DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Spiele für den Mathematikunterricht der Oberstufe

verfasst von / submitted by

Mario Buzanich

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2021 / Vienna, 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreut von / Supervisor:	Doz. Dr. Franz Embacher
Mitbetreut von / Co-Supervisor:	Mag. Dr. Andreas Ulovec

DANKSAGUNGEN

An meine zwei Betreuer Andreas und Franz. Ihr habt mir nicht nur viel geholfen sondern wart immer erreichbar.

An Natascha Peller für die Unterstützung bei jedem Problem das aufgetreten ist.

An meinen Vater, „Mei anziga“.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Tätigkeit des Spielens liegt tief in den Grundbedürfnissen der Menschheit vergraben. Wir asoziieren damit einen Weg zur Entspannung nach einer Zeitperiode die wir als stressreich empfunden haben und denken dabei an unsere individuellen Momente zurück in denen wir uns geborgen und ausgeglichen gefühlt haben. Viele verwenden das Spiel auch als Anreicherung für sonst mondäne aber wichtige Aufgaben des Alltags. Wenn wir Fitness betreiben sind wir nicht mehr damit zufriedengestellt, einfach nur ein paar Sit-Ups und Klimmzüge zu machen. Wir wollen das Spiel in die notwendige Bewegung integrieren, indem wir uns wie beispielsweise bei Zumba rythmisch tanzend bewegen oder aus einem ansonsten eintönigen Lauf einen kleinen Wettkampf unter gleichgesinnten machen. Ein kleinerer Teil von uns betreibt das Spielen sogar professionell, sei es nun der perfektionistische Boxer oder der strategiefeilende Schachspieler. Spielen trifft uns schon mit dieser ausgewählten Beispielgebung und will man erweitern so braucht man nur auf den Hund schauen, der für seine Portion von Spiel auffordernd den Kopf in Richtung seines Besitzers neigt.

Etwas so offensichtlich allgegenwärtig präsentes hat genau in dieser Tatsache eine seiner Gemeinsamkeiten mit dem anderen Gebiet dieser Arbeit: Der Mathematik. Auch Mathematik betreiben wir täglich und der Drang danach, etwas komplexes und auf den ersten Blick unerklärliches in ein leichter zu verdauendes Konzept zu bringen begleitet uns seit unseren frühen Jahren.

Nach so einer Einführung könnte man sich nun wundern, warum die Zeit unseres Lebens in der wir am deutlichsten mit der Mathematik konfrontiert sind, also unsere Schuljahre, vielleicht das letzte ist, das wir mit dem Spielen gleichstellen. Besonders die Mathematik zeigt sich hier als klar abgegrenzt von der Vorstellung einer entspannten, geborgenen Zeit für viele Lernende. Genau in dieser Separation liegt nun die Motivation der ihnen vorliegenden Arbeit. Zwei unserer ständigen Begleiter, also die Mathematik und das Spiel, sollen wieder zusammenfinden.

Dabei muss die Trennung von der oftmals mit sehr guten Intentionen betriebenen Anreicherung mondäner Aufgaben jedoch hervorgehoben werden. Das Erlebnis Mathematik soll gleichgestellt werden mit dem Erlebnis des Spielens. Um dieses Ziel zu erreichen werden zuerst grundlegende Konzepte aus den Bereichen der Spielwissenschaft und der Spieltheorie vorgestellt um daraus eine Kategorisierung unserer gewünschten Mathematikspiele abzuleiten. Dies hat nicht nur den Grund einschränkend zu wirken, denn ansonsten wären unsere Möglichkeiten schlichtweg zu vielfältig. Gleichzeitig soll uns der Prozess der Kategorisierung auch einen Einblick in die Spielwissenschaft und ihre Beurteilungskriterien geben. Vorher werden grundlegende Methoden und Erkenntnisse aus der allgemeinen, aber auch der fachbezogenen Didaktik gegeben. Auch hier streben wir nach Einschränkungen und Grundwissen. Nach dieser Einführung in die beiden bedeutensten Gebiete für diese Arbeit wird versucht, daraus ein paar Mathematikstunden zu bilden, die spielerisch abgehalten werden können.

Wir machen hier außerdem noch eine Einschränkung, unter anderem deswegen, weil sonst der Rahmen einer Diplomarbeit wieder gesprengt werden würde. In der Literatur finden sich zahlreiche Spielesammlungen für den Lehrinhalt der Sekundarstufe 1. Eine kurze Google-Anfrage liefert sofort einen Blick auf den Bildungsserver der DIPF in Deutschland, sucht man nach Literatur gibt es beispielsweise die "Logicals für den Mathematikunterricht“-Reihe von Röser. All diese Inhalte sind jedoch nur für die fünfte bis achte Schulstufe konzipiert, als würden die oberen Jahrgänge schlichtweg nicht existieren. Der Mangel an Material für diese Schulzeit war also eine weitere Motivation für die Einschränkung: <u>Wir behandeln hier Themen aus dem Lehrplan der Oberstufe.</u>

Diese Idee des Zusammenschlusses von Didaktik, Mathematik und Spiel ist weder neu, noch einzigartig. Die Wissenschaft der Spieldidaktik stellt sich sehr ähnliche bis komplett gleiche Fragen und hat sehr ähnliche bis komplett gleiche Ziele. Diese Arbeit versucht trotzdem einen eigenen Ansatz zu finden, auch wenn dieser nicht der Schwerpunkt ist. Wie unter anderen Hans Mogel in seiner „Psychologie des Kinderspiels“ erwähnt ist das Studienfeld um Spiele sehr vorurteilsbehaftet[1]. Diese Beurteilung zieht sich als roter Faden durch die Werke der Spielwissenschaft. Um nochmals auf Mogel zurückzukommen: Er versucht aktiv durch eine anfängliche

[1] (Mogel, 2008), S.23

Befragung von Studenten und anschließende Beurteilung der Antworten unter diesem „Vorurteilsbehaftet? Ja/Nein“-Kriterium neue Ansichten zu gewinnen und die Leserschaft auf das Problem zu sensibilisieren[2]. Genau aus diesem Grund wird sich diese Arbeit ihre eigenen Ziele und Maßstäbe definieren.

Zusammenfassend wollen wir hier also erreichen, die Mathematik und das Spiel zu verbinden. Dazu werden Spiele zur Integration in den Mathematikunterricht der Oberstufe vorgestellt, welche anhand von hier vorgestellten Zielen erschaffen werden. Diese Ziele wiederum werden abgeleitet aus den Methoden und Theorien sowohl der Spieltheorie/Spielwissenschaft als auch der (Fach)Didaktik, welche hier kurz vorgestellt werden.

[2] Vgl. (Mogel, 2008), S.2-4

Begriffsdefinitionen

Damit wir auf unserer Reise zum vorher beschriebenen Ziel nicht sofort über Steine stolpern, die wir nicht gesehen haben wird im ersten Abschnitt dieser Arbeit eine Definition der wichtigsten und zentralen Begriffe gegeben. Diese sind offensichtlich die Mathematik, (Fach-)Didaktik und das Spiel.

Obwohl der Begriff Mathematik keine offizielle Definition besitzt können wir hier trotzdem eine ausreichende Beschreibung geben. Die Mathematik ist eine Wissenschaft, die durch die Kreation von Axiomen logische Strukturen erschafft[3]. Ob diese Axiome etwas mit der Wirklichkeit um uns herum zu tun haben oder nicht sei der Philosophie der Mathematik überlassen. Diese Strukturen werden dann auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Dabei finden die Ergebnisse, um es milde auszudrücken, oft Anwendung in unserem Alltag.

Vergleichsweise einfach fällt es uns mit einer Definition für den Begriff Didaktik. Leser die schon einmal eine Einführungsvorlesung zur Didaktik besucht haben kennen sie sicher gut. Das Wort Didaktik kommt vom altgriechischen „didaskein“, also „lehren“ und ist eben die Wissenschaft des Lehrens und Lernens.

Beim Begriff Spiel verhält es sich ähnlich wie bei der Mathematik: Auch hier gibt es keine offizielle Definition. Der Unterschied ist aber, dass sich selbst Experten des Themengebiets nicht sicher sind, ob eine

---

[3]Vgl. (Wikipedia, 2021)

Definition überhaupt möglich ist. In vielen Werken der Fachliteratur wird sogar gegen eine allgemeine Definition argumentiert. Scheuerl meint dazu[4]:

„Da Spiel in schlechthin allen Bereichen auftauchen kann, müsste man, um einen Grundriss aller menschlichen Spielmöglichkeiten zu gewinnen, einen Grundriss des gesamten menschlichen Lebens zeichnen."

Das Thema scheint komplexer als auf den ersten Blick vermutet und wir werden daher an dieser Stelle die Problematik auf das Kapitel Spieldidaktik verschieben.

