgen, geht man davon aus, dass die durchschnittliche Lernmotivation von 5.Klässlern auf einer beliebigen Skala keinen übermäßig großen Wert erreicht.

Die ersten neun Aufgaben dieses Kapitels beginnen alle mit „Beweise...". Die restlichen Sätze der Teilbarkeit, welche noch nicht auf der Theorieseite bewiesen wurden, sind auch unter diesen Beispielen. Die ersten drei Sätze und ihre Beweise sind für die Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich auch einigermaßen im Selbststudium zu verstehen, der Beweis für die Teilbarkeit durch 9 und 3 wird aber voraussichtlich eine kurze Ausschweifung zu Darstellungsformen von Zahlen erfordern. Die Möglichkeit, Zahlen als Summen aus Zehnerpotenzen und zugehörigen Koeffizienten zwischen Null und Neun darzustellen, wird zumindest von einigen Schülerinnen und Schülern als nicht selbstverständlich empfunden werden.(vgl Malle u. a., 2010)

Sehr gut gefällt mir auch die Aufgabe 3.110: „Formuliere die Summenregel in Worten!“, da es sich hier um eine seltene Übersetzungsübung in entgegengesetzte Richtung handelt. Also von Mathematisch in Alltagssprache.

Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellung

Auch in diesem Kapitel wird „∧“ häufig verwendet. Ansonsten ist von der aussagenlogischen Symbolik nicht viel zu entdecken.

Aber das Kapitel folgt natürlich, genauso wie jedes andere, den Denkgesetzen der Logik. Die Aussagenlogik ist ein zentraler Baustein der Mathematik.

Auch beim Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellung werden zuerst allgemein gültige Prämissen (Sätze und Definitionen) eingeführt. Die Beispiele sind dann Spezialfälle, über die man eben nur einen Teil weiß. Aber zusammen mit den allgemeinen Prämissen und den speziellen Prämissen lässt sich über die logisch gültigen Schlussmuster die Lösung herleiten. Im Endeffekt verhält es sich nirgends in der Mathematik, zumindest nicht in der Schulmathematik, anders.

Hier ein Beispiel:

Aufgabe 14.10 a) Liegt der angegebene Punkt auf der Geraden g?

$$A = (-5|-4), g: X = (3|0) + t \cdot (2|-1)$$

Im Buch werden zwei Lösungsmöglichkeiten angeboten(Malle u. a., 2010).

Wenn der Vektor der durch A und den in der Geradengleichung enthaltenem Punkt zum aus der Gleichung bekannten Vektor parallel ist, **dann** muss der Punkt auf der Geraden liegen.

Nun kann man die Überlegung zur Lösung in die Notation der Aussagenlogik wie folgt übersetzen:

Sei a die Aussage „Der Vektor aus A und dem bekannten Punkt aus der Gleichung ist zum bekannten Vektor aus der Gleichung parallel.“

Sei b die Aussage „Der Punkt liegt auf der Geraden.“

Es gelten nun diese beiden Prämissen:

Zunächst der oben genannte Lösungsweg in Logischen Symbolen:

$$a \leftrightarrow b$$

Oder ohne Äquivalenzjunktor ausgedrückt: $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

Also gilt insbesondere auch, durch die ∧-Eliminierungsregeln des Kalküls des natürlichen Schließens, jeder Teil links und rechts des ∧ einzeln für sich.

Die zweite, ich nenne sie ab jetzt „spezielle“, Prämisse kann immer durch das bereits vorhandene Skillset des Schülers bzw. der Schülerin überprüft werden. Dies geschieht hier einfach durch:

$$(3|0) - (-5|-4) = (8|4)$$

Mithilfe eines Schlusses, den die Schülerin oder der Schüler bereits aus dem vorigen Kapitel kennt, kann er oder sie nun sagen, dass die beiden Vektoren nicht parallel sind. Also gilt b nicht. Die zweite Prämisse ist also $\neg b$.

ALLGEMEINE PRÄMISSE:	a→b
SPEZIELLE PRÄMISSE:	¬b
KONKLUSIO:	¬a

Das hier verwendete Schlussschema ist **Modus Tollens**. Im Falle eines parallelen Vektors würde die Tabelle so aussehen:

ALLGEMEINE PRÄMISSE:	$b \rightarrow a$
SPEZIELLE PRÄMISSE:	b
KONKLUSIO:	a

Das zugrundeliegende Schema wäre ein klassischer **Modus Ponens**.

Natürlich wäre es unvernünftig, zu behaupten, dass es Sinn machen würde, einem Schüler zu erklären:

„Ouh ja! Großartig! Du bist meisterhaft im Umgang mit Modus Ponens und Tollens!“

Andere Aufgaben sind so gestellt, dass sie mit einem Gegenbeispiel gelöst werden können. Auch hier würde wohl kaum ein Lehrer, sobald er eine richtige Lösung hört, aufschreien: „Heureka! Was für ein reductio ad absurdum!“

Es ist nur kaum jemand bewusst, dass viele Beispiele, die im Unterricht eine Rolle spielen, auf dieselben Schlussmuster zurückzuführen sind.

Noch viel wichtiger ist es, festzuhalten, dass ein Beispiel, bei dem kein Schlussmuster im Hintergrund abläuft, ein unnötiges Beispiel ist. Dann gibt es keine Transferleistung und auch keine Reproduktionsleistung. Die Schülerinnen und Schüler würden bei einem derartigen Beispiel nur etwas wiederholen. Eine Reiteration ist zwar ein beim natürlichen Schließen erlaubtes Hilfsmittel, bringt aber eigentlich keinen Mehrwert.

Abschließend zu diesem Buch ein paar zusammenfassende Bemerkungen:

Erstens: das Buch verzichtet trotz neuen Lehrplans nicht auf logische Syntax. Junktoren und Quantoren werden eingeführt und vor allem $\wedge$ kommt im gesamten Buch konsequent zum Einsatz.

Zweitens Mathematik als Sprache wird vor allem anhand von logischen Schlüsselworten von der Alltagssprache abgegrenzt.

Drittens: Die Erkenntnis, dass ich beim nächsten Buch auf die Parameterdarstellung von Geraden verzichten werde. Der einzige Erkenntnisgewinn meiner Untersuchung eben desselben in diesem Buch war nicht, dass es sich dabei um ein Kapitel mit einem besonderen Bezug zu Logik handelt. Vielmehr war es mangels irgendwelcher offensichtlicher, oberflächlicher Verbindungen zur Logik, dass ich auf einen viel tieferen, intrinsischeren Zusammenhang zwischen Schulmathematik und Logik stieß: die logischen Schlussmuster. Nach dieser Erkenntnis richtete ich auch einen Teil meiner Recherche in der mathematisch-didaktischen Fachliteratur aus und stieß mit Hans Freudenthal auf einen Autor, der diesen Aspekt sehr ausführlich behandelt. Ich werde seine Theorien in Kapitel 4 vorstellen.

Lösungswege 5

Das nächste Buch, das ich mir vorknöpfen will, heißt Lösungswege 5. An der Schule, an der ich zurzeit unter Vertrag stehe, wird mit diesem Buch gearbeitet.

Zunächst ist einmal festzuhalten, dass über Aussagen in diesem Buch gar keine Aussage gemacht wird. Es gibt überhaupt kein Kapitel, dass sich damit beschäftigt und auch im Stichwortregister findet sich kein Hinweis darauf. Ebenso wenig findet man eine Definition des Wortes „und“ und auch keine des Begriffs „oder“. Genau genommen findet man nicht einmal das Wort „Definition“. Das Binärsystem wird anhand der Informatik vorgestellt, aber eine 0-1-Logik erklärt? Keine Spur.

~~Aussagen und~~ Mengen

Wie gesagt widmet sich dieses Kapitel hier eigentlich ausschließlich dem Thema Mengen. Aussagen über Aussagen wurden gestrichen. Zuerst werden die verschiedenen Darstellungsformen eingeführt, dann widmen sich einige Beispiele dem Wechseln zwischen den Darstellungsformen.

Diese Aufgaben sind aus logischer Sicht deshalb interessant, weil die Schwierigkeit für die Schülerinnen und Schüler darin besteht, die nicht offensichtlichen Prämissen herauszufinden.

Beim Übertragen einer Menge von beschreibender in aufzählende Form ist zwar wahrlich nicht viel mehr gefordert als genaues Lesen, aber umgekehrt:

4. Gib die Menge jeweils in beschreibender Darstellung an.

a) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	**c)** $C = \{5, 7, 9, 11, 13\}$	**e)** $E = \{11, 12, 13, 14, 15\}$
b) $B = \{-13, -12, -11, -10\}$	**d)** $D = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$	**f)** $F = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

(Freiler u. a., 2015)

Nehmen wir Aufgabe c)

Die Schüler und Schülerinnen müssen sich folgende Prämissen zurechtlegen:

P1: a... Alle Zahlen sind ungerade.

P2: b... Von 5 bis 13 sind alle ungeraden Zahlen in der Menge.

Außerdem gilt für die beschreibende Darstellung allgemein:

P: Diese Darstellung besteht aus einer Grundmenge und aus den gemeinsamen Eigenschaften der Elemente... $p \wedge q$

In Prinzip funktioniert dieses Beispiel nun nur durch Gleichsetzen der Prämisse a mit p aus der allgemeinen Prämisse und b wird interpretiert als q aus der allgemeinen Prämisse.

Dann schließt man aus a und b auf $a \wedge b$. Und fertig.

Es wird nicht einmal eine logische Schlussregel benötigt. Alles was hier notwendig ist, besteht darin Gemeinsamkeiten zu erkennen und genaues Lesen.

Nach den Darstellungsformen werden Verknüpfungen von Mengen eingeführt. Die Aufgaben dazu erinnern sehr stark an das aussagenlogische Formulieren von Sätzen, die in der Alltagssprache gegeben sind.

14. Es sei M die Menge an Angestellten in einer Firma, V die Menge der Angestellten dieser Firma, die bei einem Sportverein angemeldet sind, R sei die Menge der Raucher in dieser Firma und H die Menge der Raucherinnen. Stelle die beschriebenen Mengen mittels R, V, H und M dar.

a) Raucherinnen, die bei keinem Sportverein sind.
b) Jene Angestellten, die nicht rauchen und bei keinem Sportverein sind.
c) Jene Angestellten, die rauchen und bei einem Sportverein sind.

(Freiler u. a., 2015)

Im Prinzip ähnlich zu einem Beispiel wie:

Beispiel 6. Formalisiere folgende Sätze des Deutschen so gut es geht im Rahmen unserer offiziellen Sprache der Aussagenlogik:

i) Marianne mag Hans, aber Jutta kann sie nicht leiden.

ii) Helene hasst Otto, und obwohl sie Max mag, kann sie weder Elke noch Franz leiden.

(Freiler u. a., 2015)

Nur, dass man bei dem Logik-Beispiel auch selbst die Variablen festlegen muss und dass es eben aussagenlogische Verknüpfungen sind und nicht die Mengenverknüpfungen. Aber im Grunde ist die Aufgabenstruktur praktisch gleich.

Teilbarkeit

MERKE

Arbeitsblatt wf48m6

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist

- durch 2 teilbar, wenn die Einerziffer gerade ist. (z. B. 140 568)
- durch 3 teilbar, wenn die Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. (z. B. 813, da 8 + 1 + 3 = 12)
- durch 4 teilbar, wenn die aus Zehner- und Einerziffer gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. (z. B. 579156)
- durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist. (z. B. 450)
- durch 8 teilbar, wenn die aus Hunderter-, Zehner- und Einerziffer gebildete Zahl durch 8 teilbar ist. (z. B. 72 848)
- durch 9 teilbar wenn die Ziffemsumme durch 9 teilbar ist. (z. B. 342, da 3 + 4 + 2 = 9)

(Freiler u. a., 2015)

Offensichtlich ist hier die Wenn-dann-Verknüpfung sehr präsent. Genauer betrachtet sollte es allerdings eine Genau-dann-wenn-Verknüpfung sein. Denn die umgekehrten Negationen gelten jeweils auch:

Wenn die Einerziffer nicht gerade ist, ist die Zahl nicht durch 2 teilbar.

Das wird hier zwar impliziert und vermutlich auch von den Schülerinnen und Schülern so verstanden, denn sonst würden Aufgaben wie:*„Ist diese Zahl durch 2 teilbar?“,* keinen Sinn ergeben. Streng genommen könnte man bei dieser Formulierung, hätten sie eine ungerade Einerziffer, dann nichts über die Teilbarkeit durch zwei sagen. Genau genommen, wäre der Wahrheitswert eines Konditionals mit falschem Antezedens sogar „Wahr“. Exo falso quodlibet.

Außerdem sind die Schülerinnen und Schüler aus der Alltagssprache gewohnt, dass man von der Negation des Antezedens auf die Negation des Konsequenz schließen darf. Das ist aber eben genau einer der wichtigsten Unterschiede zwischen Alltagssprache und Sprache der Mathematik/Logik. Ich bezweifle, dass es für das Verständnis der Mathematik vorteilhaft ist, wenn man sie auf Kosten der mathematischen Korrektheit ein wenig mehr „alltäglich“ klingen lässt. Ist so eine Verschleierung der Abgrenzung zwischen den beiden Sprachen nicht eher eine weitere Quelle für Konfusion und Verwirrung?

Funktionen

Dieses Kapitel nimmt den sprachlichen Charakter von Mathematik sehr ernst. Es gibt ein eigenes Subkapitel mit dem Titel „Funktionensprache“, in dem alle möglichen Vokabeln gelistet und erklärt werden. Besonders interessant fand ich, dass in diesem Buch auch eines der Schlüsselworte in den Aufgabestellungen der neuen Zentralmatura erklärt wird. So hatte ich vor kurzem erst eine interessante Diskussion mit einem Germanistikkollegen über die unterschiedlichen Bedeutungen von „Interpretiere...“ in unseren beiden Fächern. Ich bin glücklich, nun hier eine Antwort auf die Frage nach der Bedeutung in einer Mathematikaufgabe gefunden zu haben:

> MERKE
>
> **Interpretieren** heißt in der Mathematik, die Bedeutung eines mathematischen Ausdrucks (Zahl, Koordinate, Term, Gleichung, …) im geschilderten Sachzusammenhang (Kontext) zu beschreiben. Bei dieser Beschreibung sollte man Alltagssprache verwenden und soweit wie möglich auf mathematische Formulierungen verzichten.

(Freiler u. a., 2015)

Und etwas weiter hinten werden sogar speziellere Interpretationen erklärt:

> MERKE
>
> **Interpretation der Parameter k und d einer linearen Funktion G mit $G(x) = kx + d$ im Kontext**
>
> – d entspricht dem „Anfangswert“ der Größe G: $G(0) = d$.
>
> – Die Steigung k gibt immer eine Änderung an. Man spricht in Anwendungsbeispielen auch von der **Änderungsrate**. Und zwar gibt k die Änderung des Funktionswertes an, wenn sich das Argument um eine Einheit vergrößert.

(Freiler u. a., 2015)

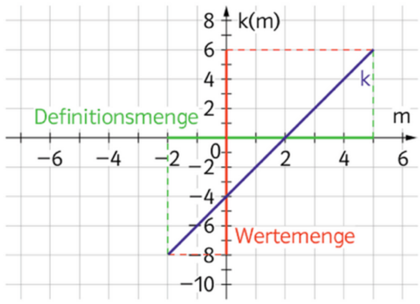
Da dies nur am Rande mit meiner Arbeit zu tun hat, will ich sofort wieder zum Thema zurückkommen:

Wieviel Logik benötigt man zum Lösen der Aufgaben?

Betrachten wir zunächst die ersten Beispiele:

406. Zeichne den Graphen der gegebenen Funktion für die angegebene Definitionsmenge D und bestimme die Wertemenge der Funktion.
$k(m) = 2m - 4 \quad D = [-2; 5]$

m	k(m)
−2	−8
0	−4
2	0
5	6



Zunächst erstellt man eine geeignete Wertetabelle.
Beim Zeichnen des Graphen ist die richtige und vollständige Beschriftung der Koordinatenachsen wichtig. $W = [-8; 6]$

(Freiler u. a., 2015)

Es handelt sich erneut um Wenn-Dann-Verknüpfungen.

Wenn das Argument m ist, dann ist der Funktionswert 2m-4.

Hier handelt es sich übrigens wirklich um ein Wenn-Dann und nicht ein Genau-dann-wenn. Es kann ja auch sein, dass der Funktionswert auch für ein anderes m genau derselbe ist. Die Eindeutigkeit der Zuordnung (als solche sind Funktionen auch in diesem Buch geschickt definiert) muss nur in diese eine Richtung garantiert sein.