[4] (Scheuerl, 1990)

Ein Überblick über die allgemeine Didaktik

Die wichtigsten didaktischen Theorien, oder: Wie lernen wir?

Indem wir das Spiel und die Mathematik zusammenbringen, wollen wir nicht nur zwei Teile des Alltags vereinen, weil wir es können. Das Endziel ist klar: Neue Konzepte und Ideen sollen in die Köpfe von Lehrenden gelangen. Wir haben die offensichtlichsten Stolpersteine der Definitionen entfernt, nun machen wir uns auf den Weg, und dieser lautet: Vom Spielbrett in den Kopf. Diesen Weg müssen wir aber nicht blind beschreiten. Es gibt zahlreiche Theorien rund um die Wissensverarbeitung und dieses Kapitel soll die bekanntesten darunter vorstellen. Bei den vorgestellten Spielen können wir anschließend sehen wie diese Theorien an praktischen Beispielen aussehen.

Die Theorien werden chronologisch vorgestellt, wir beginnen also mit der ältesten unter ihnen: dem Behaviorismus. Danach werden der Konstruktivismus und der Kognitivismus, beide relativ zeitnah ins Leben gerufen, vorgestellt. Abschließend für dieses Kapitel gibt es quasi einen Ausblick in die Zukunft mit den Ideen hinter der Theorie des Konnektivismus.

Behaviorismus

Als Begründer dieser Theorie um die Wissensverarbeitung gilt der amerikanische Psychologe John B. Watson. Hier wird trotzdem erst mit einem der berühmtesten Vertreter des Behaviorismus begonnen. Der russische Nobelpreisträger Iwan Petrowitsch Pawlow und seine Experimente rund um das Reiz-Reaktions-Modell legten einen der wichtigsten empirischen Grundsteine für den Behaviorismus.

Er erkannte[5], dass bei Hunden schon das Geräusch der Schritte der Besitzer ausgereicht hat, um einen Speichelfluss hervorzurufen. Dieses Geräusch wurde als Reiz interpretiert. Der zuerst neutrale Reiz der Schrittgeräusche wurde durch Konditionierung bei den Hunden mit etwas positivem, dem Futter, in Verbindung gebracht. Diese Konditionierung hatte eine Reaktion zur Folge, eben der des Speichelflusses. Um die Allgemeingültigkeit dieses Reiz-Reaktions-Verhalten bei Hunden empirisch zu prüfen wurden bei Pawlows eigenen Hunden Auffangbehälter implantiert und die Konditionierung durchgeführt. Um die Erhebung des Konzepts „Reiz“ auf etwas zu erheben, dass mit den Besitzern nichts zu tun hat, wurde die Konditionierung außerdem mit einer Glocke durchgeführt. Diese wurde immer vor der Futtergabe geläutet. Anfangs gab es keine Reaktion auf den Glockenton, nach einer gewissen Zeit stellte sich jedoch eine Konditionierung ein und der Speichelfluss war auch ohne Futtergabe nur beim Läuten der Glocke präsent.

[5] Vgl. (Lern-Psychologie.de, 2021), Kapitel basiert auf Internetseite

Um das Ergebnis dieser Experimente wurde das Reiz-Reaktions-Modell aufgestellt. Die innerpsychischen Prozesse der Hunde im Experiment wurden durch eine Black-Box ersetzt. Der Reiz, also die Schritte, das Futter oder die Glocke, geht somit in diese Black-Box und als Ergebnis erhalten wir ein (vorher konditioniertes) Verhalten. Wer oft Poker spielt, achtet vielleicht auf so eine Verhaltensweise bei einem Freund, der sich beispielsweise immer an der Nase kratzt wenn er blufft. Auch Selbstkonditionierung ist möglich, sogar unbewusst.

Dieses Verfahren der Konditionierung wird als „klassische Konditionierung“ bezeichnet. Pawlow teilt die Arten von Reiz und Reaktion weiter auf:

- Ein neutraler Reiz ruft keine bestimmte Reaktion hervor.
- Ein unkonditionierter Reiz folgt dem Poker-Beispiel von oben oder dem Futtergeben bei Pawlows Hunden. Obwohl kein aktives Lernen stattgefunden hat gibt es doch eine spezifische Reaktion darauf.
- Ein konditionierter Reiz wäre die Glocke. Das Verhalten und die Reaktion darauf sind antrainiert, wurden gelernt.
- Eine unkonditionierter Reaktion ist das Verhalten mit dem Nase kratzen aus dem Poker-Beispiel. Hier gibt es weitere Unterscheidungen falls ein angeborenes reflexives Verhalten ausgelöst wird oder eben nicht, wir gehen hier aber nicht weiter darauf ein.
- Eine konditionierter Reaktion ist der Speichelfluss beim Hören des Glockenklingelns. Sie ist antrainiert durch beispielsweise

das Paaren eines konditionierten Reizes der eine konditionierte Reaktion auslöst und Zugabe eines (anfangs) neutralen Reizes.

Man erkennt die zentrale Rolle des Reizes, abhängig nicht von der Lehrperson, sondern von der Umwelt. Dieser Umweltfokus wird in den nächsten vorgestellten Theorien abgeändert.

Kritik an diesem Modell kam schnell. Die Theorie erlaube keine Einsicht in die inneren Vorgänge von Menschen. Sie springt auf unserem Weg quasi direkt zum Ziel und sagt uns nicht wie sie das gemacht hat. Wären wir ein Schiedsrichter würden wir dazu wohl mindestens eine Augenbraue heben. Der zweite Vertreter des Behaviorismus der hier Erwähnung findet, der amerikanische Psychologe Burrhus Frederic Skinner, hatte zwar ein Problem mit diesem Modell, seine Lösung entfernt die oben beschriebene Kritik jedoch nicht. Skinner sah die Unvollständigkeit des Reiz-Reaktions-Modells zwar, jedoch hielt er die inneren Vorgänge bei Menschen nur vom jeweiligen Individuum selber einsichtlich. Das Problem wurde also erkannt, jedoch nur als unlösbar bezeichnet.

Als kurzes Beispiel zum Behaviorismus in einem schulischen Umfeld sei noch einmal kurz eine Unterrichtsstunde umrissen die diese Theorie verwendet.

Die Lehrkraft gibt Beispiele zu polynomischen Funktionen. Es soll jeweils die erste Ableitung gebildet werden. Sobald Funktionen dieser Form gesehen werden (Reiz) setzen die Lernenden also die Ableitung an (Reaktion). Die Polynomfunktionen sind dabei anfangs ein neutraler Reiz, das Loben der Lehrkraft oder schon die Aufforderung zur Arbeit ist der konditionierte Reiz. Nach einer häufigen Anzahl an Wiederholungen geht der neutrale Reiz „ich sehe eine Polynomfunktion“ über in einen konditionierten Reiz „ich bilde die Ableitung“.

Probleme an diesem Beispiel sind relativ leicht zu erkennen. Wie genau bilde ich die Ableitung? Bilde ich die Ableitung effizient/korrekt? Was passiert, wenn der konditionierte Reiz etwas abweicht (Man kann ja nicht nur Polynomfunktionen ableiten) ? Verstehe ich die Theorie und Aussage einer Ableitung oder nicht? Um vielleicht Antworten auf diese offenen Fragen zu bekommen wenden wir uns der nächsten Informationsverarbeitungstheorien zu.

Kognitivismus

Wie schon oben beschrieben findet man zwar leicht Kritikpunkte am Behaviorismus, doch das damalige Mindset war schwer zu brechen. Empirische Belege, deren Studien hauptsächlich um den Behaviorismus gemacht wurden, waren nicht zu unterschätzen und gaben ihm mehr als ein Recht zur Existenz und Dominanz. Obwohl Psychologen schon zu Beginn der 1920er Jahre die Lücken im Behaviorismus stopften, bedarf es scharfe und länger anhaltende Kritik an ihm durch große Namen wie dem amerikanischen Philosophen Avram Noam Chomsky um das Festhalten an der behavioristischen Lerntheorie zu brechen. Durch Chomsky gelang es einem solchen „Lückenstopfer" an die Front zu kommen: Dem Kognitivismus. Dieser Wechsel war nicht nur in der Lerntheorie spürbar, sondern zog sich durch das komplette Gebiet der Psychologie.

Der Kognitivismus greift sich das, was im Behaviorismus die Black Box ist und versucht sie für uns einsichtlich zu machen. Im Gegensatz zum doch sehr beschränkten Bild auf den Lernvorgang der dem Behaviorismus zugrunde liegt versucht der Kognitivismus nun aber nicht nur den Fokus auf die Black Box zu legen. Menschen, oder genauer deren Gehirne, werden als informationsverarbeitende Maschinen betrachtet, mit einem Input und einem Output. Was im Gehirn passiert ist vom Individuum, vom tatsächlich rennenden Programm, abhängig, Vorerfahrungen, persönliche Präferenzen und mehr nehmen den Input aus der Außenwelt und verarbeiten ihn um zu einem Output zu kommen. Der Input selber ist also immer der gleiche, nur das Programm im Gehirn verarbeitet ihn individuell.