Diese ersten Aufgaben gehen also Hand in Hand mit dem Verständnis der Wahrheitsbedingungen des Konditionals, beziehungsweise mit der Bedeutung der Begriffe notwendige und hinreichende Bedingung.

Auch bei den darauffolgenden Beispielen dreht es sich im Hintergrund hauptsächlich um Wahrheitsbedingungen des Konditionals.

422. P(s) gibt den Preis (in Euro) für eine Taxifahrt an, die s Kilometer lang ist. Interpretiere den Term.

a) $P(7)$ **b)** $P(7) - P(6) = 3$ **c)** $P(2s)$ **d)** $\frac{P(5)}{5}$ **e)** $P(s) + 4 = P(s+1)$

(Freiler u. a., 2015)

422.a) ist nichts weiter als eine Wiederholung folgenden Gedankens:

„Wenn das Argument (in diesem Fall s) gleich einer bestimmten Zahl (hier 7) ist, dann ist der Preis gegeben durch P(s=7).“

Solche Beispiele dienen nur der Verinnerlichung und Festigung des bereits gelernten, sowie zur Wiederholung der [für die Zentralmaturaaufgaben] wichtigen Vokabeln.

422.b) ist schon interessanter. Hier kann ein logischer Schluss folgendermaßen formuliert werden:

P1. Wenn s=7km, dann ist der Preis gleich P(7)€.

P2. Wenn s=6km, dann ist der Preis gleich P(6)€.

P3. Die Differenz (P(7)-P(6)) drückt einen (Preis-)Unterschied aus (Allgemeine Prämisse aus einer früheren Schulstufe).

Konklusion: P(7)-P(6) ist der Preisunterschied zwischen einer 7km und einer 6km langen Fahrt.

Später wird für die Differenz von Funktionswerten ein eigener Begriff eingeführt: die absolute Änderungsrate.

Ich könnte noch weiter einzelne Kapitel und Beispiele auflisten, doch ich denke ich schließe meine Lektüre von Lehrbüchern mit diesem Buch ab. Lösungswege 5 scheint ein Buch zu sein, das den Kern des neuen Lehrplans sehr gut zur Geltung bringt. Es hat sich um einiges gravierender vom Stil früherer Mathematikbücher abgewandt, beispielsweise von *Mathematik verstehen 5*. Auch beim Durchlesen von anderen Lehrbüchern in der Fachbibliothek und unserem Schulkustodiat habe ich kaum etwas Vergleichbares entdecken können. Die Formulierungen sind an den neuen Lehrplan angepasst: Begründen, Interpretieren, Beschreiben. Diese Schlüsselworte ziehen sich durch die Aufgabenstellungen jedes Kapitels. Das Buch fokussiert Fragestellungen, wie sie für die Zentralmatura vorgesehen sind und es versucht, vermeintlich sperrigen Fachtermini aus dem Weg zu gehen und intuitives Lernen zu ermöglichen.

Ich denke, bevor ich mich an die Pros und Kontras und eine argumentative Evaluation meiner Buchanalysen machen kann, sollte ich zunächst noch Bezug auf relevante Fachliteratur nehmen.

Insbesondere Literatur zur:

- *Logik im Mathematikunterricht*
- *Die Rolle der Aussagenlogik für die Mathematik*
- *Die Rolle der Aussagenlogik für das Verständnis von mathematischen Inhalten*

4. LOGIK IM KONTEXT MATHEMATIK

4.1 DIE BEZIEHUNG ZWISCHEN MATHEMATIK UND LOGIK

Die Beziehung zwischen Logik und Mathematik erinnert ein bisschen an eine zwischenmenschliche Liebesbeziehung. Sie verlief beileibe bisher nicht problemlos und ist es bis heute nicht. Ich will in diesem kurzen Ausflug das Verhältnis zwischen den beiden genauer unter die Lupe nehmen. Wie wichtig ist die eine für die andere und umgekehrt?

Die Resultate, die ich dann über die Beziehung zwischen diesen zwei Wissenschaften ziehen werde, sind nicht unwesentlich mit meiner Forschungsfrage verbunden.

In der Antike waren Logik und Mathematik noch mehr oder weniger in Eintracht, fast wie zwei frisch Verliebte wuchsen und gediehen sie an und durch einander in einer konstruktiven annähernd reibungslosen Beziehung.

Doch diese Eintracht sollte nicht ewig wären, denn die Umwälzungen, die sich zur Jahrhundertwende um 1900 anbahnten, erschütterten alle bisher schwerelosen Liebesspiele und legten Gewicht und Ernsthaftigkeit in ihre Beziehung.

Cantors Mengenlehre und Freges Begriffsschrift waren zwei entscheidende Publikationen, die das Verhältnis neu definierten. Es waren Theorien, anhand derer man erstmals das Verhältnis zwischen Logik und Mathematik in Worte fassen konnte. Vor allem Freges Begriffsschrift ist von großer Bedeutung, wenn man über dieses Verhältnis Aussagen machen möchte, gelang es ihm doch damit erstmalig, eine künstliche Sprache zu ersinnen, mit der es möglich war, die gesamte bisher bekannte Mathematik und den zugehörigen logischen Schlussapparat zu formalisieren (vgl Hoffmann, 2013, S. 28). Hinzu kommt, dass Freges Hauptwerk die Grundlage bildet, auf welcher die moderne Prädikatenlogik fußt.

"Im Gegensatz zu vielen seiner Zeitgenossen, zu denen auch Cantor und Boole gehörten, sah er [Frege] die Logik nicht als Teil der Mathematik, sondern umgekehrt die Mathematik als Teil der Logik an." (Hoffmann, 2013, S. 30)

Die Frage, welche der beiden Wissenschaften der anderen unterzuordnen sei, scheint mir eine wesentliche zu sein. Doch bevor ich hier eine Aussage darüber tätige, welche der beiden die dominante Rolle in dieser Beziehung spielt, möchte ich die Zeit noch ein bisschen vorspulen, um Russels Rolle zu erläutern. Denn er war es, der nicht nur den armen Frege mit einem Brief in die Krise stürzte, sondern auch die mathematische Community entzweite, als er Freges Vorhaben durch gezielte Gegenbeispiele ins Wanken brachte. Frege erholte sich von dem Schock nicht, und so machte es sich Russel selbst zur Aufgabe, eine wasserdichte Formulierung der gesamten Mathematik zu verfassen. Zusammen mit Whitehead veröffentlichte er das kolossale Werk *Principia Mathematica*.

"An Russells und Whiteheads monumentalem Werk werden sowohl die Vor- als auch die Nachteile einer vollständig formalisierten Mathematik sichtbar." (Hoffmann, 2013, S. 49)

Russel und Whitehead glaubten, damit die Sache endgültig erledigt zu haben. Sie hatten gezeigt, dass es möglich war, einen logischen Formalismus zu entwickeln, in dem eindeutig und widerspruchsfrei die gesamte Mathematik formulierbar war. Die Notation, die die beiden verwendeten, war jedoch zu unhandlich für viele ihrer Zeitgenossen und so setzte sich die Formulierung in der Mengenlehre durch. Cantors Theorie wurde von Zermelo und Fraenkel verfeinert und bildet bis heute das Rückgrat der modernen Mathematik. Ihr Apparat ist stark genug, um alle wesentlichen Begriffe und Konzepte der modernen Mathematik zu formalisieren, doch ob sie tatsächlich frei von Widersprüchen ist, bleibt weiterhin unklar. Möglicherweise schützt uns nichts davor in eine neuerliche Grundlagenkrise zu geraten, wie sie einst die Aussage eines jungen Mathematikers namens Kurt Gödel auslöste. (vgl Hoffmann, 2013, S. 53)

„Man kann - unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik - sogar Beispiele für Sätze (und zwar solche von der Art des

> Goldbach'schen oder Fermat'schen) angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind." [172]" (Hoffmann, 2013, S. 57)

Damit erlitt Russel durch Gödel dasselbe Schicksal, welches er selbst für Frege schuf, als er dessen Lebenswerk in seine Grenzen verwies. Denn Gödels Behauptung verhieß nichts weniger Dramatisches, als dass der logische Apparat der *Principia Mathematica* unvollständig war. Damit nicht genug, zeigte Gödel auch, dass es unmöglich ist, die *Principia* oder ein ähnliches System jemals zu vervollständigen.

> „Gödel wies damit nicht nur den logischen Apparat der Principia Mathematica, sondern die gesamte formale Methode in ihre Grenzen. Seit seiner Entdeckung wissen wir, dass kein formales System jemals in der Lage sein wird, die Mathematik vollständig zu erfassen." (Hoffmann, 2013, S. 58)

Nach diesem historischen Umriss folgen noch einige konkrete Feststellungen zur Beziehung zwischen Mathematik und Logik. Praktisch jede Theorie der modernen Mathematik wird immer in einem formalen System formuliert und diskutiert. Ein solches System besteht immer aus einer Syntax, einer Semantik und dem Schlussapparat. Letzterer besteht aus Axiomen und Schlussregeln.

Definition Syntax

"Die Syntax definiert, nach welchen Regeln die Ausdrücke (Formeln) aufgebaut sein müssen, die sich innerhalb des Kalküls erzeugen und manipulieren lassen. Eine Formel ist in diesem Stadium nichts weiter als eine Folge von bedeutungsleeren Symbolen, die in einer festgelegten Art und Weise miteinander kombiniert werden dürfen." (Hoffmann, 2013, S. 80)

Definition Semantik

"Die Semantik bestimmt, wie wir die einzelnen Bestandteile einer Formel zu interpretieren haben, und verleiht den Formeln hierdurch eine Bedeutung. Erst die Wahl einer konkreten Interpretation berechtigt uns dazu, von wahren und von falschen Formeln zu sprechen." (Hoffmann, 2013, S. 82)

Axiome und Schlussregeln

Die Ausformulierung von Axiomen und Schlussregeln ermöglicht es, neue Resultate (Theoreme) auf syntaktischen Wegen aus bereits feststehenden abzuleiten. Das Essentielle dabei ist, dass man dabei nicht über die Bedeutung der einzelnen Formelbestandteile sprechen muss.

Der Grund, warum ich diese Begriffe hier klar formuliere, ist dieser: Egal ob es um Zahlentheorie, die Mengenlehre, Analysis oder Algebra geht, in jedem einzelnen Gebiet der Mathematik sind diese drei Begriffe von zentraler Bedeutung. Ohne eine klare Vorstellung von ihnen zu haben, wäre wissenschaftliche Mathematik verloren. Insbesondere ist natürlich auch jedes Gebiet der „gewöhnlichen" Mathematik an einen Schlussapparat gebunden und dieser bleibt stets der gleiche. Und egal in welcher Modellierung der Logik ein Gebiet formuliert ist, Mathematik ohne einen solchen Schlussapparat gibt es nicht.

Die im Lehrplan behandelten Gebiete stehen insbesondere immer auf einem aussagenlogischen Schlussapparat oder einem prädikatenlogischen Apparat erster Stufe.

> "Die Bedeutung der Aussagenlogik ist beträchtlich. Sie ist als Teilmenge in nahezu allen formalen Schlussapparaten enthalten und damit der kleinste gemeinsame Nenner, über den alle Logiken miteinander verbunden sind." (Hoffmann, 2013, S. 95)

Wenn die Aussagenlogik von derart zentraler Bedeutung für die Mathematik ist, verdient sie dann nicht eine feste Stelle im Lehrplan? Zumindest ist sie von zentraler Bedeutung für meine Arbeit und deshalb gebe ich an dieser Stelle noch einen Verweis auf eine ausführliche Beschreibung der Aussagenlogik. Prof. Dr. Dirk W. Hoffmann von der Hochschule Karlsruhe schreibt in seinem Lehrbuch „Grenzen der Mathematik" über die Fundamente der Mathematik. Darunter findet sich auch ein sehr aufschlussreiches Kapitel zur Aussagenlogik, ihrer Semantik, ihrer Syntaktik und ihrem Kalkül. Die von ihm beschriebenen Grenzen hängen sehr stark mit der

Sprache der Mathematik zusammen, deshalb möchte ich an dieser Stelle die Worten Wittgensteins in den Raum stellen:

> „Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt." (Wittgenstein, 1922)

Und in der Tat hat vor allem Gödel dazu beigetragen, die Grenzen der Welt der Mathematik offenzulegen. Ich möchte die Aussagekraft seiner Entdeckung noch einmal beschreiben: Die (moderne) Mathematik ist angewiesen auf einen Formalismus, eine Sprache. Es ist aber nicht möglich, eine Sprache zu konstruieren die *vollständig* ist. Immer wird es möglich sein, unentscheidbare Formeln zusammenzusetzen.

Die semantischen Eigenschaften sind also jene, die Unklarheiten offenlassen, die Syntax hingegen lässt sich so konstruieren, dass sie zumindest widerspruchsfrei bleibt.

Es ist an dieser Stelle noch darauf hinzuweisen, dass die in der Mathematik erfolgreich verwendete zweiwertige Logik nur eine spezielle Modellierung der Logik darstellt, es sind auch andere Modellierungen möglich, wie zum Beispiel die Fuzzy-Logik. (vgl Hischer, 2016, S. 358)

Wenn man in Betracht zieht, dass die Syntax der Mathematik diese außergewöhnliche Leistung erbringt, und, dass dies zu großen Teilen ein Verdienst der Logik ist, dann ist es essentiell, sich mit dieser auch zu beschäftigen, wenn man den sprachlichen Aspekt der Mathematik vermitteln soll.

Ist nun die Logik Teil der Mathematik oder umgekehrt? Wer dominiert die andere? Ich würde abschließend sagen, dass weder die Logik die Mathematik umschließt, noch *vice versa*. Erstens beschäftigt sich die Logik auch mit anderen Fragestellungen, etwa mit sprachlichen Fragestellungen, zum Beispiel der Argumentationstheorie und auch mit philosophisch-erkenntnistheoretischen Fragen. Zweitens schuf sich die Mathematik auch bereits eigene Fragestellungen und Methoden, die keinesfalls mehr in den Aufgabenbereich der Logik fallen. So ist das

Festlegen von Axiomen für eine Theorie keine rein logische Entscheidung, vielmehr eine philosophische oder praktisch-orientierte.

Auf jeden Fall verhält es sich aber so, dass die beiden untrennbar miteinander verbunden sind und auch immer sein werden. Sie werden sich immerfort aneinander reiben und anschmiegen. Das wird sich vermutlich auch nicht ändern, solange es Menschen gibt, die ihr Leben einer der beiden Wissenschaften verschreiben.

Vor allem aber ist es bereits für ein oberflächliches mathematisches Grundwissen notwendig, ein logisches Basiswissen zu entwickeln.

4.2 LEARNING BY DOING UND DIE METAEBENE

> *Sprachlicher Aspekt:* Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen. Das mathematische Prinzip, dass Behauptungen begründet werden müssen, soll Vorbild für andere Fächer und gesellschaftliche Bereiche sein. Das Verwenden von mathematischen Symbolen bildet dabei eine Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten.

(RIS, 2016b)

Der sprachliche Aspekt wird sowohl in den alten wie auch den neuen Lehrplänen sehr stark betont. Die Mathematik ist eine besondere Sprache. Sie hebt sich vor allem durch den Aspekt der „eindeutigen Interpretierbarkeit" von den restlichen auf der Welt gesprochenen und geschriebenen Sprachen ab. Der mathematische Denkstil, der aus der besonderen Art dieser Sprache hervorgeht, ist vor allem durch klare Begrifflichkeit und zweiwertige Logik geprägt. (vgl Hischer, 2016, S. 357 f)

Die Sprache entsteht aus den Möglichkeiten für Formeln (in Analogie zu Aussagesätzen), welche sich aus den Festlegungen für die Syntax ergeben, wobei das Alphabet die Menge der verwendeten Symbole darstellt. Das heißt der sprachliche Aspekt nimmt ganz konkret Bezug auf die Syntax und diese wiederum beinhaltet immer zumindest die Aussagenlogik als kleinsten gemeinsamen Teiler aller Schlussapparate.

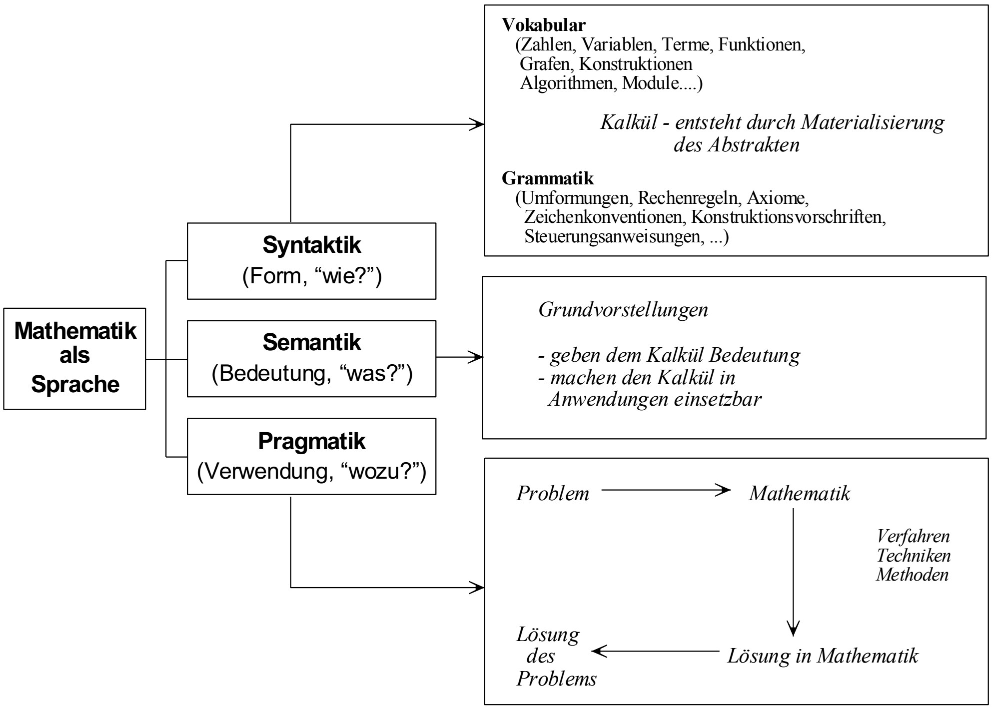
Im Zuge meiner Recherche für diese Arbeit habe ich, wie bereits ausgeführt, einige Experten der Fachdidaktik Mathematik mit Fragen zur Rolle der Logik im Mathematik

Unterricht konfrontiert.[11] Ich möchte an dieser Stelle noch einmal an eine Antwort von Dr. Josef Lechner anknüpfen:

> **4.Frage: Gibt es konkrete Beispiele, Kapitel oder Themen, bei denen Logik im Unterricht thematisiert werden sollte?**
>
> „[...] Im Besonderen geht es im Zusammenhang mit der Logik um das Reflektieren über das Thema „Sprache der Mathematik":
>
> Im Zusammenhang mit Mathematik als Sprache können ja syntaktische, semantische und pragmatische Aspekte unterschieden werden: Die syntaktischen Aspekte der Mathematik werden oft auch kurz unter „Kalkül" zusammengefasst. Dieser besteht (grob) aus:
>
> *- gewissen Grundzeichen und Grundbegriffen („Vokabular"),*
> *- als wahr anerkannten Sachverhalten (Axiomen),*
> *- einer Sammlung von Schluss-, Umformungs- und Ableitungsregeln, die angewendet werden, um alles Weitere (Theoreme, Sätze) herzuleiten (um das „Gebäude der Mathematik" zu errichten).*

(Zitat Fortsetzung, nächste Seite)

[11] Die Originalskripte der Fragebögen befinden sich im Anhang.



[...]“ (Dr. Lechner, 2016, Anhang)

Die Logik ist, wie ich Dr. Lechner zustimme, das Herzstück der mathematischen Grammatik. Man kann im Unterricht nicht auf sie verzichten. Lernt man beispielsweise Spanisch, so werden einem auch zu einem frühen Zeitpunkt die Konjugationsregeln der drei Hauptgruppen von Verben: *-ir, -ar, -er*, beigebracht. Natürlich könnte man auch jedes Verb einzeln konjugieren lernen und die meisten Schülerinnen und Schüler würden die Muster selbst erkennen. Sie würden früher oder später bemerken: „Aha, alle die mit –ar aufhören funktionieren gleich!“. Dies würde ich als den „learning by doing“- Ansatz bezeichnen. Um einen solchen Ansatz zu vertreten, muss man davon ausgehen, dass man mathematisches Wissen nebenbei erwirbt, indem man an Beispielen arbeitet. Aber was ist mathematisches Wissen? Als ein Beispiel für mathematisches Wissen nennen Vollrath und Roth in ihrem Buch die Logik in Fragen der Korrektheit (vgl Vollrath & Roth, 2012). Mathematisches Wissen sind unter anderem bestimmte Begriffe, denen eine Exaktheit innewohnt, die sie unmissverständlich macht. Die Korrektheit, von der Vollrath und Roth hier sprechen, ist durch die Theorie der Logik zu einem derartigen

Begriff geworden. Dieses Wissen ist kein Metawissen. Die beiden bezweifeln, ob man es sich durch Mathematik-Treiben, im Sinne von *„konkrete Beispiele rechnen“*, aneignen kann:

> „Die Erfahrung zeigt, dass beim Treiben von Mathematik „beiläufig“ ein gewisses metamathematisches Wissen und mathematische Fähigkeiten erworben werden. Schaut man genauer hin, dann machen einen die Befunde jedoch skeptisch hinsichtlich der Qualität des so erworbenen Metawissens, denn selbst die von Mathematikern nebenher erworbenen logischen Fähigkeiten werden zuweilen von Logikern skeptisch gesehen.“(Vollrath & Roth, 2012)

Allerdings räumen Vollrath und Roth gleich im Anschluss ein, dass auch rein systematisches Lernen Probleme mit sich bringt. Schlussendlich scheint es am effektivsten, am Mathematik-Treiben beiläufig Metawissen herbeizuführen und danach gezielt das gerade eben Erworbene anzusprechen. Die Autoren denken, dies am einfachsten zu erreichen, indem nach dem Erreichen eines Ziels eine Wie-Frage gestellt wird. Wie sind wir zu dem Ziel gekommen? Durch dieses reflexive Moment wird das Wissen explizit und steigt dadurch in seiner Qualität. Die Antwort ist Reflexion. Die Ansicht erinnert auch an Wedekinds These und an die Überlegungen von Freudenthal, zu denen wir später noch kommen werden.

Also: wäre es nicht ratsam, bestimmte Begriffe wie „korrekt“, „Beweis“, „Definition“ auch einmal abstrakt im Unterricht zu besprechen? Auf einer Metaebene? Auf einer *Reflexions*ebene?

Vollrath und Roth bereiten im nächsten Kapitel ihres Buches konkrete Beispiele für solche Reflexionsmomente auf. Es trägt den Titel „Logisch Denken lernen“ und ist nebenbei bemerkt sehr empfehlenswert. Ausgehend von einer beliebigen Definition im Unterricht – in ihrem Beispiel die Definition einer Raute – kann die Lehrperson die Gelegenheit ergreifen und über Definition auf einer Metaebene sprechen. Hierbei möchte ich einen kurzen Erfahrungsbericht einstreuen. Beginnt man schon in der Unterstufe, gezielt mathematische Begriffe zu verwenden, so fordern die Schülerinnen und Schüler meist von selbst Erklärungen derselben.

Gerade über den Definitionsbegriff habe ich dieses Jahr mit meiner zweiten Klasse Unterstufe eine ganze Stunde gesprochen, nachdem ich *„Definition: Primzahl“* an die Tafel geschrieben hatte. Eine Schülerin zeigte auf und fragte, was denn eine *Definition* sei. Ich blickte in die Runde und stellte fest, dass ausnahmsweise alle Augen wissbegierig auf mich gerichtet waren. Spontan versuchte ich eine Definition für den Begriff Definition zu geben und war selbst nicht zufrieden mit dieser. Gemeinsam mit der Klasse, die mir dann Beispiele brachte wie: „Ein Apfel ist eine rote runde Frucht“ konkretisierte ich den Definitionsbegriff. Eine rote runde Frucht könne ja auch eine Kirsche sein. Eine Definition müsse aber eindeutig und unmissverständlich sein. Dies ging eine ganze Weile hin und her. Die Schülerinnen und Schüler hatten merklich Freude an dieser Stunde und zeigten reges Interesse. Ich selbst hatte ebenfalls ziemlich Spaß, obwohl ich eigentlich etwas ganz Anderes vorbereitet hatte. In Zukunft und vor allem nach der Lektüre von Vollrath und Roth werde ich solche Situationen etwas bewusster und vorbereiteter provozieren. Vor allem aber habe ich selbst die Konsequenz daraus gezogen, dass es nicht sinnvoll ist, die Unterstufe mit mathematischen Fachtermini zu verschonen, denn eigentlich sind sie manchmal sogar ziemlich begeistert von diesen. Meiner Kritik der Schulbücher möchte ich hier einen weiteren Negativpunkt hinzufügen: Durch das Vermeiden der Worte „Beweise“ und „Definition“ fehlt die Möglichkeit, einen reflexiven Moment à la Vollrath und Roth in den Unterricht zu bringen. Die Philosophie der Lehrbuchautoren, was das Vermeiden von mathematischen Vokabeln betrifft, habe ich aber schon weiter oben zur Genüge aufs Korn genommen, also zurück zu Vollrath und Roth:

> „Definitionen bestehen in der Mathematik aus dem zu Definierenden (Definiendum) und dem Definierenden (Definiens), die deutlich voneinander getrennt werden. Das Definiens ist eine charakterisierende Eigenschaft, die nur bekannte Begriffe enthalten darf.“(Vollrath & Roth, 2012, S. 72)

Auch dem Begriff des Beweisens inklusive einer Erläuterung des Wortes Schließen, sowie Schlussregel, sollte laut Vollrath und Roth eine Reflexionseinheit gewidmet sein.

Hoffmann gibt in seinem Buch folgende Definition eines Beweises:

Definition Beweis

> „Ein formaler Beweis ist eine Kette von Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ die nach folgenden Konstruktionsregeln gebildet wird:
>
> - φ_i ist ein Axiom oder
> - φ_i entsteht aus den vorangegangenen Kettengliedern der Beweiskette durch die Anwendung einer Schlussregel.
>
> Die letzte Formel dieser Kette ist das bewiesene Theorem." (Hoffmann, 2013, S. 74)

Diese Definition stammt allerdings aus einem Buch für Studenten und ist wohl nicht für den Schulunterricht geeignet, da sie zu technisch und wenig intuitiv formuliert ist.

Vollrath und Roth führen auch eine Liste der wichtigsten Begriffe an, die im Unterricht besprochen werden sollten. Darunter fallen die schon oft erwähnten Junktoren und Quantoren, sowie Variable, der Unterschied zwischen Name und Objekt und Verknüpfungen. Das Bivalenzprinzip ist laut ihnen ein entscheidender Begriff für die Mathematik, den es folglich im Mathematikunterricht zu erläutern gilt. Außerdem äußern sich die beiden Autoren skeptisch zur Einführung von symbolhafter Notation. Sie meinen, dass diese kurze Notation erfahrungsgemäß eher eine zusätzliche Fehlerquelle ist. Ich bin hingegen der Meinung, dass es am besten wäre, einfache Übersetzungsbeispiele ausführlich zu üben. In meinem Logikkurs an der Universität hatten sehr viele der Philosophiestudenten zunächst schwere Probleme, Logik zu begreifen. In der dritten Einheit, in der wir nur symbolhafte Sätze in Alltagsbedeutungen übersetzten und umgekehrt, konnte man förmlich spüren, wie sich die Verknotungen in den Hirnen meiner Kollegen und Kolleginnen lösten. Ein Aha-Moment folgte dem nächsten. Vielleicht wird dieser Schritt im Verstehen oft von Mathematiklehrern und Mathematiklehrerinnen unterschätzt, weil er schwer nachzuvollziehen ist. Die Aufgaben wirken banal und langweilig und es ist kaum vorstellbar, dass solche Übungen *wichtig* sind. Ich bin überzeugt, dass sie es sind. Ich denke, kein Spanischlehrer und keine

Spanischlehrerin würden hier widersprechen: Wenn man jemandem eine Sprache erklären will, dann gehören dazu eben ein paar Regeln.

Die Mathematik berücksichtigt die Regeln der Aussagenlogik, und wenn man Mathematik verstanden hat, ist es schwer sich vorzustellen, Aussagenlogik früher nicht verstanden zu haben. Die Konventionen wirken so banal und so klein im Vergleich zur ganzen Mathematik. Und die Möglichkeiten in der Aussagenlogik wirken so begrenzt und abgeschlossen. Das führt dazu, dass der pädagogische Wert ebendieser stark unterschätzt wird. In ihrer einfachsten Form kann die Aussagenlogik in einer Stunde zumindest in ihren Grundzügen und in einer 2 bis 3- stündigen Unterrichtssequenz sogar sehr eingehend behandelt werden. Der pädagogische Wert ergibt sich allerdings nicht daraus, dass man danach etwas zum Abprüfen oder Evaluieren hat. In den bekannten vergleichenden Evaluationen gibt es noch keine standardisierten Testfragen zu diesem Kapitel. Es wäre sehr interessant, solche zu entwickeln. Dafür kann das Thema sehr gut zur Abgrenzung von Mathematik und Alltagssprache aufbereitet werden. Die häufig von Schülern und Schülerinnen aufgeworfenen Fragen: „Was soll das Ganze?“, „Wozu brauch ich das überhaupt?“ können hier anders beantwortet werden als mit: „Weil du es bei der Matura wissen musst.“

Zurück zur Einheit über Logik: Eine solche Einheit hätte den Vorteil, dass sie den Schülerinnen und Schülern einen Einblick in die Gedankengänge und Konstrukte gibt, aus denen sich die Mathematik langsam entwickelt hat. Und dieses kleine Gebäude der Aussagenlogik ist ein leicht zu durchschauendes Modell der großen Mathematik. In dem Modell kann man sich schwer verlaufen, wenn man den Bauplan einmal kennt, aber die Mathematik hat viele Winkel und Räume, ja es ist oft nicht einmal so einfach zu verstehen, in welchem Maßstab der gerade vorliegende Plan zu lesen ist.

Ich stimme Wedekind zu, wenn er in seinem Artikel betont, dass die Logik auch außerhalb der Schule unglaublich relevant ist. Die Frage ist nur, wie viel davon ist Allgemeinbildung? Wie viel muss jeder wissen?

> „Nicht zuletzt das Auftauchen immer neuer Nicht-Standard-Logiken (nichtmonoton, parakonsistent, fuzzy, mehrsortig, temporal, substruktural …) ist dafür ein deutliches Indiz. Wie geht man damit um? Gar nicht? Oder ist das nur Sache von Spezialisten und somit kein Thema einer Grundbildung?“ (Wedekind u. a., 2005)

Wedekind meint, dass Logik zumindest auf einer Metaebene thematisiert werden muss. Es ist dieser Ordnungsgedanke, der Struktur in ein Chaos bringt. Die Logik ist einer der erfolgreichsten Ordnungsgedanken, den die Menschen schon seit sehr langer Zeit weiterentwickeln. Sie als solchen zu thematisieren bringt ein „reflexives Moment“ in den Unterricht. Wichtig dabei ist, dass sich dabei die skeptische Frage „Wozu braucht man das überhaupt?“ von selbst erledigt.

4.3 MATHEMATICS AS AN EDUCATIONAL TASK

Ein weiterer Autor, der sich intensiv mit dem Thema Logik im Unterricht beschäftigt hat, ist Hans Freudenthal. In seinem Buch „Mathematics as an educational task“ widmet er der Rolle der Logik im Mathematikunterricht ein umfangreiches Kapitel. Die Logik entstand als Analyse von Denkprozessen. Ihre wichtigsten Resultate schematisieren und formalisieren die Denkprozesse hinter gültigen Argumenten. Sind die Argumente in einer anderen Sprache formuliert, so sind dies doch trotzdem sichtbar gemachte Denkprozesse. (Freudenthal, 1973, S. 610 ff)

Wenn die Ergebnisse der Logik als Analyse der Denkprozesse im Unterricht angewandt werden sollen, muss man sich zunächst die Frage stellen, ob das Analysieren der Logik als idealisierte Gedankengänge auch dabei hilft, die wirklichen Gedankenprozesse zu stimulieren und zu verbessern. (vgl Freudenthal, 1973, S. 617) Sind die Denkmuster, die die Ergebnisse der formalen Logik sind, hinreichend und wenn, sind sie dann auch nützlich?

Freudenthal argumentiert, dass die Schlussmuster, die sich in der formalen Logik abstrakt formulieren lassen, insofern hinreichend sind, als dass sich ein mathematischer Beweis auf Gültigkeit überprüfen lässt, indem man überprüft ob er in diese Muster passt. Sie sind auch hinreichend, um abzuklären, ob eine Definition korrekt konstruiert ist. Aber sie versagen bei Gebieten, die auf keine eindeutige Lösung abzielen. Sie sind nicht hilfreich dabei, ein bestimmtes Problem zu lösen oder zu entscheiden, welche von zwei Definitionen besser konstruiert ist.