Das Lernen im kognitivistischen Sinn ist eine Verarbeitung von Informationen und hat als Ziel, dass die Lernenden den Inhalt verstehen. Hier ist also nicht wie beim Behaviorismus vom stundenlangen Üben die Rede. Der Stoff soll grundlegend nachvollzogen werden. Dadurch können die Problemstellungen variieren und trotzdem sichergestellt werden, dass die Lernenden eine Lösung finden.

Der amerikanische Psychologe Robert Mills Gagné fordert in seinem „Conditions of Learning“ neun Aspekte eines optimalen Lernprozesses[6]. Die dazugeschriebenen Anmerkungen stammen von Peter Vontobel[7].

1. Die Aufmerksamkeit der Lernenden wecken

   Damit meint Gagné die Aufmerksamkeit der Lernenden auf allen Ebenen. Um dies zu gewährleisten, sollte der präsentierte Lerninhalt so abwechslungsreich wie möglich gestaltet werden.

2. Die Lernenden über die Lernziele orientieren.

   Dieser Punkt wirkt unterstützend auf sowohl Punkt 1 als auch Punkt 3. Bei der Diskussion der Lernziele sollte weiters auf die

[6] Vgl. (Gagné, 2011)
[7] Vgl. (Vontobel, 2006)

Wortwahl geachtet werden, um den Fokus auf den Prozess des Lernens zu lenken.

3. Das Vorwissen der Lernenden aktivieren.

   Die Einspeicherung von Wissen geschieht nur dann auf eine effiziente Weise, wenn das Kurzzeitgedächtnis etwas im Langzeitgedächtnis in Verbindung setzen kann. Wir werden dieses Prinzip nochmal später beim Kapitel zum Spiralprinzip aufgreifen.

4. Klare, eindeutige und unverwechselbare Vermittlung der Inhalte.

   Dieser Punkt wird umso wichtiger, je komplexer der Lerninhalt ist. Dabei ist die Komplexität natürlich auf dem Niveau der Lernenden einzustufen. Durch eine klare Vermittlung gelingt das Anknüpfen an Vorwissen besser.

5. Die Lernenden während der Lernphase anleiten und unterstützen.

   Einer der Kernpunkte in der kognitivistischen Lerntheorie. Der Fokus beim Lernprozess liegt nicht mehr so stark auf den Umwelteinflüssen, vielmehr gibt man hier den Lehrenden Verantwortung. Der Lerninhalt soll verdaulich aufbearbeitet werden, um eine leichte Abspeicherung zu fördern.

6. Lernfortschritte herausstellen und 7. Rückmeldung geben.

   Die Punkte 6&7 haben vor allem die Motivation der Lernenden als Ziel. Schon bei Skinner wurde klar, dass der Erfolg beim

Lernen ein wichtiger positiver Faktor ist und die Bereitwilligkeit als auch das Verhalten positiv verstärkt.

8. Die Leistung objektiv beurteilen.

Dieser Punkt hat nicht nur rechtliche Gründe. Durch eine objektive Beurteilung stellen wir unter anderem Fairness und Gleichheit zwischen wechselnden Lehrenden her.

9. Transfer und Behalten fördern, z.B. durch Übungen.

Dieser Punkt spielt sowohl in Punkt 3 auch in Punkte 6 und 7 hinein. Wir erkennen auch ein bisschen vom Behaviorismus in ihm. Auch bei kognitivistischen Lerntheorien bleibt uns das Üben nicht erspart, nimmt aber einen vergleichsweise kleineren Stellenwert ein.

Als Abschluss sei auch hier wieder eine kurze beispielhafte Schulstunde mit gutem Lernen aus der Sicht des Kognitivismus gegeben.

Die Lehrperson kündigt an, dass heute Gleichungen eingeführt werden. Sie fängt an, einfache Gleichungen mithilfe der Vorstellung einer Waage zu beschreiben. Die Lernenden werden aufgefordert, eigene leichte Beispiele dazu zu konstruieren und anschließend zu präsentieren.

Konstruktivismus

Obwohl es den Konstruktivismus in der einen oder anderen Form schon zu Zeiten des Behaviorismus gegeben hat wurden seine Grundsätze wie beim Kognitivismus vergleichsweise spät angenommen. Eine genaue Geburtsstunde ist nicht so einfach festzuhalten, da er sich als interdisziplinär versteht. Sowohl in der Psychologie, Philosophie und auch in den Naturwissenschaften gibt es Ideen, die auf den Prinzipien des Konstruktivismus aufbauen und der Konstruktivismus selber fußt wiederum auch auf Teilgebieten mehrerer Wissenschaften. Wir werden uns hier näher mit dem Kern des Konstruktivismus befassen-dem sogenannten radikalen Konstruktivismus.

Nachdem wir die Black Box beim Kognitivismus untersucht haben geht es nun, zumindest in gewissem Maße, dem Input an den Kragen. Bei der Lerntheorie des Konstruktivismus liegt der Fokus auf der Wahrnehmung von Lernenden. Der Kern der Aussage ist, dass sich die Wirklichkeit um uns herum nicht jedem Individuum gleich präsentiert. Vielmehr nimmt jede Person seine Umwelt auf eigene Art und Weise wahr. Dadurch konstruiert sich jeder sein eigenes Bild der Realität. Das hat weiters zur Folge, dass es innerhalb des Konstruktivismus keine ultimative Wahrheit, keine allwissende Lehrperson gibt. Dadurch wird die Rolle der Lehrkraft eine passive. Sie kann Lernen anregen und darbieten, direkte Wissensvermittlung gäbe es aber keine.

Das heißt die Lehrkraft fungiert bei einer konstruktivistisch angelehnten Lehrstunde vielmehr als Coach mit neuem Wissen, neuen von den Lehrenden zu entdeckenden Gebieten. Dabei sind diese beiden Positionen als gleichwertig anzusehen. Dies steht im starken Kontrast zum Behaviorismus, bei dem Lehrpersonen als Instrukteure gewirkt haben und absolute (Wissens-) Autorität hatten. Beim Kognitivismus war die Lehrkraft vielmehr ein Mentor, der Lerninhalte verdaulich aufbereitet hat. Sowohl beim Behaviorismus als auch beim Kognitivismus ist das Lernen ein Prozess der von außen, eben von der Lehrperson gesteuert wird, beim Konstruktivismus hingegen herrscht die Selbstorganisation.

Für Lehrende heißt das, dass Lernprozesse nur angeregt werden können, die Erkenntnis muss selber konstruiert werden.Hohe Eigenverantwortung und ein sozialer Austausch stehen im Fokus. Der starke soziale Aspekt wird klar, wenn man die Annahme der nicht existierenden Lehrperson mit Gesamtwissen betrachtet. Es bilden sich soziale Gruppen mit stark unterschiedlicher Realität. Diese verschiedenen Realitäten sollen untereinander ausgetauscht und dadurch Übereinkünfte getroffen werden. So sieht der Konstruktivismus einen guten mathematischen Unterricht immer als Dialog zwischen Lehrkraft und Lernenden.

Mathematische Gesetzte beispielsweise haben nach dieser Theorie keinen inhärenten Anspruch auf Wahrheit. Erst wenn Lernende aus dem Wissen darüber ihre eigenen Ansichten konstruiert haben können sie die Gesetze als richtig ansehen. Die Umwelt wird während dem

Lernvorgang, unter anderem abhängig durch Vorerfahrungen der Lernenden, aufgebaut und durch neue Einsichten konstant verändert. Die Rolle von Lernenden geht hier zu einer aktiven über. Sie müssen sowohl motiviert sein, neuen Lernstoff zu erhalten als auch zu verarbeiten und dadurch neue Inhalte zu erkennen.

Einer der Hauptkritikpunkte am Konstruktivismus ist seine Beweisbarkeit. Pongratz schreibt dazu folgendes:

> *„Allein die Behauptung, aufgrund neurophysiologischer, objektiver wissenschaftlicher Erkenntnisse begründen zu können, dass es keine Objektivität gebe, ist nur schwer plausibel zu machen. Denn der Versuch, mithilfe empirischer Untersuchungen eines Objekts (hier: des Gehirns) die Objektivität aller Erkenntnis zu bestreiten, führt zu Zirkelschlüssen."*[8]

Auch die Verwendung des Konstruktivismus selber als Lerntheorie steht unter Kritik. Wie kann bestimmtes Wissen vermittelt werden, wenn es doch gar kein bestimmtes Wissen gibt? So wird der radikale Konstruktivismus in abgeschwächter Form zum Lehren eingesetzt, seine Grundaussagen teilweise für voll genommen, teilweise am Rande liegen gelassen. Es wird schwer eine mathematische Definition abzuprüfen, wenn Lernende ihre eigene Vorstellung von dieser haben und diese als richtig angesehen werden muss.