Mathematische Logik strebt hauptsächlich nach der Formalisierung. Natürlich sind die einfachsten logischen Schlussschemata viel zu banal, um den komplexen menschlichen Gedankenprozess wiederzugeben. Für die Mathematik leisten sie aber einiges, lassen sich doch wegen der Erkenntnisse aus der Logik auch gute Tipps für das Vorgehen beim Beweisen formulieren: "To prove something start assuming it is wrong", oder "put the unknown quantity x". Solche Tipps können als Einstieg in das Feld der Aussagenlogik oder elementaren Algebra verwendet werden. (Freudenthal, 1973, S. 619).

Die atomaren Muster, die einzelnen Schlussmuster, alleine für sich stehend zu unterrichten ist nutzlos. Man muss sie anhand von mathematischen Beispielen auch im Unterricht testen. Freudenthal gibt in diesem Kapitel eine Reihe solcher Beweise für den Unterricht an. Er zeigt auch, dass mathematischer Unterricht bzw. Mathematik betreiben an sich, ohne logische Schlussmuster im Hintergrund zu haben, nicht möglich ist.

"Every teacher will now and then teach some logic." (Freudenthal, 1973, S. 623)

Eine zweite Aufgabe, neben dem Formalisieren, die die Logik erfüllt, ist didaktisch gesehen noch wertvoller: Das Schematisieren. Damit meint Freudenthal das Erzeugen von Mustern.

Der beste Weg, der zu logischen Konzepten führt, ist die logische Erforschung eines Beispiels, also die Analyse einer Denksituation. Alltagsbeispiele sind dafür zu einfach und banal, es sollten komplexere mathematische Probleme sein. Am Beispiel der Streckensymmetrale und ihrer Eigenschaften schlägt Freundenthal eine Erforschung des Begriffs der notwendigen und hinreichenden Bedingung vor und das Konzept der Transitivität. Beides sind Konzepte aus der Logik, die im Unterricht, früher oder später, auch explizit formuliert werden sollten. Es müssen aber nicht immer rein mathematische Beispiele sein. So präsentiert er auch ein Rätsel und betont den didaktischen Wert solcher Aufgaben, wenn man über Logik reflektieren will. Es gilt, die Schülerantworten zu analysieren und ihnen dann vor Augen zu führen, anhand welcher logischer Schlussmuster sie richtigerweise vorgegangen sind. Dabei können logische Begriffe eingeführt oder geschärft werden (Freudenthal, 1973, S. 623). Vor allem die Lehrperson muss daher sehr bewandert im Umgang mit diesen Schlussmustern sein.

Etwas, das Freudenthal sehr genau unter die Lupe nimmt, ist der indirekte Beweis, den er selbst als *das erste heuristische Werkzeug* bezeichnet. Wichtig für den Autor ist eine Behandlung der Beweistheorie im Unterricht. Vor allem der indirekte Beweis und das ihm zugrunde liegende Schema der Kontraposition sollten ein Thema sein.

> "It is strange that often when textbooks deal with indirect proof, they forget to mention the pattern of contraposition." (Freudenthal, 1973, S. 626)

Freudenthal nennt viele Beispiele für künstlich konstruierte indirekte Beweise, die erstens keine wahrhaft indirekten Beweise sind, und zweitens gegen die Intuition gehen. Solche Beispiele, die er vor allem in der elementaren Geometrie entdeckt, sollten aus den Schulbüchern entfernt werden, und echte indirekte Beweise an ihre Stelle treten. Ich möchte hier die Irrationalität von $\sqrt{2}$ als eines seiner Beispiele erwähnen:

Um die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zu zeigen, wird angenommen,

dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ist mit $p, q \in \mathbb{N}$

Der Beweis läuft über das Prinzip der Kontraposition:

Wenn $p \to q,$ dann $\neg q \to \neg p$

Dieses Prinzip ist zwar die Grundlage des indirekten Beweises, aber nur, weil ein Beweis über einen solchen Schritt läuft, ist er nicht zwangsläufig indirekt. Sein Argument ist, dass ja nicht $\neg p$ angenommen wird, sondern, dass das Zeigen von $\neg q$ einfach zu dieser Konsequenz führt. Das entscheidende Merkmal eines indirekten Beweises ist aber die Annahme der Negation des Antezedens. Eine solche Annahme wird häufig unnötigerweise künstlich in die Aufgabenstellung eingebracht. (vgl Freudenthal, 1973, S. 626)

Die Tatsache, dass der indirekte Beweis in vielen Schulbüchern anhand von künstlich konstruierten Fällen eingeführt wird, sieht Freudenthal problematisch. Vor allem weil er ihn als im Grunde sehr intuitiven Ansatz sieht:

> "The indirect proof is a very common activity (‚Peter is at home since otherwise the door would not be locked'). A child who is left to himself with a problem, starts to reason spontaneously ‚... if it were not so, it would happen that...'." (Freudenthal, 1973, S. 629)

Freudenthal ist der Meinung, dass man als Lehrer oder Lehrerin nicht versuchen sollte, eine allgemeine Definition eines indirekten Beweises zu geben oder ein künstlich konstruiertes Beispiel anzugeben. Stattdessen sollte man einen Schüler oder eine Schülerin beim indirekten Argumentieren "erwischen" und danach klarmachen, was er bzw. sie gerade getan hat. Anhand einer solchen Situation kann der indirekte Beweis am erfolgreichsten eingeführt werden. (Freudenthal, 1973, S. 629).

Ein wichtiger Punkt ist, dass es keinen Sinn macht, einen logischen Formalismus zu unterrichten, ohne ihn an ein Subjekt der Anwendung zu binden. Aber Logik kann sehr nützlich im Unterricht sein, wenn sie nicht zum Selbstzweck wird. (Freudenthal, 1973, S. 630) Auch Dr. Heugl und Dr. Lechner vertreten diese Ansicht:

> „Eine Gefahr sind solche Elemente der Mathematik immer dann, wenn sie zum Selbstzweck werden, wichtig sind sie dann, wenn die Lernenden den Nutzen für das logische Schließen erkennen können, wenn die Aussagenlogik auch genutzt wird." (Dr. Heugl, Anhang)

Freudenthal drückt seine Bewunderung für Lehrpersonen aus, die wissen, welches logische Schlussmuster ihre Schülerin bzw. ihr Schüler im Kopf hat, wenn er oder sie argumentiert. Diese Fähigkeit der Lehrperson ist für ihn wichtiger, als das Lernen der Schlussmuster der Schüler im rein Abstrakten. Logik spielt im Mathematikunterricht für ihn also eine wichtige Rolle. Vor allem die Lehrperson benötigt ein umfangreiches Wissen über Logik und muss geübt im Umgang mit Logik sein. Als Unterrichtsinhalt ist sie auch wichtig, aber sie sollte nie aus dem Nichts kommen und muss sinnvoll und immer wieder, auch spontan anhand von Schülerargumenten, offenbar gemacht werden.

Freudenthal betont, wie wichtig der exakte Ausdruck im Mathematikunterricht ist. So beschreibt er anhand eines Beispiels, wie wichtig es ist, logische Begriffe bei jeder Gelegenheit zu schärfen, um den Schülerinnen und Schülern die Relevanz des exakten Ausdrucks in der Mathematik klarzumachen. Dies muss bei jeder Gelegenheit getan werden. Es ist ein essentielles Hauptmerkmal der Mathematik, dass es ihr um Exaktheit geht. (vgl Freudenthal, 1973, S. 633)

Das Beispiel, das er hier nennt, bezieht sich auf das logische (also auch das mathematische) „und“ und „oder“.

Wenn eine Funktion wie $x^2 - 3x + 2 = 0$ gelöst werden soll, tendieren Schüler und Schülerinnen dazu zu antworten: „$x = 1$ und $x = 2$.“ Daraufhin antwortet der verbessernde Lehrer oder die Lehrerin: „$x = 1$ ***und*** $x = 2$ ist nicht vereinbar.“ Ein bereits geübter Schüler bzw. Schülerin wird daraufhin selbstkorrigierend antworten: „$x = 1$ ***oder*** $x = 2$.“ Die Lehrperson besteht nun darauf: „Wenn du ‚oder’ meinst, dann musst du es auch hinschreiben.“

Dieses Beispiel führt uns auch zur Frage, ob es nun sinnvoll ist, logische Symbole im Mathematikunterricht einzuführen oder nicht. Freudenthales Argumentation dazu lautet wie folgt:

> "I would ask the teacher - why would you have him write "or" since for many decades we have got the symbol $\vee$? You do not require him to write down "square root of bracket open a plus b bracket closed square", do you?"
>
> "A discussion as the one above on "and" and "or", however, can be made easier, or even possible, by the use of logical symbols." (Freudenthal, 1973, S. 636)

Die Symbole spielen also für Freudenthal eine entscheidende Rolle im Mathematikunterricht. Sie ermöglichen Diskussionen, geben Anhaltspunkte und ich denke auch, sie dienen gerade bei Freudenthales Ansatz als roter Faden. In Anbetracht seiner Argumente sollte Logik nicht nur punktuell in einem Kapitel behandelt werden, sondern als eingebetteter Hintergrund in allen Gebieten von Zeit zu Zeit im Unterricht sichtbar gemacht werden. Dieses Sichtbarmachen gelingt wohl am besten, wenn man bei günstigen Gelegenheiten die wichtigsten logischen Symbole und Konzepte einführt. Freudenthales Kapitel ist wirklich eine bereichernde Lektüre, wenn es einem darum geht, Logik im Unterricht explizit zu machen. Bei zahlreichen anderen Beispielen aus Analysis, Algebra und Zahlentheorie gelingt es Freudenthal, die logischen Schemata aus Beweisen heraus zu extrahieren. Die von Freudenthal betonte Relevanz der Symbole führt uns direkt zu den nächsten Autoren und zu einem Modell der Entstehung von Wissen im Unterricht.

4.5 BEGRIFFSBILDUNG

Die Entstehung von Wissen im Unterricht erfolgt laut einer empirischen Studie von Seeger, Bromme und Steinbringer über Begriffsbildung. Bei dieser werden Zusammenhänge zwischen Objekt, Symbol und Begriff geknüpft. Dieser Prozess lässt sich durch das epistemologische Dreieck darstellen. (vgl Hischer, 2016, S. 169)

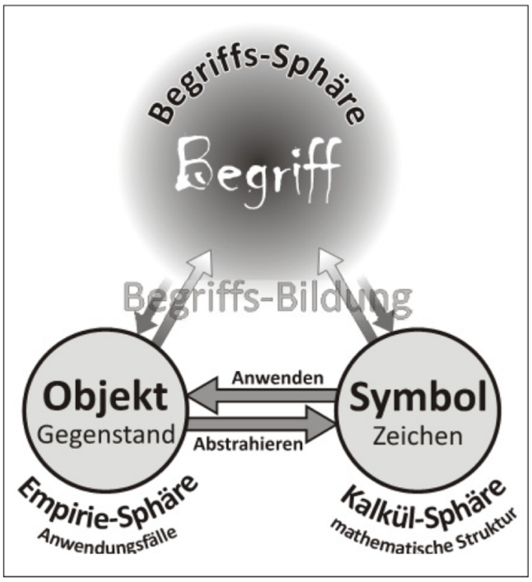


Abbildung 1: Hischer, 2016, S.169

Die Begriffsbildung verläuft über das Begreifen von Anwendungsfällen als Beispiele für den Begriff. Die fortschreitende symbolische Abstraktion ist ein wichtiger Teil der Begriffsbildung, denn sie ist die Annäherung an die Kalkülsphäre. Diese ist eine: „Beschreibung einer gemeinsamen mathematischen Struktur dieser Objekte und damit einem (oder „dem"?) mathematischen Begriffsinhalt. Die bei diesem Abstraktionsprozess mögliche Verwendung von Symbolen als bedeutungstragenden Zeichen dient der Kommunikation zwischen den Beteiligten und bedarf eines

Regelsystems, das auf einem (zu entwickelnden) Kalkül unter Einschluss der mathematischen Logik beruht.“ (Hischer, 2016, S. 170)

Nun ist es für eine gelungene Begriffsbildung wesentlich, dass ein Wechsel zwischen Empirie-Sphäre und Kalkül-Sphäre stattfindet. Sowohl die Vernachlässigung der einen, wie auch die der anderen, ist problematisch. Eine Versteifung auf die Kalkül-Sphäre, wie sie laut dem Autor häufig im Mathematikunterricht stattfindet (als Beispiel nennt er hier das „Lernen“ von Ableitungsregeln), verhindert die Entwicklung eines Verständnisses für den zugrunde liegenden Begriff. Umgekehrt ist auch der Verzicht auf die Kalkül-Sphäre problematisch. Als Beispiel führt er hier den exzessiven Einsatz von CAS-Systemen im Mathematikunterricht an. (vgl Hischer, 2016, S. 170)

> „Damit entsteht aber folgendes Problem: Wenn das Nutzen oder Verwenden eines Computeralgebrasystems nicht mehr ein Kalkulieren im bisherigen Sinn des händischen Umgehens mit Zeichen und Symbolen ist, was ist es denn dann? Kann es vielleicht sein, dass das Computeralgebrasystem auf diese Weise zum Objekt wird, das Umgehen mit Computeralgebrasystemen also ein Handeln in der Empirie-Sphäre darstellt?
>
> Wenn das tatsächlich so sein sollte, so müssten wir uns jedoch ernsthaft Sorgen um die ontogenetische Begriffsbildung machen, falls Computeralgebrasysteme in großem Maße medienmethodisch im Mathematikunterricht eingesetzt werden, indem sie einfach an die Stelle des bisherigen händischen Kalkulierens treten. Genau dies muss offenbar vermieden werden!
>
> So steht wohl in der Tat der Mathematikunterricht vor neuen Herausforderungen, weil zu klären ist, welche Handlungen in der Kalkülsphäre ihren Platz finden sollen.“ (Hischer, 2016, S. 170)

Aus dieser Theorie zur Entstehung von Wissen im Mathematikunterricht ergibt sich für meine Arbeit folgendes: Wenn Logik im Mathematikunterricht vermittelt werden soll, so muss dies auch logische Symbole und die allgemeinen Schlussregeln umfassen. Wenn Logik und ihre zentralen Begriffe vermittelt werden sollen, so muss der Unterricht auch (zumindest teilweise) die Syntax einschließen. Natürlich müsste es auch Anwendungsbeispiele zur Logik geben.

Angenommen Logik soll im Unterricht vermittelt werden, dann stellt sich die Frage, welche Symbole aus der Syntax wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts sein sollten.

In seinem Buch *„das ist o.B.d.A. trivial“* für den Studieneinstieg weist auch Albrecht Beutelspacher auf die Relevanz der Symbole für die Mathematik als Sprache hin. Die Mathematik sei, in einer sehr naiven Auffassung, nichts weiter als die Manipulation von Symbolen. Er schreibt weiter:

> „Es ist in der Tat so, dass die Sprache der Mathematik durch die Verwendung von Symbolen geprägt ist; diese sind aber kein Selbstzweck, sondern sie dienen sowohl dazu, die Objekte, die die Mathematiker wirklich interessieren, als auch die Beziehungen zwischen diesen Objekten mit Standardsymbolen kontrollierbar zu bezeichnen."

Dann nennt Beutelspacher auch die für ihn wichtigsten Symbole, auf die sich die Mathematik-Community geeinigt habe. Für ihn ist ein Verständnis dieser Symbole notwendig, um Mathematik als Sprache zu verstehen. Die Symbole, die er hier auflistet, sind:

$$\{\ \ |\ \ \}, (,,,), \in, \notin, \cap, \cup, \times, A \setminus B, \emptyset, \subseteq, \supseteq, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$$

Beutelspacher gibt leider keine Informationen an, wie er zu dieser Liste gelangt. Er bemerkt nur, dass diese Symbole notwendigerweise in den ersten Semestern des Mathematikstudiums verstanden werden müssen. (vgl Beutelspacher, 2009, S. 29). Für mich fehlt ein roter Faden in dieser Liste, obwohl die meisten aus der Mengenlehre kommen. Es ist sicher eine Möglichkeit, Logik im Unterricht über die Mengenlehre zu vermitteln, sowie dies bis zur letzten Lehrplanänderung auch vorgesehen war.

4.6 ZWEI ALTERNATIVE ANSÄTZE ZUR INTEGRATION VON LOGIK IN DEN UNTERRICHT

Wedekind schlägt in seinem Artikel einen alternativen Zugang zur Logik vor. Er stellt ein Spiel in Dialogform vor. Die beiden Spieler müssen gegeneinander argumentieren und dazu aussagen- bzw. prädikatenlogische Argumente anführen. Er meint, sein Zugang wäre wesentlich natürlicher und intuitiver als herkömmliche Ansätze. Ich sehe diesen Zugang sehr skeptisch, denn er scheint überaus komplex. Die meisten meiner Oberstufenschüler würden die Regeln vermutlich nicht verstehen. Außerdem ist in einer Klasse mit annähernd 30 Schülerinnen und Schülern ein Spiel, bei dem immer nur zwei beschäftigt sind, keine ideale Situation. Ich sehe seine Idee eher als gute Ergänzung für eine Supplierstunde oder ähnliches. Vielleicht passt sie auch gut in den Deutschunterricht – oder als fächerübergreifende Stundenplanung: In der Mathematik-Stunde wird die Aussagenlogik mitsamt Notation erklärt, in der Deutsch-Stunde wird dann gegeneinander argumentiert. Für den Regelunterricht halte ich seinen Vorschlag jedenfalls nicht geeignet, um Aussagenlogik im Mathematikunterricht einzuführen und zu behandeln. Höchstens, wie gesagt als Ergänzung, aber es ist ja kaum für die Einführung genügend Zeit vorhanden.

Für Arnold, einen weiteren Autor, der sich mit Logik im Unterricht befasst hat, ist die Aussagenlogik sogar noch viel wichtiger. Er sieht sie zunächst als essentielles Teilgebiet der Mathematik und Informatik, das verstanden werden muss, um das ganze Fach zu verstehen. Er schreibt weiter:

> „Obwohl Logik heute in vielen Lebensbereichen immer wichtiger wird – man denke etwa nur an die kompetente Nutzung von Internet-Suchdiensten –, ist Logik als eigenständiges Thema praktisch aus den Schulen verschwunden. [...]
>
> Die Bedeutung der Logik für die Allgemeinbildung ist unbestritten. Ohne Logik können wir nicht rational argumentieren.“ (Arnold & Hartmann, 2007)

Der Lehrplan schreibt eine zwingende Behandlung der Aussagenlogik nicht mehr vor. Manche Schulbücher haben ihr trotzdem ein kurzes Kapitel gewidmet. Das haben wir zum Beispiel in „Mathematik Verstehen 5“ gesehen. Andere beschäftigen sich gar nicht damit, wie etwa „Lösungswege 5". Die älteren Bücher haben selbstverständlich alle ein eigenes Kapitel dafür.

Meine Beschäftigung mit Logik im Mathematikunterricht hat mich erkennen lassen, dass vor allem das Prinzip der Zweiwertigkeit wichtig für das Verständnis von mathematischen Aussagen ist.

Wedekind et al nennen in ihrem Text das Bivalenzprinzip als gutes Beispiel dafür, warum sich die Logik nicht gut verkauft. Denn das Bivalenzprinzip ist schnell formuliert und kann leicht auswendiggelernt und akzeptiert werden. Aber ein wirkliches Verständnis dafür, was es bedeutet und wie diese Idee entstand, erhält man nicht so einfach. Um wirkliches Verständnis der Materie zu erreichen, müsste man auch die historischen Nachschärfungen der Formulierungen und Ergänzungen thematisieren. Wedekind führt hier den Satz des ausgeschlossenen Dritten und den Satz des ausgeschlossenen Widerspruchs als Beispiele an. Es wundert ihn, dass in der Schule diese Dinge nicht besprochen werden (vgl Wedekind u. a., 2005).

Ich stimme ihnen insofern zu, als sie behaupten, dass es beinahe unmöglich ist, unter den gegenwärtigen Umständen genügend Zeit für dieses Thema zu akquirieren. Ich bin mir aber nicht sicher, ob er fordert, dass auf Kosten anderer Inhalte mehr Zeit für diese Dinge sein sollte. Ich jedenfalls halte gerade diese Konzepte aus der Logik für welche, durch deren Diskussion ganz grundlegende, ja möglicherweise sogar notwendige, Verknüpfungen gemacht werden, um die Mathematik zu *verstehen*.

Diese zwei Ansätze stehen nur stellvertretend für die Fülle an Literatur, die der Didaktik der Logik in den letzten Jahren gewidmet wurde. In dem Sammelband *Tools for teaching logic* sind über 30 wissenschaftliche Papers und Studien enthalten, die sich allesamt mit dem Thema auseinandersetzen, wie Logikkurse und Logik in verschiedenen Unterrichtsfächern - hauptsächlich Mathematik, Informatik und Philosophie, aber auch in Argumentationen im Sprachunterricht – zu vermitteln ist. Viele der Autoren dieser Papers betonen die enorme Wichtigkeit logischer Fähigkeiten in unserer modernen Gesellschaft:

> "In the Age of information and communication formal logic is one of the most important mathematical tools that these new generations will need." (Blackburn, Ditmarsch, Manzano, & Soler-Toscano, 2011, S. 153)

Sei es, um moderne Technik und Algorithmen zu verstehen, oder um der Fähigkeit des kritischen Denkens willen. Mathematiker betonen auch die Bedeutung der Logik, wenn es darum geht, *über* Mathematik zu sprechen (vgl Blackburn u. a., 2011).

So schreibt Susanna S. Epp in ihrem Paper *Variables in Mathematic Education* darüber, wie anhand von Beispielen aus der Aussagenlogik der Variablenbegriff eingeführt werden kann. Sie kritisiert die überstarke Betonung der Variable als unbekannte Entität im Mathematikunterricht:

> „This paper has advocated placing greater emphasis on the role of variables as placeholders to help address students' difficulties as they make the transition to algebra and more advanced mathematical subjects." (Blackburn u. a., 2011, S. 54)

Olivier Gasquet, Francois Schwarzentruber und Martin Strecker schreiben in ihrem Paper über die *natürliche Deduktion*:

> „[…] mathematics, up to high school, is mainly taught as a science of numbers and quantities (relations between integers in arithmetics, between reals or complex numbers in analysis, between matrices of numbers in linear algebra, but always numbers), and not as a science of structures, which is a crucial point of view in logic, […]" (Blackburn u. a., 2011, S. 85)

Die Autoren stimmen alle überein, wenn es um die Frage geht, *ob* Logik eine Rolle in der Bildung zu spielen hat. *Wie* sie vermittelt werden soll, dazu werden in diesem Buch sehr vielseitige Ansätze präsentiert. Die überwiegende Mehrheit verlangt jedoch auch eine mehr oder weniger detaillierte Erläuterung der Syntax.

4.7 DAS CURRICULUMPROBLEM

Über den Begriff des Curriculumproblems stolperte ich bei der Lektüre von Vollrath und Roths Buch „Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe“.

> „Die Auswahl der Inhalte ist ein grundlegendes didaktisches Problem, das auch als Curriculumproblem bezeichnet wird. Die Lösung des Problems erfordert das Finden von Kriterien für die Entscheidung, ob ein bestimmter Inhalt gewählt werden soll.“ (Vollrath & Roth, 2012, S. 33)

Im Grunde diskutieren sie die problematische Situation des Mathematikunterrichts in diesem Zusammenhang. Sie schreiben darüber, dass es bis vor einigen hundert Jahren gar keine Streitfrage gewesen wäre, welche Inhalte in einem Lehrplan zu listen wären: die wichtigsten Sätze aus Euklids und Aristoteles Werken, die Geometrie also als zentralstes Thema. In den letzten Jahrhunderten überschlugen sich allerdings die Ereignisse in der Mathematik (wie auch in anderen Bereichen der Wissenschaften). Über die auslösenden Ereignisse habe ich bereits einen kurzen Überblick gegeben, Vollrath und Roth thematisieren auch die rasche Entwicklung neuer Theorien und Gebiete innerhalb der Mathematik. In einem unglaublichen Tempo kommen immer neue Sätze hinzu. Nun aber sei es dadurch schwierig, die wichtigsten Gebiete im Unterricht unterzubringen, da ein solcher sehr begrenzte Möglichkeiten bietet und die Fülle an herausragenden Sätzen, die Algebra, analytische Geometrie, Analysis, Funktionentheorie, Differentialgeometrie, numerische Mathematik, Stochastik und viele mehr bieten, ist unmöglich in ihrer Gesamtheit bearbeitbar. Die Autoren nähern sich dem Problem, indem sie zunächst die zentralen Gebiete der Mathematik nennen. Die Autoren analysieren hierzu die fachdidaktischen Diskussionen der letzten Jahre und führen hernach folgende Gebiete an: Analysis, Algebra, Geometrie und Stochastik. Danach stellen sie Jerome Brunners Ansatz der fundamentalen Idee vor. Dieser geht davon aus, dass hinter jedem zentralen Begriff eine fundamentale Idee steckt. Viel mehr als den Begriff gilt es, die Idee dahinter zu vermitteln. Was also sind die fundamentalsten Ideen der Mathematik? Laut Vollrath und Roth tauchten in der didaktischen Diskussion folgende Begriffe oft auf: Zahl, Menge, Funktion, Approximation, Optimierung und vieles mehr. Der Begriff der fundamentalen Idee scheint den beiden Autoren zu vage, um an ihm den Lehrplan festzumachen, außerdem sei er ein sehr fachlicher Zugang, der keineswegs garantiere, dass diese Ideen auch den Lernenden zugänglich sein würden. Der Mathematikunterricht solle eine *notwendige* und auch *hinreichende* Bedingung für ein weiterführendes Studium sein - also auf **Studierfähigkeit** abzielen. Dazu soll er vor allem eine Einführung in die Grundlagen der Mathematik sein. Jedes Gebiet der Mathematik scheint über eigene Grundlagen zu verfügen, obwohl sich natürlich diese teilweise überschneiden. Die beiden Autoren verweisen auf Lehrbücher zu den Grundlagen der Zahlentheorie, Funktionenanalysis als Beispiele und merken an, dass zu praktisch jedem Teilgebiet ein solches Grundlagenwerk existiere. In diesen geht es stets darum, ein erstes Verständnis für die elementaren Begriffe, Beziehungen, Probleme und Methoden zu vermitteln. Dieser Aspekt ist im Mathematikunterricht von Interesse, denn er zielt darauf ab, angemessene Vorstellungen von Mathematik zu vermitteln. (vgl Vollrath & Roth, 2012, S. 36 ff)

Die Kriterien, die Vollrath und Roth für eine Lösung des Curriculumproblems schließlich festlegen, sind in folgendem Zitat zusammengeführt:

> „Während „das mathematisch Zentrale“ und die „fundamentalen Ideen“ in erster Linie das *Wünschenswerte* beschreiben, reduziert „das Elementare“ die Inhalte auf das *Machbare*. Zusammen kann sich dabei das *Sinnvolle* ergeben. Sie stellen also Kriterien für die Auswahl von Inhalten dar und dienen als Argumente für Entscheidungen.“ (Vollrath & Roth, 2012, S. 39)

Im Abschnitt „Beziehung zwischen Logik und Mathematik“ diskutierte ich die Bedeutung der Logik (bzw. der Mengenlehre) für die moderne Mathematik: Nämlich als Auslöser der Grundlagenkrise und als Fundament der Zusammenführung aller bis dato erbrachten mathematischen Resultate in **einer** Formalisierung. Als was sollte man die Vorstellungen und Ideen von Frege, Russel und Hilbert - allen voran jenes Vorhaben, ein einziges formales System zu erschaffen, in welchem sich alle mathematischen Theorien ohne Ausnahme widerspruchsfrei formulieren lassen - bezeichnen, wenn nicht als **fundamentale Idee**? Die Aussagenlogik ist der kleinste gemeinsame Nenner aller modernen formalen Systeme und damit das kleinste gemeinsame Element aller mathematischen Teilgebiete. Es handelt sich also in der Tat um etwas *Elementares*. Außerdem ist es durchaus machbar, war die Aussagenlogik doch bis vor einigen Jahren noch in den meisten gängigen Schulbüchern enthalten, sei es eigenständig oder im Kapitel der Mengenlehre. Nach Vollrath und Roth erfüllt sie somit die Kriterien, auch *sinnvollerweise* im Curriculum zu stehen.

5. RESÜMEE

Ich möchte mein Resümee mit einem Zitat einleiten, das meine ursprüngliche Kritik am Verschwinden einer expliziten Nennung der Logik aus dem Lehrplan auf den Punkt bringt:

> „Hinter jedem »Begründe«, in jedem »Warum ist das so?« der Schulmathematik steckt daher die Frage nach den Gründen, die ein anderes Sein gar nicht mehr zulassen, die Alternative undenkbar machen. Wie diese Begründung zu führen ist, nämlich mit unwiderlegbaren Argumenten, welche sich etwa mit Hilfe der aristotelischen Grundsätze der Logik formulieren lassen, wird freilich nicht diskutiert. Damit bleibt im Verborgenen, dass der Glaube an den schicksalhaften Grund als auch die Methoden der Beweisführung Gesetzen gehorchen, welche aussprechbar, vielleicht erlernbar, in jedem Falle aber kritisierbar und ganz und gar nicht so schicksalhaft alternativlos sind wie das damit Begründete vorgeblich selbst. Die Tabuisierung des Sprechens über das Begründen und Beweisen - keine einzige Aufgabe im Schulbuch fordert eine Reflexion dieser Methode - ermöglicht erst, dass die logische Form des Denkens kritiklos als unfehlbares Denken wahrgenommen und die Mathematik als ihr treuster Vertreter unhinterfragt verehrt oder gefürchtet werden kann." (Kollosche, 2015, S. 154)

Kollosche diskutiert in seinem Buch die gesellschaftliche Rolle des Mathematikunterrichts. In einem Kapitel widmet er sich sehr ausführlich der Rolle, die die Logik im Mathematikunterricht spielt und kritisiert, dass zentrale Ideen wie der Satz des ausgeschlossenen Dritten, nie auf einer Metaebene diskutiert werden (zumindest nicht in den Schulbüchern). Die Diskussionen auf der Metaebene sollen den Schülerinnen und Schülern die Mathematik zum Leben erwecken, ihnen zeigen, dass es selbst in der Mathematik Grenzen gibt (vgl Kollosche, 2015, S. 148 ff). Ein weiteres Beispiel ist, dass das Bivalenzprinzip eine bewusst entschiedene Einschränkung in manchen mathematischen Theorien darstellen kann, aber keineswegs eine zwangsläufige Festlegung darstellt. Der Ansatz der Fuzzylogik ist beispielsweise nicht an diese Idee gebunden.

> "Solche Inhalte jedoch, die den Glauben an die logische Ordnung hätten erschüttern können und durchaus in der geistigen Reichweite der Schulmathematik liegen, etwa nicht-euklidische Geometrien, Paradoxien der Mengenlehre oder alternative Logiken, wurden von der Schulmathematik bis heute links liegengelassen." (Kollosche, 2015, S. 148)

Er verlangt, dass Schulbücher auch vermehrt offene Fragestellungen behandeln, die verstärkt die Diskussion über Mathematik anregen, anstatt sich auf geschlossene Fragestellungen zu beschränken.

Bei Definitionen pocht Kollosche darauf, das zu Definierende nicht zum Subjekt einer Aussage zu machen, sondern immer mit "Wir nennen…/Wir definieren ... als..." zu beginnen, da die Aussage sonst in vielen Fällen streng genommen falsch wäre. Außerdem vermittelt eine Formulierung, wie *"Die Wurzel einer Zahl ist...",* einen Eindruck von finaler Abgeschlossenheit der Mathematik, welche aber, wie wir bereits festgestellt haben, nicht gegeben ist. Kollosche führt auch ein Beispiel aus einem Schulbuch an:

> "Nach nur einem Textabsatz zum Umkehren des Quadrierens präsentiert das Mathematikschulbuch folgende Definition:
>
> Die Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl ist diejenige nichtnegative Zahl b, die mit sich selbst multipliziert die Zahl a ergibt.
>
> Es gilt: $\sqrt{a} = b, da\ b^2 = a\ mit\ b \geq 0$
>
> Zunächst erweckt diese Definition nicht den Eindruck, als ob hier etwas vom Menschen benannt (oder besser: eingegrenzt) werde; vielmehr wirkt es so, als sei hier die Rede von etwas jenseits des menschlichen Existenten. Zwar lässt die Kopula »ist« eine Bedeutung von ›heißen‹ zu, doch würden wir beim Benennen eher das Definierende statt das zu Benennende ins Subjekt setzen: ›Das ist Thomas‹ statt ›Thomas ist das‹, so auch ›Das ist die Wurzel‹ statt ›Die Wurzel ist (heißt) dieses und jenes‹. Setzen wir die Wurzel ins Subjekt, so kann

die Kopula kaum noch ein ›heißen‹ bedeuten, sie bezieht sich vielmehr auf etwas bereits Bekanntes, etwas, das schon vor seiner Definition seine Grenzen kennt und als Subjekt in Aktion treten kann. Der Satz erweckt den Eindruck, als sei die Wurzel schon vor ihrer Definition dagewesen und als würden nun nur ihre Eigenschaften offenbart; er präsentiert als Altbekanntes, was der Schüler gerade erst kennenlernen soll."(Kollosche, 2015, S. 151)

Weiters betont der Autor die gesellschaftliche Rolle der Logik seit Aristoteles und vor allem die Macht, die man über die eigene Selbstständigkeit erlangt, wenn man seine logischen Fertigkeiten schult: *Logisch Denken lernen ist ein Aspekt des* ***Mündig Werdens***. Dieses wiederrum stellt eines der wichtigsten allgemeinen Bildungsziele des österreichischen Schulsystems dar, man sollte entsprechende Fähigkeiten also bereits mit Ende der Schulpflicht erworben haben.