[8] (Weiß & Zirfas, 2019), S.154

Als Abschluss dieser kleinen Übersicht über den Konstruktivismus gibt es hier auch wieder ein Beispiel anhand einer Mathematikstunde. Das Ziel der Stunde ist es wieder, einfache Gleichungen einzuführen.

Die Lehrperson führt einen Dialog mit den Lernenden, um herauszufinden wie diese Gleichungen in ihrem Alltag anwenden würden und ob sie schon damit in Kontakt gekommen sind. Danach werden auf das Individuum zugeschnittene Fragen gestellt, die darauf ausgerichtet sind den Lernenden selber die Erkenntnis des Äquivalenzprinzips zu ermöglichen. Beispielsweise kann man fragen, wann es gerecht wäre, einen Apfel aus dem Supermarkt zu nehmen und ob der Supermarkt nicht im Gegenzug etwas dafür bekommen sollte.

Konnektivismus

Die Theorie des Konnektivismus sei hier nur kurz erwähnt und umrissen, da ihr Fokus klar auf digitalen Medien liegt.

Der Begründer dieser Lerntheorie ist, anders als beim Konstruktivismus, leicht zu finden. Wieder ist es ein amerikanischer Psychologe, namentlich George Siemens. Die Theorie selber ist dabei verglichen zu den anderen hier präsentierten sehr jung und findet ihre Geburtsstunde im 21. Jahrhundert.

Der Kerngedanke des Konnektivismus ist das Verlagern von Lernprozessen raus aus dem Klassenraum hin zu Netzwerken, vor allem dem Internet aber auch dem Freundeskreis, der Familie, etc... Dabei wird die Fülle an Informationen aus dem Internet als Problempunkt betrachtet. Die durch den Konnektivismus zu erlangenden Kompetenzen beinhalten unter anderem das Filtern von Inhalten.

Lernen findet also als Gemeinschaft statt. Die Orte des Lernens werden dabei als Knoten bezeichnet. Die Verbindung dieser Knoten stellt den Lernprozess dar. Dabei kommen ständig neue Knoten hinzu und alte wieder weg, das Netzwerk selber ist also im kontinuierlichen Wandel.

Laut Kritikern sei der Konnektivismus keine richtige Lerntheorie, mehr eine Art Lernphilosophie. Es geht nicht mehr um die Art der Wissensverarbeitung im Allgemeinen oder um innerpsychologische

Vorgänge, sondern vielmehr um eine bestimmte, ressourcenbeschränkte Art zu lernen.

Wir können aus dem Konnektivismus jedoch ein paar Feststellungen für unsere Spiele ableiten. Die Fähigkeit der Differenzierung und Beurteilung von Quellen für Wissen ist eindeutig eine nützliche Fertigkeit in der heutigen Welt. Diese Fähigkeit kann auch offline durch unsere papierbasierten Spiele trainiert werden, indem wir bewusst einen „Information Overkill“ in diese einbauen. Dies sollte vor dem Einsatz des jeweiligen Spiels jedoch mit den Lernenden thematisiert werden. Sie sollten über den Fokus des Spiels also vorher Bescheid wissen.

Lerntheorien nach Experten

Die folgenden drei Kapitel sollen zeigen, dass es bei weitem nicht nur die gerade beschriebenen starren Lerntheorien gibt. Weiters sind die Grenzen auch oft nicht klar oder gehen ineinander über. Lehrkräfte müssen keineswegs am Anfang ihrer Karriere eine Lerntheorie wählen und diese dann bis ans Ende durchmachen. Der fließende Übergang von einer Theorie zur anderen sowie die Verwendung von mehreren in kurzen Zeitspannen ist sogar erwünscht. Zahlreiche Psychologen, Didaktiker, Philosophen etc... haben ihre eigenen ausgeprägten Vorstellungen von gutem Unterricht. Manchmal fallen diese Vorstellungen schön in eine der vorgestellten Theorien, sehr oft ist es aber ein Mischwerk. Im deutschsprachigen Raum gibt es viele Namen von Experten, die öfters in einer Konversation rund um das Thema der Lerntheorie fallen. Zwei davon werden hier hervorgehoben und ihre Ansichten genauer beschrieben.

Wir folgen dabei den Ausführungen von Kristina Reiss [9] in den Kapiteln zu Jean Piaget und Jerome Bruner.

[9] (Reiss, 2013) S.28-33

Piaget

Jean Piaget, ein schweizer Psychologe, ist mehr als ein Hausname in der Didaktik. Jede sich mit dem Thema befassende Fachschrift kommt um zumindest eine Erwähnung seines Namens nicht hinweg. Hier werden wir sowohl seine vier Stadien als auch seine drei Grundbegriffe für den Umgang mit der Umwelt und den Lernprozess vorstellen.

Laut Piaget geschieht Lernen altersbedingt unterschiedlich. Durch eine Übersicht über die Einteilung dieser Altersbedingtheit bekommen wir einen Einblick in seine Vorstellung der Lernentwicklung in Lernenden. Da die ersten drei Stadien vor dem Oberstufenalter einzuordnen sind, werden die Ideen dahinter nur kurz umrissen. Die vier Stadien lauten wie folgt:

- Sensomotorisches Stadium
  Das sensomotorische Stadium beginnt mit der Geburt und hält bis zu einem Lebensalter von ungefähr zwei Jahren an. Das Kind ist noch nicht fähig für Empathie und erlebt und entdeckt seine Umwelt ausschließlich durch Greifen, Schmecken, Riechen, etc...

- Präoperatorisches Stadium
  Piaget beschreibt dieses Stadium für die Altersspanne von zwei bis sieben, oder genauer, wenn das Kind anfängt zu sprechen. Während die kognitiven Funktionen mittlerweile dafür benutzt werden können, einfache Bilder der Umwelt zu schaffen und in

Erinnerungen festzuhalten wird noch keine Veränderung der äußerlichen Eindrücke oder innere Logik angewandt. Die Kinder glauben zwar an Märchen, können die darin beschriebenen Welten aufnehmen und halten, testen diese jedoch nicht mit der Wirklichkeit ab. Eine Erkenntnis zu diesem Stadium ist der Begriff der Mengenkonstanz. Bei Piagets Experimenten wurden Kindern in dieser Altersstufe zwei Behälter mit gleichem Volumen präsentiert. Dabei haben die Behälter unterschiedliche Formen und einer davon ist mit Wasser befüllt. Meistens gibt es ein hohes, schmales Glas und ein breites aber kleines. Nun wird das Kind befragt, wie viel von dem Wasser in das andere Glas geht bzw. wie viel übrigbleiben würde. Die Antworten sind relativ konsistent: Das hohe Glas hätte mehr Wasser drinnen.

- Stadium der konkreten Operation
  Diesmal sind Lernende, oder Kinder, im Alter von sieben bis elf Jahren zu betrachten. Die vorher beschriebene Mengeninvarianz ist nun kein Problem mehr und Aufgaben dieser Form werden richtig gelöst. Konzepte können nun gedanklich mit dem Vorwissen verknüpft und beurteilt werden. In diesem Alter führen wir die einfachen mathematischen Operationen ein, da die Lernenden nun für solche Konzepte aufnahmebereit sind. Logisches Denken kann durchgeführt werden, es ist jedoch immer physisch existierendes Anschauungsmaterial notwendig.

- Formaloperatives Stadium
  Ab dem zwölften Lebensjahr ordnet Piaget Menschen in dieses Stadium ein. Hier wird ein rein abstraktes Denken möglich. Kinder können argumentieren und Parameter variieren. Auch rein hypothetische Annahmen sind ab diesem Alter möglich.

Laut Piaget können wir den Lernenden in der Oberstufe also deutlich abstrahierte Lerninhalte zutrauen. Wir sehen diese Tatsache auch im Lehrplan, der den Umgang mit abstrakten Begriffen fordert, jedoch trotzdem eine Verbindung zu den vorhergehenden Stadien nicht auslässt. Dies hat vor allem mit zahlreichen Studien zu tun, die diese doch sehr strenge Alterseinstufung auflockern.

Nachdem wir die verschiedenen Lernstadien besprochen haben kommen wir nun zum zweiten Pfeiler der Lerntheorien nach Piaget: den Arten des Umgangs mit der Umwelt. Diese gliedern sich in die drei folgenden Moden:

- Äquilibration
  Wenn wir Menschen mit unserer Umgebung interagieren so streben wir damit, laut Piaget, nach einem gewissen Gleichgewicht. Dieses Equilibrium können wir entweder durch Assimilation oder Akkommodation erreichen.