Der Lehrplan fordert, wie wir bei seiner Analyse gesehen haben, ein, dass im Mathematikunterricht die Fähigkeit zum kritischen Denken und Reflektieren gewonnen wird. Außerdem sollen Begründungen und Beweise formuliert werden, sowie Argumente auf ihre Vollständigkeit überprüft werden können. All diese Dinge scheinen aussichtslos, wenn im Mathematikunterricht nicht auch Logik einen Platz einnimmt. Neben anderen diskutierten Autoren vertritt Dr. Lechner die Meinung, dass auch in dem neuesten Lehrplan sehr viel Logik steckt.

Eines der höchsten Bildungsziele unseres Schulsystems ist die Erziehung zu mündigen, kritisch denkenden Bürgern. Als solche muss das Schulsystem sie notwendigerweise dazu in die Lage versetzen, gültige Argumente zu erkennen und vor allem auch solche, die es nicht sind. Sie sollten weiterhin nicht nur Fehlschlüsse erkennen, sondern auch fähig sein zu sagen, was in einem Argument nicht in Ordnung ist. Dr. Lechner sowie Susanne Epp schlagen auch die Behandlung von Argumenten in Textform im Unterricht vor und ich möchte mich diesem Vorschlag anschließen. Die immer bedeutendere Rolle der Argumentationstheorie in Gesellschaft und Politik sollte im Mathematikunterricht (und in anderen Fächern) berücksichtigt werden. Dies ist ein weiteres Argument für die Behandlung der Aussagen- und Prädikatenlogik im Unterricht.

Eine einfache Einführungsübung, welche ich allerdings eher in der Unterstufe zur Schärfung des Variablenbegriffs - im Sinne Susanne Epps - ansiedeln würde, könnte folgendermaßen aussehen:

Beispiel 6. Formalisiere folgende Sätze des Deutschen so gut es geht im Rahmen unserer offiziellen Sprache der Aussagenlogik:

i) Marianne mag Hans, aber Jutta kann sie nicht leiden.

ii) Helene hasst Otto, und obwohl sie Max mag, kann sie weder Elke noch Franz leiden.

(Eder, 2016)

Lösung:

1.Schritt: Elementarsätze identifizieren und unterstreichen.

2.Schritt: Jedem Elementarsatz eine Variable zuweisen und ein vernünftiges Verzeichnis anlegen:

a...“Marianne mag Hans.“

b...“Marianne kann Jutta leiden.“

3.Schritt: Richtigen Junktor wählen und die beiden Sätze verbinden:

$$a \wedge (\neg b)$$

Dieses Beispiel ist nur **ein** möglicher Ansatz. Ich will keineswegs damit behaupten: **so** muss Logik im Unterricht aussehen. Ich beteuere lediglich, dass es auf die eine oder andere Weise geschehen muss.

Später könnten auch Argumente in Textform analysiert werden. Das folgende Beispiel stammt aus den Vorlesungsunterlagen des Grundkurs Logik von Prof. Dr. Dr. Mag. Mag. Esther Ramharter.

VERBRECHER-RÄTSEL (3):

In ein Verbrechen sind die 3 Personen Anatol, Benjamin und Cecilie verwickelt. Der Kommissar verfügt über folgende Informationen:

- Anatol und Benjamin machen gemeinsame Sache, sind also nur gemeinsam schuldig bzw. unschuldig
- Wenn Benjamin schuldig ist, ist Cecilie unschuldig, und umgekehrt (also wenn Cecilie unschuldig ist, ist Benjamin schuldig).
- Benjamin oder Cecilie ist schuldig.

Der Assistent des Kommissars behauptet: „Anatol oder Cecilie ist unschuldig". Hat er Recht?

(1) Anatol ist schuldig g.d.w. Benjamin schuldig ist	– 1. Prämisse
(2) Benjamin ist schuldig g.d.w. Cecilie unschuldig ist.	– 2. Prämisse
(3) Benjamin oder Cecilie ist schuldig.	– 3. Prämisse

(1) $a \leftrightarrow b$	1. Prämisse
(2) $b \leftrightarrow \neg c$	2. Prämisse
(3) $b \vee c$	3. Prämisse

(Ramharter, 2016)

Auch dies ist nur ein Beispiel für den von Susanne Epp vertretenen Ansatz der sprachlichen Einführung. Ziel solcher Aufgaben könnten Argumentationen aus Politik und Medien sein, wie etwa dieses Beispiel aus der Lehrveranstaltung Rhetorik und Argumentationstheorie von Mag. Dr. Gierlinger:

Sprachliche Indikatoren eines Arguments

Auch Argumente ohne Indikatoren sind denkbar.

Beispiel

„Den Universitäten sollte ein größeres Budget eingeräumt werden. Unter den derzeitigen Bedingungen ist es den Universitäten nicht mehr möglich ausreichend Kapazitäten für alle Studierenden bereit zu stellen. Zudem ist der Bildungssektor ein wichtiger Motor wirtschaftlicher und gesellschaftlicher Entwicklung."

(Gierlinger, 2017)

Hier kann reflektiert werden: Handelt es sich um ein Argument? Wenn ja, was sind die Prämissen? Was ist die Konklusion? Hierzu kann das Argument in Normalform gebracht werden. Weiters kann über versteckte Prämissen diskutiert werden und über Gültigkeit oder Nicht-Gültigkeit des Arguments. Es ist allerdings zu beachten, dass es sich hier um eine offene Aufgabe handelt. Die Diskussion muss nicht zwangsläufig zu einem eindeutigen Ergebnis kommen.

Ein weiteres Argument ist die Forderung des Lehrplans nach der Fähigkeit zu beweisen. Auch in den Zentralmaturaufgaben tauchen Begriffe wie „zeige" und „begründe" auf. Für die Schüler ist es aber vor allem wichtig, dass sie Beweisen in konkreten Fällen lernen. Dazu gehört auch die Korrektheit eines Beweises zu überblicken. Ein profundes Verständnis der Begriffe **notwendig** und **hinreichend** ist ein zentrales Element dabei. Eine Alltagssituation, die man sich diesbezüglich vorstellen kann ist folgende: Wenn man einen Krimi ansieht und man anhand der Fallsituation zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Täterschaft unterscheiden kann, erkennt man, ob es sich bei der Überführung des Täters um einen korrekten Beweis handelt. Prof. Dr. Dr. Mag. Mag. Esther Ramharter hat in ihrer Vorlesung Grundkurs Logik mit Beispielen aus Sherlock Holmes Geschichten gearbeitet. Dies sind durchaus Beispiele, die sich auch für einen AHS-Unterricht eignen würden.

Aber vor allem in rein mathematischen Kontexten ist diese Fähigkeit essentiell. Ein wichtiges Ziel ist es, die relativ häufig auftretenden Rückschlüsse als Fehlschlüsse zu thematisieren. Der Rückschluss als Fehlschluss lässt sich beispielsweise während der Untersuchung von Funktionen und ihren Eigenschaften gut als reflexives Moment integrieren:

Falls es eine Extremstelle gibt, ist die Ableitung dort null, aber umgekehrt bedeutet dies nicht, dass eine Nullstelle der Ableitung automatisch eine Extremstelle sein muss. Der Rückschluss in dieser Situation wäre ein Fehlschluss. Nun könnte die Metareflexion noch vertieft werden, indem in diesem Zusammenhang auch die Frage an die Schülerinnen und Schüler gestellt wird: „Handelt es sich bei einer Nullstelle der Ableitung um eine hinreichende oder eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle?“

An dieser Stelle möchte ich noch einmal betonen, dass sich die Gedanken, die hinter einem Großteil der im Unterricht behandelten Aufgaben stecken, durch die Aussagenlogik formalisieren lassen. Die Junktoren „und“, „oder“ und „wenn..., dann...“, „Genau dann, wenn...“ sowie All- und Existenzquantoren sind oft unausgesprochen präsent im Hintergrund. Dies habe ich im Kapitel zur Schulbuchanalyse feststellen können und Freudenthal führt diesen Punkt noch sehr viel genauer aus. Er macht klar, dass beinahe jedem Lösungsweg zu Schulaufgaben eine der klassischen Schlussregeln zugrunde liegt. Mit klassischen Schlussregeln meine ich hier die Schlussregeln aus dem Kalkül des natürlichen Schließens, sowie die in der Philosophie gängigen gültigen Argumentationsschemata Modus Ponens (sowohl pollendo, als auch tollendo), Kettenschluss, Modus Tollens, die Kontraposition und natürlich reductio ad absurdum.

Durch die anfangs zitierten Passagen aus dem Lehrplan ist außerdem klar, dass genau diese Rolle der Logik vermittelt werden soll, wenn etwa die Rede vom „exakten Ausdruck“ ist, oder auch, wenn „Argumentieren“ verlangt wird. Diese Fälle beziehen sich wohl auf diese gültigen Schlussregeln, nach welchen in der Mathematik argumentiert werden darf. Viele Schulbücher versäumen allerdings, die Regeln explizit zu machen. Es werden hauptsächlich anwendungsorientierte Aufgaben behandelt und eine Erläuterung des theoretischen Hintergrunds zumeist vermieden. Manche Buchautoren gehen sogar noch weiter und streichen eine enorme Anzahl an zentralen Begriffen komplett aus der behandelten Theorie. Sie verlassen sich nur auf den Lernprozess in Beispielen. Beispiele für solche Begriffe sind: Beweis, Argument, Bedingung, notwendig, hinreichend, „Wenn…, dann…“, Definition, …

Aus fachdidaktischer Sicht ist eine Behandlung der Logik im Mathematikunterricht **notwendig**. Insbesondere die Aussagenlogik und Prädikatenlogik sollte in irgendeiner Form im Unterricht behandelt werden. Wie sollte es behandelt werden? Ich persönlich fühle mich sehr inspiriert von Freudenthals Überlegungen. Auch die Theorie der Begriffsbildung laut Hischer, wie in einem früheren Abschnitt dargestellt, passt gut zu diesem Ansatz. Bei mathematischen Beweisen und Begründungen von Schülerinnen und Schülern sollte in regelmäßigen Abständen über die logischen Muster, die dahinterstecken, reflektiert werden. Dies sollte laut Begriffsbildungstheorie auch über den Gebrauch von logischen Symbolen verlaufen. Der Grund dafür liegt in der Bereicherung der Diskussion durch die Abstraktion und den Wiedererkennungsfaktor. So entsteht ein klar wahrnehmbarer Zusammenhang zwischen diesen einzelnen Meta-Reflexionen im Unterricht.

In Anlehnung an die Darstellung des Curriculumproblems von Vollrath und Roth möchte ich hier eine Liste mit Begriffen und Ideen geben, welche meiner Meinung nach im Mathematikunterricht unbedingt einmal auf einer Metaebene reflektiert werden müssen:

Das Bivalenzprinzip; der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch; der Satz vom ausgeschlossenen Dritten inklusive kritischer Reflexion der einschränkenden Bedeutung seiner Anerkennung; alle gängigen Junktoren und Quantoren (mit Bezug auf Unterschiede zur Alltagssprache); Gültigkeit; Schlüsse und Fehlschlüsse; Modus Ponens; direkter Beweis; indirekter Beweis; Kontraposition; induktiver Beweis; Beweisansatz durch Negation der Konsequenz; atomare Aussagen; Bedingung; hinreichende Bedingung; notwendige Bedingung; Annahme; Voraussetzung; Schlussregel; Definition; Satz;

Eine solche Metareflexion im Unterricht möchte ich kurz anhand eines Beispiels aus dem Buch Lösungswege umreißen:

773. Zeige unter Verwendung der trigonometrischen Grundbeziehungen.

a) $\cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)}$

b) $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$

c) $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$

d) $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$

e) $1+\tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

f) $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$

(Freiler u. a., 2015)

Das Wort „Zeige" in einer Aufgabenstellung fordert einen mathematischen Beweis des geschriebenen. Was ist ein Beweis? Bei einem Beweis muss klar ersichtlich sein, was die Voraussetzungen sind: Was darf man verwenden ohne es weiter zu beweisen? Was gilt schon vor dem Beweis als wahr? Diese Voraussetzungen darf man, muss man aber nicht verwenden. In diesem Fall steht in der Angabe, welche Aussagen man voraussetzen darf. Nämlich:

Trigonometrische Grundbeziehungen

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ $\qquad$ $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

(Freiler u. a., 2015)

Danach benutzt man Schlussregeln, die logisch fundiert sind. In diesem Fall: Äquivalenzumformungen und Substitution. Für jedes Beispiel gibt es mehrere korrekte Beweiswege. Wichtig ist, dass ganz klar und exakt dokumentiert wird, welche Schritte man macht.

Der Schluss, den ich aus der Lektüre von Vollrath und Roth gezogen habe, ist hier noch einmal explizit zu formulieren: Die Aussagenlogik ist jedenfalls elementar, also machbar und ebenso ist sie etwas mathematisch Zentrales und beinhaltet fundamentale Ideen (z.B. Bivalenzprinzip, Korrektheit,…). Sie erfüllt also beide Bedingungen der Autoren und ist daher etwas, das sinnvollerweise unterrichtet werden muss.

Wie soll Logik also im Mathematikunterricht thematisiert werden? Zusammenfassend möchte ich auf der Basis der vorgestellten Experten und Expertinnen folgende Punkte auflisten:

- *Logik hauptsächlich in Verbindung mit anderen Gebieten der Mathematik*
- *Logik auch als eigenes Gebiet*
- *Logik in Form der Aussagenlogik explizit thematisieren*
- *Aussagenlogik als ein Grundbaustein der Sprache der Mathematik*
- *0/1-wertige Grundkompetenzitems*
- *Diskussion von offener Aufgabenstellungen, als Ausgangspunkt zur Reflexion über die Grenzen der zweiwertigen Logik und alternativer mathematischer Zugänge*
- *Logik als Grundlage, auf der über Mathematik reflektiert werden kann*
- *Logik als Ausgangspunkt zur Reflexion konkreter Beispiele. Es wäre wünschenswert, auch in Schulbüchern derartige reflexive Momente in Aufgaben einzubinden; ein mögliches Beispiel sind hier Fallunterscheidungen*
- *Logik als Basis für gut strukturierte Argumentationen und formal korrekte Beweise (in der Schule bedeutsam in Form direkter und indirekter Beweise)*
- *Erkennen von Begründungsmethoden*
- *Unterscheidung mathematischer Beweise und außermathematischer Argumentationen*
- *Üben des exakten Ausdrucks*
- *Plausibel machen essentieller Prinzipien (z.B.: Exaktheit, Bivalenzprinzip)*
- *Trainieren von Abstraktionsfähigkeit*
- *Exaktheit von Aussagen hinterfragen*
- *Anwendungsbeispiele: Informatik, Schalttechnik, Argumentationstheorie in Rhetorik und Germanistik.*

Wenn man also behauptet, Aussagenlogik sei zum reinen Selbstzweck geworden, muss ich klar widersprechen. Ich denke, es liegt ein großer pädagogischer Wert darin, sie als eigenes, in sich geschlossenes Modell, welches gleichzeitig wesentlicher Bestandteil der Mathematik ist, zu unterrichten. Unter Berücksichtigung der dargelegten Fachliteratur gelange ich zur Ansicht, dass Schülerinnen und Schülern Logik als Basisregeln der Mathematik zu präsentieren, ihnen auch ein besseres Verständnis der mathematischen Sprache vermittelt.

Viele Basisfertigkeiten können mit der Aussagenlogik trainiert werden. Das für mich wichtigste Beispiel hierfür ist die Abstraktionsfähigkeit und der Umgang mit Variablen.

Aussagenlogik hat einen festen Platz im Lehrplan – und eine explizite Erwähnung – verdient, weil sie ein Teilgebiet der Mathematik ist, das wie kaum ein anderes gleichzeitig ein kompaktes einfaches Regelwerk ist. Sie demonstriert, wie Mathematik funktioniert, macht außerdem viele entscheidende Entwicklungen der Mathematik greifbar und vor allem vermittelt sie, wie die Übersetzung von Alltagssprache in diese Struktur funktioniert. Übersetzung ist ein unglaublich wichtiger Knackpunkt im Mathematikunterricht. Er ist wichtig und führt bei Schülerinnen und Schülern so oft zu Schwierigkeiten, dass alles, was diesen Prozess plausibler macht, große Aufmerksamkeit verdient.

FAZIT

Die wesentlichen Argumente für eine Behandlung von Logik im Unterricht sind:

- *Um **Mathematik als Sprache** zu begreifen, bedarf es Logik*
- *Um **Studierfähigkeit** als Bildungsziel anzustreben, bedarf es eines profunden Verständnisses von Logik.*
- *Um das Bildungsziel der **Mündigkeit** zu erreichen, ist eine Auseinandersetzung mit Logik notwendig.*
- *Um über Mathematik und ihren **historischen** Wandel sowie die Bedeutung der modernen Mathematik zu begreifen, bedarf es einer Beschäftigung mit der Rolle der Logik für die Mathematik. Dieses humanistische Ziel scheint in der fachdidaktischen Diskussion allerdings an Gewicht zu verlieren.*
- *Logik spielt in vielen **Anwendungsbereichen** der Mathematik eine entscheidende Rolle, allen voran in der Informatik.*

- *Um sinnvoll **über Mathematik zu sprechen,** müssen auch logische Grundfähigkeiten und Grundbegriffe erläutert werden.*
- *Logik ist ein essentielles Werkzeug, um **selbstständig und kritisch denken** zu können.*
- *Logik als **demokratische Erziehung**: In Anbetracht der Relevanz von Argumentationstheorie, Rhetorik und jener von Beweisen, Begründungen und Rechtfertigungen in unserer modernen Gesellschaft benötigen Jugendliche Wissen aus der Logik, um sich in dieser Welt zurechtzufinden.*

Die zwei Teilfragen, die ich mir zu Beginn gestellt habe, möchte ich also wie folgt beantworten:

a) Ist es möglich, auf die Syntax [der Logik] zu verzichten und trotzdem die Semantik zu betonen und

b) Ist es sinnvoll, das zu tun?

Antwort:

a) Ja, es ist möglich
*b) es ist **teilweise** auch sinnvoll, aber oft wirkt ein Transfer auf die Symbolebene unterstützend. Die Abstraktionsebene hilft beim Diskutieren und Begreifen. Sie darf nicht überbetont, aber auch nicht vernachlässigt werden.*

Aussagenlogik im Mathematikunterricht - und seien es nur 2-3 Unterrichtsstunden - hat zu viel Potential, um sie außen vor zu lassen.

Abschließend möchte ich noch einige weiterführende Fragen in den Raum stellen.

- *Wie ist es möglich, dieses Potential voll auszuschöpfen?*

  Die Sammlung "*Tools for teaching logic*" leistet hier schon ein umfangreiches Repertoire an Ansätzen.
- *Wie könnte man Logik im Mathematikunterricht didaktisch wertvoll präsentieren?*

  Diese Frage beantwortet die dargestellte Fachliteratur schon teilweise. Ich würde eine einführende Einheit zur Aussagenlogik am Beginn der fünften Klasse vorschlagen, um danach in regelmäßigen Abständen und bei guten Gelegenheiten auf sie und ihre Symbole in Metareflexionen über konkrete Beispiele, Beweise, Begriffe, Sätze und vor allem Schülerargumentationen zurückgreifen zu können.

Ich hoffe, meine Leserinnen und Leser, vor allem Lehrerkolleginnen und Lehrerkollegen auf neue Ideen gebracht zu haben. Mir war vor allem wichtig, einen neuen Standpunkt in die Diskussion einzubringen und eine neue Perspektive zu zeichnen. Eine Perspektive, die sich lohnt zumindest einmal einzunehmen und ausgiebig zu analysieren.

6. UNTERRICHTSMATERIAL

Zum Schluss möchte ich im letzten Kapitel noch auf konkretes Unterrichtsmaterial hinweisen, welches von dem nichtkommerziellen schweizer Verein Swiss Educ zum Thema Logik bereitgestellt wird.

Während der Recherche für diese Arbeit bin ich über Arnolds Artikel LogicTraffic auf die Seite www.swisseduc.ch gestoßen. LogicTraffic ist eine für den Unterricht entwickelte Software zum spielerischen Erlernen der Aussagenlogik. Mittels Verkehrsampelregelungen erlernen die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit formaler Aussagenlogik. Die Schwierigkeitsgrade sind sehr vielseitig, es wird bemüht, dem ikonischen, symbolischen und enaktiven Charakter gerecht zu werden. Außerdem findet man auf der Seite neben der Software zum Downloaden eine Unterrichtsvorbereitung samt Präsentationsfolien zur Einführung in die Aussagenlogik und den Umgang mit dem Programm LogicTraffic. Zusätzlich gibt es weiterführende Übungsblätter und Lösungen dazu. Die Seite ist wirklich sehr empfehlenswert und so es mein Zeitplan erlaubt, werde ich versuchen, mit meinen Klassen heuer zwei Stunden darauf zu verwenden.

„LogicTraffic vermittelt die Grundlagen der Aussagenlogik und deckt Begriffe wie Variable, Wahrheitswert, Operator, Formel, Wahrheitstabelle, Äquivalenz von Formeln und Normalformen ab. Die Grundidee besteht darin, zu einer gegebenen Verkehrskreuzung eine aussagenlogische Formel zu finden, welche die Kreuzung „sicher" macht, also Kollisionen ausschließt." (Arnold & Hartmann, 2007)

LITERATURVERZEICHNIS

Arnold, R., & Hartmann, W. (2007). LogicTraffic – Logik in der Allgemeinbildung. *Informatik-Spektrum*, *30*(1), 19–26. https://doi.org/10.1007/s00287-006-0123-7

Beutelspacher, A. (2009). *„Das ist o. B. d. A. trivial!“: Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken* (9., aktualisierte Auflage). Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden. Abgerufen von http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9599-8

Bifie. (2016). PISA_Aufgabensammlung_Mathematik.pdf. Abgerufen von https://www.bifie.at/system/files/dl/PISA_Aufgabensammlung_Mathematik.pdf

Blackburn, P., Ditmarsch, H., Manzano, M., & Soler-Toscano, F. (2011). *Tools for Teaching Logic: Third International Congress, TICTTL 2011, Salamanca, Spain, June 1-4, 2011. Proceedings*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. Abgerufen von http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-21350-2

BMB. (2016, September 26). AHS-Lehrpläne Oberstufe 2004: Mathematik (S.66ff). Abgerufen von https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?5te97p

Buchberger, B. (2016). *Mathematik, Management, Meditation: 200 % leben*. Wien ; Graz ; Klagenfurt, Molden Verlag, 2016.

Bürger, H., Fischer, R., Malle, G., Kronfellner, M., Mühlgassner, T., & Schlögelhofer, F. (1989). *Mathematik Oberstufe: Arbeitsbuch für die 5. Klasse der AHS*. öbv & hpt.

Eder, G. (2016, Oktober). *Übung Logik*. Übung, Universität Wien - Institut für Philosophie. Abgerufen von https://ufind.univie.ac.at/de/course.html?lv=180095&semester=2016W

Freiler, P., Marsik, J., Olf, M., Schmid-Zartner, R., & Wittberger, M. (2015).

Lösungswege Mathematik Oberstufe 5, Arbeitsheft. öbv, Firmensitz Wien.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Gierlinger, F. (2017). *Rhetorik und Argumentationstheorie*. Vorlesung und Übung, Universität Wien - Institut für Philosophie. Abgerufen von https://ufind.univie.ac.at/de/course.html?lv=180184&semester=2017S

Götz, S., Reichel, H.-C., Müller, R., & Hanisch, G. (2004). *Mathematik Lehrbuch 6*. Wien: Öbv hpt.

Götz, S., Reichel, H.-C., Müller, R., & Hanisch, G. (2006). *Mathematik-Lehrbuch 5*. Wien: öbv&hpt.

Hannaford, C. (1998). Mathematics teaching is democratic education. *ZDM*, *30*(6), 181–187.

Hilgert, I., & Hilgert, J. (2012). *Mathematik - ein Reiseführer* (1. Aufl). Heidelberg: Springer Spektrum.

Hischer, H. (2016). *Mathematik – Medien – Bildung: Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel: Theorie und Beispiele*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hoffmann, D. W. (2013). *Grenzen der Mathematik: Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Kollosche, D. (2015). *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. Abgerufen von http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-07345-9

Kraft, J., & Bürger, H. (Hrsg.). (2004). *Mathematische Formelsammlung: nach den Lehrplänen für die allgemeinbildenden höheren Schulen zur Abfassung der schriftlichen Reifeprüfung* (9. Aufl., Nachdr). Wien: öbv und hpt.

Kusch, M. (2016, Oktober). *Theoretische Philosophie*. Vorlesung, Universität Wien -

Institut für Philosophie. Abgerufen von https://ufind.univie.ac.at/de/course.html?lv=180090&semester=2016W

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., & Ulovec, A. (2010). *Mathematik verstehen. 5. Schülerbuch* (1. Auflage). Wien, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & CoKG, 2010.

Meyer, M. (2015). *Vom Satz zum Begriff: Philosophisch-logische Perspektiven auf das Entdecken, Prüfen und Begründen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. Abgerufen von http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-07069-4

Neubrand, M. (2002). PISA-2000: Einige Bemerkungen zu mathematik-didaktisch relevanten Ergebnissen.

Novak, J. (1989). *Mathematik Oberstufe 1*. Wien: Reniets.

PISA-Studie für 15-/16-Jährige l BIFIE. (o. J.). [Bundesministerium]. Abgerufen 30. April 2017, von https://www.bifie.at/pisa

Ramharter, E. (2016, Oktober). *Grunkurs Logik*. Vorlesung, Universität Wien - Institut für Philosophie. Abgerufen von https://ufind.univie.ac.at/de/course.html?lv=180011&semester=2016W

RIS. (2016a, Mai 26). Rechtsinformationssystem des Bildungsministeriums. Abgerufen 26. Mai 2016, von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

RIS. (2016b, Mai 26). RIS - BGBLA_2016_II_219 : AHS-Lehrpläne Oberstufe ab 2016 (S.67ff). Abgerufen von https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2016_II_219/BGBLA_2016_II_219.pdf

RIS. (2016c, Mai 26). RIS: AHS-Lehrpläne ab 1990 (S.753ff). Abgerufen von https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/1989_63_0/1989_63_0.pdf

Schmidt-Thieme, B. (2006). Unmathematisches Argumentieren im Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Abgerufen von http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2006/ModerierteSektionen/Semiotik/pdf_schmidt-thieme_barbara.pdf

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Auflage). Heidelberg: Spektrum, Akademischer Verlag.

Wedekind, H., Inhetveen, R., & Ortner, E. (2005). Informatik als Grundbildung: Teil VI: Logik und Geltungssicherung. *Informatik-Spektrum*, *28*(1), 48–52. https://doi.org/10.1007/s00287-004-0452-3

Wittgenstein, L. (1922). *tractatus logico-philosophicus*. London: Routledge & Kegan Paul LTD; London.

ANHANG A

Original Skript der Antworten von Mag. Dr. Josef Lechner:

1. Sollte das Teilgebiet der Logik im AHS Lehrplan Mathematik einen Platz haben?

Grundsätzlich ja.

Leider gibt es viele mathematische (z.B. Matrizen, Graphentheorie, Wirtschaftsmathematik, Kurven und Flächen, …) und Mathematik-verwandte Gebiete (wie eben die Logik, aber auch Algorithmik), die sinnvollerweise (und mit guten Argumenten) in einem Mathematik-Lehrplan (insbesondere der Oberstufe AHS oder BHS) vorkommen sollten,

ABER leider steht demgegenüber;

- nur eine begrenzte Stundenzahl (von der wiederum nur ein Teil tatsächlich stattfinden kann, da auf Grund diverser Projekte, Lehrausgänge, Exkursionen, Sportwochen, und und … ein nicht unbeträchtlicher Teil entfällt),

- der Ruf nach Sicherung der Nachhaltigkeit, der es erfordert (insbesondere im Zusammenhang mit der standardisierten zentralen Reifeprüfung), das Besprochene und Erarbeitete immer wieder präsent zu halten (was natürlich auch Unterrichtszeit in Anspruch nimmt),

- die Beachtung der Grundkompetenzen, die eine Art „Kernlehrplan" darstellen, neben dem die darüberhinausgehenden Inhalte weniger Bedeutung für SchülerInnen besitzen.

2. In welcher Form ist Logik wichtig? Ist sie überhaupt wichtig?

Selbstverständlich ja.

Wichtig
- in Form der Aussagenlogik,

- als Basis für gut strukturierte Argumentationen und formal korrekte Beweise, (in der Schule bedeutsam in Form direkter, indirekter Beweise, ev. Induktionsbeweise)

- verschiedene Zugänge zur Logik (z.B. auch Fuzzy-Logik)

3. Was kann Logik im Mathematikunterricht leisten?

Sehr viel:

- Beitrag zum kritischen und exakten Denken

- Grundlage für gut strukturierte Argumentationen oder formal korrekte Beweise

- Beitrag zur Allgemeinbildung (Ist Logik ein Teilgebiet der Mathematik oder umgekehrt?)

- Basis für die Sprache der Mathematik ….

Generell lässt sich hier alles anführen, was Mathematik/ der Mathematikunterricht zu einem kritischen und auf Argumenten basierendem Denken beitragen kann, also etwa:

- Präzisieren von Sachverhalten

- Analysieren von Problemen, Begründungen, Darstellungen, mathematischen Objekten

- Definieren von Begriffen

- Begründen (Beweisen) mathematischer Sachverhalte mit vorgegebenen Argumenten oder ohne vorgegebene Argumente

- Argumentationsbasis klären

- die Vollständigkeit einer Argumentation überblicken

- Auseinandersetzung mit mathematischen Texten

- Umformungsschritte begründen können

- Formulieren mathematischer Sachverhalte

- Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln
- Lösungswege gegenüberstellen können
- Bewusstes Arbeiten mit logischen Schlussweisen
- Erkennen logischer Strukturen
- Rechtfertigen und Beurteilen von Entscheidungen
- Plausibel machen von Kalkülen
- Ergebnisse auf Plausibilität testen
- Erkennen unterschiedlicher Begründungsmöglichkeiten, Vergleich mathematischer und außermathematischer Begründungen
- In (eventuell unvollständig) vorgegebenen Beweisen die Lücken ergänzen, einzelne Folgerungen genauer begründen können
- Beweisen (direkt, indirekt, induktiv, ...)
- Beweismethoden kennen, erklären und vielseitig anwenden können
- Exaktheitsniveaus „hinterfragen"
- Über das Exaktheitsniveau einer Argumentation reflektieren können
- Exaktifizieren
- Überprüfen von Eigenschaften
- Überprüfen von Vermutungen
- Fallunterscheidungen vornehmen
- Erkennen der beschränkten Gültigkeit von Aussagen, Feststellen von Voraussetzungen
- Überprüfen von Ergebnissen
- Testen

- Überlegen von Bedeutungen und Anwendungen mathematischer Methoden und Denkweisen

4. Gibt es konkrete Beispiele, Kapitel oder Themen, bei denen Logik im Unterricht thematisiert werden sollte?

Aus dem Vorherigen ergibt sich, dass Logik im Mathematikunterricht eine besondere Rolle spielt:

- Bei Mengen und Aussagen

- beim Argumentieren, Begründen und Beweisen

- als Thema für sich: Was ist Logik, welche Formen der Logik gibt es?