- Assimilation
  Die Assimilation beschreibt das (relativ reibungsfreie) Aufnehmen und Einfügen neuer Information in unsere bisherige Denkwelt. Wir folgen schon erschaffenen Konstruktionen und können das Wissen in diese kategorisieren und aufnehmen. Nur wenn kein Equilibrium herrscht und wir durch Assimilation neue Erfahrungen nicht aufnehmen können versuchen wir es mit der Akkomodation.

- Akkommodation
  Komplett neue Strukturen und Schemata werden aufgebaut, um das neue Wissen einzufügen. Manchmal wird die Akkommodation auch als „Lernen durch Fehler“ bezeichnet. Dabei liegt der Fehler in unserer Annahme, dass die Welt um uns herum in unsere bekannten Schemata passt.

Die widerstandsfreiste Art sich neues Wissen anzueignen fordert also die Möglichkeit der Einfügung neuer Inhalte in alte Denkstrukturen. Wir werden dieses Thema nochmals im Kapitel zum Spiralprinzip aufkommen sehen, wo wir dann auch eine Verbindung zum Lehrplan herstellen. Dieses Kapitel stellt also quasi eine Genese sowohl für das Spiralprinzip dar, wenn auch in begrenzter Form, als auch für den aktuellen Lehrplan.

Bruner

Wie viel amerikanische Psychologen für das Bild von Lernen und Lernerfolgen geleistet haben erkennt man leicht beim Durchlesen dieser Arbeit. Nun gesellt sich noch einer dazu. Jerome Seymor Bruner reiht sich wie schon Piaget eher zu den kognitivistischen Forschern und seine drei Handlungsebenen sind nun Thema. Bruner sieht folgende Arten des Lernens, welche auf jeden Lerninhalt anwendbar sind:

- Enaktiv
  Die enaktive Ebene, also die Handlungsebene, äußert sich durch eine aktive Gestaltung und Erkundung der Umwelt durch physische Manipulation. Sie sei vor allem bei jungen Kindern die Hauptart des Lernens, kann und wird aber auch bei älteren Jahrgängen verwendet.

- Ikonisch
  Bildliche Darstellungen von Inhalten gehen einen Schritt weiter in ihrer Altersgruppe, so Bruner. Hauptsächlich Jugendliche seien damit angesprochen. Um ein Beispiel zu liefern, welches sich im Themengebiet an schon Vorgestelltes hält: Beim Umformen erster Gleichungen kann dies durch einen Einkauf geschehen. Der Metzger wiegt das Fleisch mit Gegengewichten, diese werden bildlich dargestellt. Oder die einzelnen Schritte beim Umformen der Gleichung werden als Pfeile mit dabeistehender Operation gezeichnet, welche von einer

Zwischengleichung zur anderen gehen. (Hier kann auch gleich die Rückrichtung besprochen werden. Für eine Äquivalenzumformung müssen die Pfeilspitzen zu beiden Zwischengleichungen zeigen können.)

- Symbolisch
  Die „Königsebene“ bei Bruner, in der die Lernenden durch abstraktes Vorstellungsvermögen durch reine Symbole Inhalte beschreiben und manipulieren können. Wir wissen beispielsweise was das Summenzeichen bedeutet und wie man damit umgehen muss.

Obwohl beim Spiralprinzip weiter unten im Text auch Bruners Methode als Beispiel genannt wird sind seine Ebenen nicht als strikt getrennt voneinander zu verstehen. Ab bestimmten Altersstufen erschließen sich nur neue Ebenen. Die gleichzeitige, aktive Mischung beim Lehren wird sogar gefördert und als positiv angesehen. Ist man sich der Ebenen bewusst, so kann eine Lehrkraft den Unterricht besser gestalten, wenn sie so viele davon wie möglich mit einbezieht und zwischen ihnen wechselt. Bruner bezeichnet dieses Vorgehen als intermodalen Transfer. Auf den ersten Blick könnte man jetzt meinen, dass Bruner kein Vertreter vom Spiralprinzip sei, jedoch war er sogar der Begründer! Die wichtige Abgrenzung zu Piagets Denkweise ist dabei folgende: Bruner vertritt die Meinung, dass jeder Person in jedem Alter (fast) jeder Lehrstoff intellektuell ehrlich beigebracht werden kann. Einer der Grundpfeiler des Spiralprinzips!

Das Spiralprinzip und das Prinzip des kumulativen Lernens

In diesem Kapitel sollen zwei gut bekannte Prinzipien besprochen werden, die ihren Einsatz häufig im heutigen Mathematikunterricht finden. Die Ausführungen folgen dabei wieder großteils Kristina Reiss[10]. Wir haben einerseits das Spiralprinzip, welches von Jerome Bruner ins Leben gerufen wurde. Mittlerweile können wir seine Nationalität und seinen Berufspfad schon erraten: Auch er ist ein amerikanischer Psychologe, welcher auch an kognitivistischen Lerntheorien mitgewirkt hat. Auf der anderen Seite stellen wir das kumulative Lernen vor, welches auf den ersten Blick sehr stark dem Spiralprinzip ähnelt. Es gibt aber wichtige Unterschiede zwischen den beiden, die am Ende dieses Abschnittes hoffentlich ersichtlich sind.

Worum geht es nun beim Spiralprinzip? Zusammengefasst und vereinfacht gesagt bearbeitet man Themen der Mathematik in mehreren Altersstufen. Wenn wir das Spiralprinzip näher betrachten so fallen uns wichtige Kernpunkte auf. Es geht hier nicht darum, Volksschülern das Differenzieren von Funktionen direkt beizubringen. Wenn Lehrende Inhalte mit dem Spiralprinzip in Gedanken präsentieren dann kaufen sie sich damit in einen der Leitgedanken ein: Jedes Themengebiet kann auf praktisch jeder Altersstufe angemessen gelehrt werden.

Folgt man Piagets Denkweise so ist eine direkte Verbindung zu den verschiedenen Stadien, wie sie schon oben präsentiert wurden, für

[10] (Reiss, 2013), S.66-74

Lehrkräfte teilweise möglich. Analog geht es auch mit Bruners Lehre. Mithilfe dieser Ansätze können Lehrkräfte auf die verschiedenen Stadien zugeschnittene Präparationen von Lerninhalten vorbereiten und anschließend altersgerecht präparieren. Wie aber schon oben beschrieben sollte man sich nicht strikt an die Reihenfolge halten, sondern die Stärken und Schwächen seiner Lernenden kennen, anders als Piaget verlangt.

Eine der Theorie entsprechend gute Einhaltung des Spiralprinzips bedeutet aber gleichzeitig auf etwaige Fragen der Lehrenden gut vorbereitet zu sein. Wenn beispielsweise die Frage nach negativen Zahlen recht früh kommt, sollte man die Antwort nicht auf später verschieben. Eine Erweiterung des Zahlenstrahls wäre eine Möglichkeit, negative Zahlen zumindest bildhaft vorzustellen. Es sollte allenfalls vermieden werden einfache „Das ist so, weil es so ist“-Statements zu machen. Ein sehr bekanntes Beispiel hierzu ist das Dividieren durch 0.

Ein weiterer wichtiger Punkt zur Realisierung von Unterricht nach dem Spiralprinzip ist das Wissen über den Lerninhalt und die Art der Vermittlung bei Klassen die vorher von einer anderen Lehrperson unterrichtet worden sind. Die Anknüpfungspunkte müssen bekannt sein um der fortsetzenden Natur gerecht zu werden.

Der österreichische Lehrplan ist mit dem Spiralprinzip in Gedanken konzipiert worden. Die Idee der sogenannten Leitideen kann als Konsequenz aus diesem Prinzip angesehen werden. Wir lehren anfangs die natürlichen Zahlen, mit denen man nach Bruner auf enaktiver Ebene umgehen kann (Rechenschieber, Äpfel zusammenzählen,...), anschließend repräsentieren wir die Zahlenmenge der natürlichen und ganzen Zahlen mit dem Zahlenstrahl und bewegen uns damit auf der ikonischen Ebene. Auch die symbolische Ebene wird bedient, dazu brauchen wir auch gar nicht zu den rationalen Zahlen gehen.

Es folgt ein konkretes Beispiel zum Spiralprinzip, wobei einer der schon vorgestellten Problempunkte benutzt wird:

In einer ersten Klasse Gymnasium fragen die Lernenden nach der Bedeutung von negativen Zahlen, da jemand den Begriff von einem anderen Lernenden aus der Oberstufe gehört hat. Falls der Zahlenstrahl schon eingeführt wurde kann nun mit diesem gearbeitet werden, um erste Schritte hin zum Verständnis der Zahlenmenge der ganzen Zahlen zu erarbeiten. Diese Einführung in das Themengebiet kann in der nächsten Schulstufe fortgesetzt werden. Jetzt soll es um einfache Rechnungen mit negativen Zahlen gehen. Beispiele zur simplen Schuldenrechnung (Wir bleiben hier bei der Addition) sind den Lernenden eine greifbare und aus dem Alltag bekannte Hilfe. Anfangs kann der Zahlenstrahl auch als direkter Rückruf verwendet werden. In der nächsten Jahrgangsstufe geht es dann richtig los mit den Regeln der Addition und Multiplikation von negativen Zahlen. Ganz dem Prinzip treu wird mit jedem Schritt sowohl an das Vorwissen angeknüpft, als auch neue Erkenntnisse hinzugewonnen, Kommen wir nun zum kumulativen Lernen, eingeführt von jemandem der uns mittlerweile ein Begriff sein sollte: Robert Gangé. Laut Gagné ist dieses Modell besser als Piagets altersbeschränkte Lerntheorien.

Das kumulative Lernen hat, zumindest auf den ersten Blick, sehr viele Gemeinsamkeiten mit dem Spiralprinzip. Würde man sagen, dass diese zwei Lernarten gleich sind, hätte man jedoch einen Fehler begangen. Das Spiralprinzip beruht darauf, jeden Inhalt des Lernstoffes in jeder Schulstufe vortragen zu können, ohne dabei auf die große Ausrede „Das versteht ihr noch nicht“ zurückgreifen zu müssen. Dieser wichtige Grundstein bleibt dem Prinzip des kumulativen Lernens erhalten. Auch der aufbauende Charakter auf Vorwissen ist ein Teil der Lernphilosophie der unverändert bleibt. Beim kumulativen Lernen wäre das eine vertikale Vernetzung von Lerninhalten. Zusätzlich zu den vertikalen Vernetzungen tauchen hier aber horizontale auf, welche die Inhalte teils mit Inhalten aus anderen Gebieten verknüpfen. Auch die Verbindung zu Erfahrungen aus dem Alltag ist hier möglich.

Beim kumulativen Lernen steht auch das Deutlichmachen dieser Vernetzungen im Vordergrund, sowohl für die Lehrenden als auch für Lernende. Ein häufig angewandtes Mittel ist dabei eine sogenannte Concept Map. Ein Beispiel einer solchen Map sei hier gegeben.

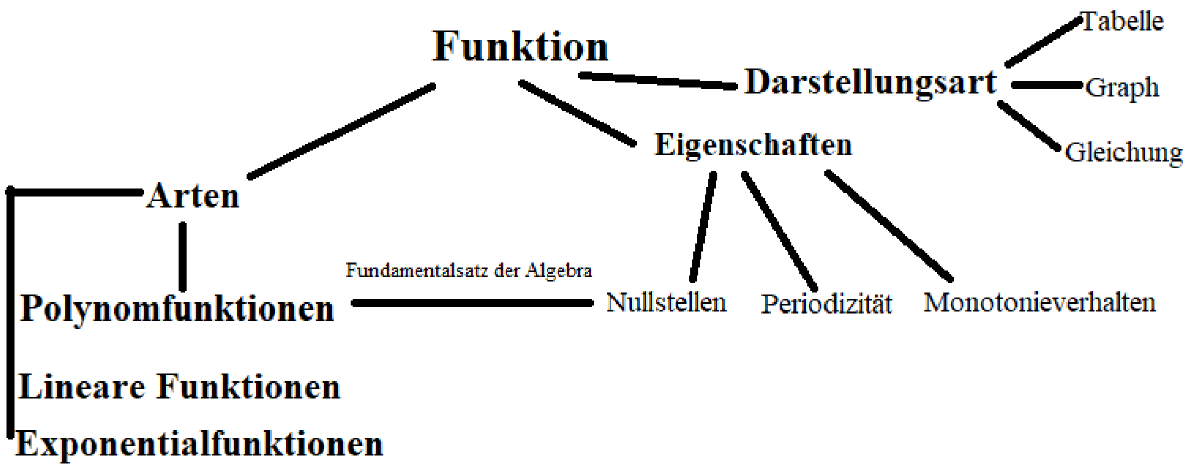

Abbildung 1 Eine Concept-Map zum Begriff "Funktion". Verbindungen können sowohl hierarchisch von unten nach oben als auch auf gleichem Level gemacht werden

Kennzeichen von gutem mathematischen Unterricht

Dieses Kapitel ist alleine schon durch die Namensgebung eine offensichtliche Inklusion in die ihnen vorliegende Arbeit. Wie wir bereits gesehen haben gibt es viele Lernstrategien, die in der psychologischen Wissenschaft ihren Ursprung finden. Es ist jedoch den Pädagogen zu verdanken, daraus eine Sammlung von einfachen Regeln zusammenzustellen. Im deutschsprachigen Raum gibt es wieder eine (mehr oder weniger) Autorität unter ihnen, namentlich den deutschen Pädagogen Hilbert Lühr Meyer. Dieser gibt uns eine Liste von zehn Merkmalen guten Unterrichts, derer wir uns in diesem Kapitel widmen. Sie lauten wie folgt[11]:

1. Klare Strukturierung des Unterrichts
   Wenn Meyer hier von einer klaren Strukturierung spricht, meint er damit, dass sich ein roter Faden durch die Unterrichtsstunde durchziehen soll, der sowohl für die Lehrkraft vor der Einheit als auch Lernenden während der Einheit deutlich ersichtlich ist. Meyer rät dazu, Unterrichtseinheiten in einem Dreischritt zu planen. Zuerst wird der Einstieg gemacht, danach kommt die Erarbeitung der Inhalte und abschließend wird eine Ergebnissicherung durchgeführt. Anders gesagt: Zuerst sagen, was man machen wird, dann durchführen und abschließend nochmal wiederholen was man gemacht hat.
   Auch die Arbeitsaufträge während der Unterrichtseinheit sollten vorsichtig formuliert werden. Die Lehrenden sollen wissen, was

[11] Vgl. (Uni-Frankfurt.de, 2021)

sie zu tun haben und warum. Wenn neue Inhalte kommen sollte das anders angekündigt werden als vor einer Stunde zur Einübung.

2. Hoher Anteil echter Lernzeit

   Wenn Meyer hier von *echter* Lernzeit spricht exkludiert er dabei nicht nur die Zeit die durch die „Bürokratie einer Schulstunde“ wie Anwesenheitskontrolle oder das Löschen der Tafel nun mal dazugehört. Er meint außerdem die Konzentration der Lernenden, ihre Motivation und den Rhythmus der Stunde, also gezielte Lernphasen die sich mit Pausen abwechseln.
   Zusätzlich können Lehrkräfte unter diesem Punkt auch störend in den Lernprozess eingreifen. Nicht immer ist eine Aufforderung zu einer anderen Tätigkeit gut. Wenn Lernende konzentriert arbeiten dann soll man sie dabei belassen.

3. Lernförderliches Klima

   Von extremeren Fällen wie gegenseitigen Beschimpfungen oder Gewalt abgesehen, denn auch das fällt unter diesen Punkt, geht es hier unter anderem darum, gegenseitigen Respekt zu zeigen. Nicht nur die Lernenden haben die Lehrkraft zu respektieren, auch Lehrer müssen in dieses Einverständnis gehen. Bewusste oder unbewusste Benachteiligungen oder Bevorzugungen sind zu unterbinden und Diskrimination basierend auf vorher erbrachter Leistung hat keinen Platz im guten Unterricht.
   Um Lernenden zu zeigen, dass der Respekt beiderseits herrscht, gibt Meyer ein paar Vorschläge. Er sieht beispielsweise die

Mitbestimmung von Schülern, sowohl beim Inhalt des Lernstoffes als auch bei organisatorischem wie der Sitzordnung, als nützlichen Schritt. Auch das regelmäßige Feedback seitens der Lernenden fällt unter diesen Punkt.

4. Inhaltliche Klarheit
   Dieser Punkt bezieht sich auf die Verständlichkeit und, wenn man so will, Verdaulichkeit des Lehrstoffes selber. Der erste Schritt für die Lehrkraft ist hier eine Sicherstellung des notwendigen Vorwissens der Lernenden. Bevor jedoch festgestellt werden kann was die genauen Voraussetzungen sind müssen die wichtigsten Punkte des Inhalts aufgedeckt werden, der wahre Kern sozusagen. Wie wir im Kapitel zum Spiralprinzip besprochen haben werden Inhalte laut dem Lehrplan aufeinander aufgebaut. Diese Tatsache sollte man bewusst nutzen um, wo möglich, möglichst nahtlos an Vorwissen anzuknüpfen. Die Motivation der Lernenden ist hier auch Thema. Sie sollen sich darüber im Klaren sein, warum dieser Inhalt gelehrt wird. Die inhaltliche Klarheit wird weiters unterstützt durch regelmäßiges Wiederholen und Notieren von Zwischenergebnissen.
5. Sinnstiftendes Kommunizieren
   Wie bereits beschrieben sollen Lernende einen Sinn im gelernten Inhalt sehen. Doch dieser Punkt nennt mehr Kriterien für einen gelungenen Unterricht. Wenn möglich soll an die Interessen der Schüler angeknüpft werden. Dazu kommt, dass Vorerfahrungen

in den Unterricht eingebaut werden können. Vielleicht haben manche Lernende ja ein Lernvideo zum pythagoreischen Lehrsatz gesehen oder haben Verwandte oder Bekannte die in der Finanzmathematik arbeiten.