- beim Reflektieren über Mathematik: „Mathematik ist Problemlösen durch Schließen“ (B. Buchberger) oder „Mathematik besteht im Finden der logischen und quantifizierbaren Struktur einer Situation oder eines Prozesses.“

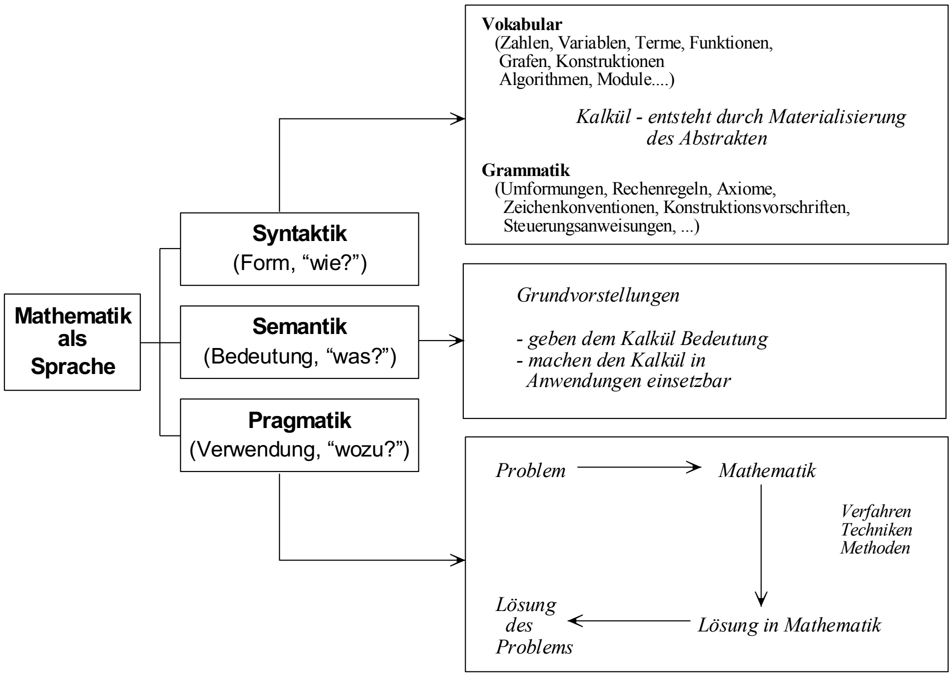
Im Besonderen geht es im Zusammenhang mit der Logik um das Reflektieren über das Thema „Sprache der Mathematik“:

Im Zusammenhang mit Mathematik als Sprache können ja syntaktische, semantische und pragmatische Aspekte unterschieden werden: Die syntaktischen Aspekte der Mathematik werden oft auch kurz unter „Kalkül“ zusammengefasst. Dieser besteht (grob) aus

- gewissen Grundzeichen und Grundbegriffen („Vokabular“),

- aus als wahr anerkannten Sachverhalten (Axiomen),

- aus einer Sammlung von Schluss-, Umformungs- und Ableitungsregeln, die angewendet werden, um alles weitere (Theoreme, Sätze) herzuleiten (um das „Gebäude der Mathematik“ zu errichten).



5. Ist der symbolische Formalismus der Aussagenlogik wichtig oder mit Gefahren verbunden?

Wichtig, weil (siehe Frage 3,4) dieser Beiträge liefert

- zum kritischen und exakten Denken

- für gut strukturierte und formal korrekte Beweise

- zum richtigen Gebrauch des mathematischen Kalküls

Es besteht aber die Gefahr der Überbetonung syntaktischer Fragen: Auch ein Sprachunterricht wird sein Ziel nicht erreichen, wenn er sich auf Fragen der Grammatik beschränkt. Die Grammatik (in M: die Logik) ist lediglich ein (aber sehr wichtiges!) Hilfsmittel zum korrekten und sicheren Arbeiten. (D.h. natürlich nicht, dass es auch sehr wichtige und interessante Fragen innerhalb der Logik gibt.)

Gibt es bestimmte Schlüsselbegriffe aus der Logik, die auch für das Verständnis anderer Themen essentiell sind?

Nur einige Schlagwörter (hier ließen sich lange Abhandlungen verfassen):

- Verbindung Mengen – Aussagenlogik – Schaltlogik

- Vollständigkeit

- Redundanz(-freiheit)

- Beweistheorie

- Beitrag der Logik für die Erstellung von Algorithmen

- Logik und Programmiersprachen

6. Können Sie sich Gründe vorstellen warum die Aussagenlogik im Zuge der Lehrplanänderung ab 2004 aus dem Lehrplan vollends verschwunden ist?

(Sie ist natürlich nicht vollends verschwunden, sie wird allerdings nicht mehr explizit erwähnt, sondern steckt nur mehr im Subtext in Begriffen wie: „...Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen...“ oder „Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen...“)

Nun – wie im Kleingedruckten hingewiesen – ist die Aussagenlogik nicht wirklich verschwunden, sie wird allerdings - wie richtig vermerkt - leider nicht mehr explizit angesprochen.

Sehen wir uns die Formulierungen der letzten drei Lehrpläne bzgl. Logik näher an:

Lehrplan 1985

In der Bildungs- und Lehraufgabe:

Bei „Allgemeine mathematische Fähigkeiten“:

„- Argumentieren und exaktes Arbeiten

Insbesondere: präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen); Vollständigkeit einer Argumentation überblicken; Erkennen logischer Strukturen; Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform).“

Bei „Reflektieren über Mathematik und mathematische Arbeitsweisen“:

„Die Schüler sollen beispielsweise

- Probleme des Definierens, Beweisens, der Exaktheit erkennen“

Bei Lehrstoff:

(5. Klasse/ 9.Schulstufe AHS Gymnasium/ Wirtschaftskundliches Realgymnasium):

„Logische Begriffe und Mengen“
Ziel ist ein Reflektieren über logische Begriffe und logische Beziehungen, die in verschiedenen mathematischen Zusammenhängen und auch in umgangssprachlichen Formulierungen auftreten. Dabei sollen die Schüler die in der Mathematik üblichen Regeln für den Gebrauch dieser Begriffe und Beziehungen in Abhebung vom Gebrauch in der Umgangssprache kennenlernen und diese Begriffe und Beziehungen in verschiedenen mathematischen Bereichen anwenden.

Arbeiten mit logischen Begriffen:

Präzisieren des Gebrauchs folgender Begriffe: „und“, „oder“, „wenn“ … „dann“, „genau dann … wenn“; Erkennen des Auftretens entsprechender Aussagen und Beziehungen in unterschiedlichen, vorwiegend mathematischen Situationen. Verneinen von Aussagen, insbesondere von Und-, Oder, All- und Existenzaussagen.

Definieren und Anwenden der Begriffe Gleichheit von Mengen, Teilmenge, Durchschnitt, Verneinung, Differenzmenge:

Kennen des Zusammenhanges mit entsprechenden logischen Begriffen, Anwenden dieser Begriffe zum Beschreiben mathematischer Sachverhalte.

Allenfalls Beweisen von Gesetzen der Aussagenlogik bzw. der Mengenalgebra mit Wahrheits- oder Zugehörigkeitstafel.“

Zusatz für Realgymnasium:

„Darstellen und Beschreiben von Schaltungen:

Kennen von Grundschaltungen (Gatter); Darstellen von Schaltungen durch Schaltpläne, Schalttabellen und Schaltfunktionen (Schaltterme). Vergleichen von Schaltungen (Äquivalenz). Entwerfen von Schaltungen.

Rechengesetze für Schaltterme:

Erkennen und Formulieren von Rechengesetzen für das Umformen von Schalttermen. Einsicht gewinnen sowohl in die Gleichartigkeit dieser Rechengesetze mit denen der Mengenalgebra und der Aussagenlogik als auch in die Unterschiede zu den Rechengesetzen für reelle Zahlen.

Allenfalls exemplarisches Verwenden dieser Rechengesetze (Axiome) zum Vereinfachen von Schalttermen und zum Beweisen einfacher Sätze. Kennen der algebraischen Struktur „Boolesche Algebra“. “

Lehrplan 2004:

In der Bildungs- und Lehraufgabe:

Bei mathematische Kompetenzen:

„Kritisch - argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs.“

Bei Aspekte der Mathematik

„Sprachlicher Aspekt: Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden“

Bei Lehrstoff:

Dem Lehrstoff *aller* Klassen vorangestellt und somit nicht nur für die 5. Klasse gültig:
„Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das

Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen soll die Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten legen."

(5. Klasse/ 9.Schulstufe AHS, alle Formen)

Bei Zahlen und Rechengesetze:

- „Grundlegende Begriffe über Aussagen und Mengen kennen"
- „Begründen von Umformungsschritten durch Rechengesetze"

Lehrplan 2016:

Bei Aspekten der Mathematik:

„Sprachlicher Aspekt: Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen. Das mathematische Prinzip, dass Behauptungen begründet werden müssen, soll Vorbild für andere Fächer und gesellschaftliche Bereiche sein. Das Verwenden von mathematischen Symbolen bildet dabei eine Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten"

Bei mathematischen Kompetenzen (Handlungsdimension):

„Formal-operatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die auf Kalkülen bzw. Algorithmen beruhen, also das Anwenden von Verfahren, Rechenmethoden oder Techniken."

(5. Klasse/ 9.Schulstufe AHS, 1. + 2. Semester NOST, alle Formen)

Bei Mengen, Zahlen und Rechengesetze:

- „Grundlegende Begriffe über Aussagen und Mengen kennen"
- „Begründen von Umformungsschritten durch Rechengesetze"

Darüber hinaus gibt es die Reifeprüfungs-Grundkompetenz (BIFIE-Konzeptpapier)

„AG-R 1.2: Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit“, sowie die Lehrplan-Grundkompetenz (Handreichung zum Lehrplan 2016)

„AG-L 1.3: Mit Aussagen und Mengen umgehen können“

Der Lehrplan 2004 entstand aus der Absicht heraus, den bestehenden Lehrplan 1985 zu straffen, zu „komprimieren“, und inhaltlich zu „entlasten“. Dies gipfelte in der (absurden) Vorgabe des Ministeriums, Fachlehrpläne dürfen nicht mehr als 4 A4-Seiten umfassen.

So kam es, dass einige (wichtige) Kapitel tatsächlich „geopfert“ wurden (Matrizen, Grundzüge der Graphentheorie, lineare Optimierung, …) und andere „komprimiert“ wurden (Aussagenlogik, Wirtschaftsmathematik, …)

Zieht man zusätzlich in Betracht, was in den M-Lehrbüchern de Oberstufe vor 2004 und nachher steht, so sieht man, dass die Grundzüge der Aussagenlogik nach wie vor Beachtung finden. Was tatsächlich verschwunden ist, sind ist die früheren Zusätze für Realgymnasien: „Darstellen und Beschreiben von Schaltungen“, „Rechengesetz für Schaltterme“. Meines Erachtens zurecht: diese sollten besser Inhalte eines Lehrplans für Informatik sein.

Weiters ist anzumerken, dass der Fokus sich stärker auf Begründen, Argumentieren, (ein wenig auch auf) Beweisen verlagert hat. Im Zusammenhang mit der neuen standardisierten Reifeprüfung wird ein wesentlich höherer Anteil an Begründungs- und Argumentationsaufgaben eingefordert als dies früher der Fall war. (In den Medien wird dies dann allerdings nicht positiv vermerkt, sondern darauf hingewiesen, dass bei der Zentralmatura „Fallen eingebaut“ seien.)

7. Sind sie der Meinung, dass der Verzicht auf Aussagenlogik im neuen Lehrplan gerechtfertigt ist und warum sind Sie dieser Meinung?

Nun, es wird ja nicht auf die Aussagenlogik verzichtet, sie ist aber nicht mehr in dem Umfang vertreten als dies früher der Fall war.

Der Lehrplan 1985 war ein sogenannter „Rahmenlehrplan", nicht alles was in diesem m.E. sehr guten, aber auch sehr umfangreichen Lehrplan stand, wurde auch tatsächlich unterrichtet (es gab da immer wieder auch „Allenfalls"-Inhalte).

Der Lehrplan 2004 ist/war ein Kernlehrplan: Alle dort angeführten Inhalte sind ausnahmelos zu unterrichten.

Der Lehrplan 2016 ist eine Anpassung des Lehrplans 2004 einerseits an die standardisierte zentrale Reifeprüfung (SRP), die mit dem Konzeptpapier zur SRP und insbesondere mit den Grundkompetenzen zur SRP einen Art „Parallellehrplan" geschaffen hat, sowie andererseits an die Erfordernisse der neuen Oberstufe (NOST) , die aus der (ursprünglich beabsichtigten) modularen Oberstufe hervorgegangen ist/hervorgeht.

8. Finden Sie, dass die Vokabeln und die Sprache aus der Logik eine Verbindung der abstrakten reinen Mathematik und der Alltagssprache bilden? Zum Beispiel der mathematische Begriff „wahre Aussage" und die Verwendung von „das ist wahr" im Alltag?

Ja, selbstverständlich.

Diesem Zusammenhang wird in der mathematisch-didaktischen Literatur ja ausführlich nachgegangen. Besonders empfehlenswert finde ich in diesem Zusammenhang das amüsante Buch von Albrecht Beutelspacher „Das ist o.B.d.A. trivial!"

ANHANG B

Original Skript der Antworten von LSI HR Dr. Helmut Heugl:

1. Sollte das Teilgebiet der Logik im AHS Lehrplan Mathematik einen Platz haben?

Meine zwei Argumente für den Mathematikunterricht (Quelle: Bruno Buchberger) erklären mein „ja“:

- o „*Mathematik ist die über Jahrhunderte entwickelte Technik des Problemlösens durch schließen*“ - Schließen erfolgt auf der Grundlage der Logik

- o „*Der wichtigste Ertrag des Faches Mathematik ist die zum Betreiben von Mathematik erforderliche Denktechnologie*“ – und die beinhaltet ja wohl Elemente der Logik

2. In welcher Form ist Logik wichtig? Ist sie überhaupt wichtig?

3. Was kann Logik im Mathematikunterricht leisten?

Siehe Punkt 1

4. Gibt es konkrete Beispiele, Kapitel oder Themen, bei denen Logik im Unterricht thematisiert werden sollte?

5. Ist der symbolische Formalismus der Aussagenlogik wichtig oder mit Gefahren verbunden?

Eine Gefahr sind solche Elemente der Mathematik immer dann, wenn sie zum Selbstzweck werden, wichtig sind sie dann, wenn die Lernenden den Nutzen für das logische Schließen erkennen können, wenn die Aussagenlogik auch genutzt wird.

6. Gibt es bestimmte Schlüsselbegriffe aus der Logik, die auch für das Verständnis anderer Themen essentiell sind?

7. Können Sie sich Gründe vorstellen warum die Aussagenlogik im Zuge der Lehrplanänderung ab 2004 aus dem Lehrplan vollends verschwunden ist?

(Sie ist natürlich nicht vollends verschwunden, sie wird allerdings nicht mehr explizit erwähnt, sondern steckt nur mehr im Subtext in Begriffen wie: „...Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen...“ oder „Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen...“)

Einerseits die damals propagierte Entrümpelung. Andererseits neigen Inhalte des MU dazu, sich von ihrer ursprünglichen Bedeutung zu entfernen und zum Selbstzweck zu werden (weil wir ja was zum Prüfen brauchen). Das galt damals vor allem für die Mengenlehre („Durchschnittsmenge der Buchstaben der Wörter Ananas und Mississippi“, …) und die Aussagenlogik. Und so wurden diese Kapitel entfernt, anstatt sie sinnvoll mit anderen Themen zu vernetzen.

8. Sind sie der Meinung, dass der Verzicht auf Aussagenlogik im neuen Lehrplan gerechtfertigt ist und warum sind Sie dieser Meinung?

Im neuen Lehrplan wurde auf einiges Unverzichtbares verzichtet (z.B. Logik, präziserer Grenzwertbegriff, usw.). Leider ist das Wichtigste, 0/1-wertige Grundkompetenzitems zu trainieren. Elemente der Logik kommen aber im Grundkompetenzkatalog nicht vor. Ich halte das für eine große Gefahr für den MU.

Mein Rat: Untersuchen Sie Lehrpläne anderer Länder (z.B. verschiedene deutsche Bundesländer) und zeigen Sie, wie sehr wir uns von internationalen Standards des MU durch unsere Reduktion auf Grundkompetenzen abkoppeln.

9. Finden Sie, dass die Vokabeln und die Sprache aus der Logik eine Verbindung der abstrakten reinen Mathematik und der Alltagssprache bilden? Zum Beispiel der mathematische Begriff „wahre Aussage“ und die Verwendung von „das ist wahr“ im Alltag?

Eine Funktion des MU könnte sein, zu zeigen wie logische Begriffe (wie z.B. „und“ bzw. „oder“) in der Alltagssprache unscharf verwendet werden und dadurch auch zu Missverständnissen führen können. Texte nach den Regeln der Logik zu analysieren ist zum Beispiel für die Zunft der Juristen ein wichtiges Bildungsziel.