Jedes neue Thema sollte mit einem Nutzen aus dem Alltag verknüpft werden um nicht nur das Interesse und die Motivation zu wecken, sondern auch um eine Begründung für die Wahl des Lerninhaltes zu geben. Dabei hilft unter anderem der Einsatz von geeigneten Medien. Unter einem Obelisken, welcher dazu genutzt wird den Erdumfang zu bestimmen, können sich vielleicht nicht alle Lernenden etwas vorstellen. Ein schnell gezeigtes Video macht die Sache aber klar.

6. Methodenvielfalt

   Dieser Punkt spricht offensichtlich auf die eingesetzten Medien im Unterricht an. Methodenvielfalt liegt aber nicht vor, wenn so viele unterschiedliche Medien wie möglich in eine Lehrstunde gezwungen werden. Die verwendeten Methoden sollen Sinn ergeben.

   Der Hauptpunkt geht jedoch an den eingesetzten Medien vorbei und meint die eingesetzten Formen des Unterrichts. Meyer unterscheidet hier zwischen drei Arten: Der lehrgangsförmige Unterricht, kooperativer Unterricht und individualisierter Unterricht. Die erste Methode beschreibt er als sinnvoll, wenn Inhalte aus der Sicht der Lehrkraft vermittelt werden sollen, die klassische Erklärung mithilfe der Tafel. Kooperativer Unterricht soll vor allem das Selbstwertgefühl sowie soziale Kompetenzen in Lernenden steigern. Schließlich wird individualisierter oder selbstorganisierter Unterricht am besten dazu verwendet zu üben, zu kontrollieren und zu festigen, aber auch um zu differenzieren.

7. Individuelles Fördern

   Beim individuellen Fördern der Lernenden geht es darum, jedem die Möglichkeit zur vollen Entfaltung in so vielen Feldern wie möglich zu geben. Wichtig dabei ist aber die Unterstützung durch geeignete Lehrpersonen, wobei das wichtige Wort hier geeignet ist. Als Mathematiklehrer/in ist man vielleicht nicht immer am besten dafür geeignet die motorischen Fähigkeiten seiner Schüler zu trainieren, daher legt Meyer unter diesem Punkt besonderen Wert auf den Dialog nicht nur zwischen Lernenden und Lehrenden, sondern auch zwischen Lehrpersonen untereinander.

   Förderung von Fähigkeiten meint auch nicht immer Lehrende, die über dem Durchschnittsniveau arbeiten. Durch Differenzierung der Lerninhalte und Bereitstellung von geeigneten Materialien sind auch Schüler mit Lernschwierigkeiten zu fördern. Eine gesunde Fehlerkultur in der Klasse ist auch hilfreich.

   Ein besonderes Thema ist die Muttersprache der Lernenden. Hier muss die Lehrperson einen geeigneten Fokus für sowohl die Klasse als Ganzheit als auch die Individuen setzen. In einer

Klasse in der der Großteil kein oder nur gebrochenes Deutsch spricht kann für eine Mathematikstunde beispielsweise besonders acht auf Textaufgaben gelegt, Vokabelhefte für die Fachsprache Mathematik angelegt und Hilfe von außerhalb beansprucht werden.

8. Intelligentes Üben
   Die wichtigen Punkte bei Übungsphasen sind nach Meyer eine Differenzierung der Übungen, zugeschnitten auf das Niveau der Lernenden, die richtige Hilfestellung seitens der Lehrperson, eine ausgewogene Zeiteinteilung sowohl während des Übens als auch bei der Wahl der Zeiten für das Üben und die Nutzung richtiger Lernstrategien. Die zur Verfügung stehende Zeit für die Übungseinheiten sollte eher großzügig ausfallen. Damit ist nicht die Rate gemeint, sondern genug Zeit für alle Lernenden um die jeweiligen Einheiten ohne Druck abzuschließen. Auch für Übungen ist eine gute Methodenvielfalt von Bedeutung.

   Besonders wichtig für diese Arbeit sind Merkmale für Übungen die Spaß bringen.
   Meyer nennt hierzu Selbsttätigkeit, Freiwilligkeit, zeitnahe Selbstkontrolle und hohes Interesse.

   Er gibt weiters einen Ratschlag zum Intervall der Übungsphasen: Nach 15 Minuten, zwei Stunden, 12 Stunden, zwei Tagen, einer Woche und schließlich nach ungefähr zwei Wochen.

9. Transparente Leistungserwartungen

   Viele der wichtigen Punkte für eine transparente Leistungserwartung wurden in diesem Kapitel schon behandelt. Die Differenzierung und Anpassung von Lerninhalten an Individuen, schnelles Feedback und die Ankündigung von neuen Inhalten wurden alle weiter oben besprochen.

   Ein wichtiger Punkt, der hier dazukommt, ist die klare Abgrenzung von Stunden, in denen aktiv beurteilt wird und Stunden, in denen dies eben nicht geschieht.

10. Vorbereitete Lernumgebung

   Zu einer vorbereitenden Lernumgebung gehört natürlich Ordnung und Sauberkeit. Man kann und sollte aber noch weiter gehen und die Lernenden ihre Räume nach Möglichkeit selber einrichten lassen. Dadurch können sie sich besser mit ihrer Lernumgebung identifizieren.

   Der Lernraum ist weiters am besten so einzurichten, dass er für die vielen den Lehrpersonen zur Verfügung stehenden Methoden wie Gruppenarbeiten, Vorträge und Einzelarbeiten leicht modifiziert werden kann. Auch sollte vor der tatsächlichen Lernzeit kontrolliert werden, ob alle in der kommenden Stunde eingesetzten Medien funktionstauglich sind.

Winter´sche Grunderfahrungen

Der deutsche Mathematikdidaktiker Heinrich Winand Winter ist noch ein Hausname in der deutschsprachigen Fachdidaktik. Seine Werke hatten großen Einfluss auf die Entwicklung der heutigen Lehrpläne, aber auch der Lehrerbildung selber. Neben seinen Beiträgen zum, wie er es nennt, entdeckenden Lernen ist er vor allem bekannt für seine Ansichten wie der Mathematikunterricht zur Allgemeinbildung beitragen kann. Die sogenannten „Winter´schen Grunderfahrungen" sollen ausdrücken, dass der Inhalt des Mathematikunterrichts gelebt und erfahren werden soll. Sie lauten:

- Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen
- Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenzulernen und zu begreifen
- In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die erste Grunderfahrung spricht sich dafür aus, unseren Alltag durch die Linse der Mathematik zu erleben. Dies soll in zwei Richtungen geschehen. Sowohl die Umwelt als mathematisch sehen als auch durch die Regeln und Gesetze der Mathematik die Umwelt begreifen und beschreiben.

Bei der zweiten Grunderfahrung geht es darum, die Mathematik in all ihren Formen als eigenes, gesondertes Objekt wahrzunehmen, dass sich im Laufe der Zeit gewandelt hat.

In der letzten Grunderfahrung wird ein Augenmerk auf den weiteren, direkten Nutzen im Leben der Lernenden gelegt. Wer seine Mathematikausbildung erfolgreich absolviert hat, soll mit ihr in der Lage sein, neuartige Probleme mit ihrer Hilfe zu lösen. Damit meint man nicht nur Berufe, die auf den ersten Blick etwas mit der Mathematik zu tun haben, sondern vielmehr die logischen Fertigkeiten aus dem Unterricht auf vorher noch nicht erschlossenes anzuwenden oder durch diese ein Themengebiet voranzutreiben in dem die Mathematik nicht vorherrschend ist.

Mathematische Fachdidaktik

Wir haben uns mittlerweile einen guten Überblick über die allgemeine Didaktik und ihre grundlegendsten Anschauungen verschafft. Da sich diese Arbeit jedoch, wie ihr Titel verrät, mit Spielen für den Mathematikunterricht beschäftigt folgen nun didaktische Prinzipien, die dem Fach eigen sind.

Mathematische Kompetenzen

Kompetenzen sind ein wichtiger Strang, an dem sich nicht nur die mathematische Fachdidaktik, sondern die Didaktik im Allgemeinen hochzieht. Die Wichtigkeit im derzeitigen Schulsystem Österreichs erkennt man fast sofort beim Lesen des Lehrplans. Aus diesem Grund wird das Konzept hinter diesen Kompetenzen in diesem Kapitel genauer untersucht. Der genaue Wortlaut im Lehrplan der Oberstufen lautet[12]:

Die allgemein bildende höhere Schule hat im Sinne des § 2 des Schulorganisationsgesetzes an der Heranbildung der jungen Menschen mitzuwirken, nämlich beim Erwerb von Wissen, bei der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten.

Eine Definition zum Begriff Kompetenzen ist bei Weinert[13] zu finden:

„Kompetenzen sind die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“

Wir versuchen durch das Sicherstellen von Kompetenzen also etwas in Lernenden zu erreichen, dass sie dazu befähigt ihr Wissen auf

[12] (RIS.bka.gv.at, 2021), Anlage A, Punkt 2
[13] (Weinert, 2014) S.27f

Alltag und die Arbeitswelt anzuwenden. Diese Ausrichtung soll ein tiefergehendes Verständnis fördern. Das erinnert uns stark an den Kognitivismus und den Konstruktivismus.

Für Klieme führte das Konzept der Kompetenzen zu den heutigen Bildungsstandards. Folgt man Klieme[14] so sind Kompetenzen...

„...netzartig zusammenwirkende Facetten wie Wissen, Fähigkeit, Verstehen, Können, Handeln, Erfahrung und Motivation. Sie werden verstanden als Disposition, die eine Person befähigt, konkrete Anforderungssituationen eines bestimmten Typs zu bewältigen."

Im zweiten Teil von Kliemes Definition spiegelt sich Weinert wider, während der erste Teil uns an das Konzept des kumulativen Wissens mit seiner verbindungsprioritisierenden Struktur erinnert.

[14] (Klieme, 2007) S.72f

Grundvorstellungen und Aspekte

Obwohl diese beiden Begriffe hier nur kurz umrissen werden, stellen sie doch wichtige Prinzipien in der mathematischen Fachdidaktik dar. Kenntnis über sie und das bewusste Anpassen der gebrachten Inhalte in der Schule sollen ein tiefergehendes Verständnis über die grundlegenden Begriffe der Mathematik fördern.

Aspekte mathematischer Begriffe sind dabei Teile des Begriffs selber, mit denen dieser fachlich korrekt beschrieben werden kann.

Aspekte für den Begriff „Funktion“ wären der Zuordnungs-, und der Paarmengenaspekt. Bei letzterem sieht man den Graphen der Funktion als eine Menge von geordneten Paaren, während beim Zuordnungsaspekt eine Funktion als Zuordnungsvorschrift von einer Menge zur anderen deutet.

Eine Grundvorstellung zu einem Begriff gibt diesem einen Sinn, indem sie ihn inhaltlich deutet.

Wieder anhand des Begriffes „Funktion“ werden hier die Grundvorstellungen für diesen gezeigt. Sie sind:

Die Zuordnungsvorstellung, die Kovariationsvorstellung und die Objektvorstellung.

Sieht man Funktionen durch die Linse der Zuordnungsvorstellung, so wird durch sie ein Zahlenwert einem zweiten zugeordnet.

Bei der Kovariationsvorstellung erfassen Funktionen die Auswirkungen von Änderungen einer Größe auf eine zweite.

Schließlich stellt die Objektvorstellung die Funktion als Objekt dar, welches einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.

Zu jedem wichtigen mathematischen Begriff gibt es eine ausgearbeitete Liste an solchen Grundvorstellungen und Aspekten. Diese sollten von Lehrkräften benutzt werden, um ein ganzheitliches Bild von Begriffen in den Köpfen ihrer Lernenden zu fördern.

SPIELDIDAKTIK-KAPITEL

In diesem Kapitel wird versucht einen Überblick über die grundlegenden Punkte aus dem Wissenschaftsbereich der Spieldidaktik zu geben.

Dazu wird zuerst versucht, die Verwendung der Spieldidaktik an sich zu motivieren. Anschließend wird die oben bereits aufgegriffene Diskussion rund um die Definition des Begriffs „Spiel“ wieder aufgegriffen. Danach gehen wir in die verschiedenen Spieltypen und versuchen diese auf einen spieleorientierten Mathematikunterricht anzuwenden. Zum Abschluss wird versucht Themen zu bearbeiten, die nicht in der Fachliteratur für Spiele zu finden sind, durch ihre Anwendung im Mathematikunterricht jedoch einen Platz in dieser Arbeit finden sollten.

Ein Versuch zur Definition des Begriffs „Spiel"

Jürgen Fritz beschäftigt sich in seinem Buch „Das Spiel verstehen" gleich anfangs mit dieser doch relativ grundlegenden Frage: „Was ist Spiel?" Genau das soll eine Definition ja beantworten. Dass es nicht so einfach wird wie es anfangs den Anschein macht haben wir oben schon besprochen, doch sicherlich ist auch diese Hürde überwindbar.

Wir werden Fritz am Anfang dieses Kapitels folgen. Er sieht den Begriff als grundlegend aufgeteilt in drei Komponenten:

- Die Spielwelt[15]
  Das Konstruieren einer eigenen Welt beinhaltet die Einführung von Rahmenbedingungen. Wir akzeptieren neue Regeln und befreien uns von alten. Dringlichkeit, Konsequenzen und Ernst scheinen entweder in der alten Welt liegenzubleiben oder zu verschwinden. Durch die Schaffung dieser neuen Welt können Bedürfnisse gedeckt werden, die vorher auf Grenzen gestoßen sind. Dadurch kann aber auch ein Effekt auf die reale Welt erlebt werden.
- Das Spielkonstrukt[16]
  Um die Welt eines Spiels zu erschaffen müssen bestimmte Rahmenbedingungen gesetzt werden. Diese strukturgebenden Regeln können zwar von außen kommen, jedoch müssen alle „Weltreisenden" sich auf sie geeinigt haben. Dabei gibt dieses Spielkonstrukt die Rahmenbedingungen vor, während die

[15] Vgl. (Fritz, 2004), S. 27-32 & S. 71-86
[16] Vgl. (Fritz, 2004), S. 32-35 & S.41-67

tatsächlich ablaufenden Spielprozesse sozusagen den Kern der Welt bilden.

- Das spielerische Verhalten[17]

  Beim spielerischen Verhalten nimmt das Ziel einen zweitrangigen Platz ein, es geht vielmehr um das Spielen selber. Es wird gekennzeichnet durch Selbstbestimmung, also einer rein intrinsischen Motivation. Dadurch erleben Spieler Freiheit und die Möglichkeit zur Entfaltung.Außerdem wird es als Gegenteil zum Alltag wahrgenommen. Durch diese Gegenteilempfindung gibt das Spiel notwendige Bedingungen, um sich selber in einem anderen Licht zu sehen.

  Weiters werden Ungewissheit und Spannung von Fritz angegeben. Spiele müssen eine gewisse Entscheidungsfindung beinhalten. Auch das auf den ersten Blick nicht entscheidungslastige Spiel beherbergt doch die Möglichkeit, dass es durch falsche Entscheidungen nicht gelingt.

  Als letzter wichtiger Punkt ist die Fantasie genannt. Sie erlaubt es uns der neuen Spielwelt anzupassen und uns in ihr zu bewegen.

Während die genannten Punkte sicherlich das Spiel beschreiben geht Fritz hier einen Umweg: Er spaltet das immer als Gesamtheit erlebte Spiel in Grundbestandteile. Für eine handliche Definition, auf die man schnell zurückkommen kann, eben so wie wir sie brauchen, ist diese Form ungeeignet. Doch wir können mithilfe dieser Aufspaltung

[17] Vgl. (Fritz, 2004), S.17-26

zumindest versuchen eine Definition zu bilden, die für den Rahmen dieser Arbeit ausreicht. Dazu kontrollieren wir zuerst, ob wir uns eventuell von für uns unnötigem „Ballast“ verabschieden können.

Die Erschaffung einer eigenen Welt ist definitiv ein Kernpunkt des Spiels. Nur durch sie ist die Differenzierung von „normaler Welt“ und dem Spiel möglich. Weiters kann auch nur durch sie der einzigartige Umstand jedes Spiels erfahren werden. Schaffen wir uns keine eigenen Welten für unsere Spiele, so sind diese sofort mondän und unterliegen der Ernsthaftigkeit und Folgenschwere der realen Welt. Genau das gilt es doch durch den Einsatz von Spielen im Unterricht zu brechen.

Die eigene Welt konstituiert wie oben beschrieben jedoch nicht eine „Reise ohne Wiederkehr“ oder einen Informationsverlust. Neue Eindrücke aus der Spielwelt werden zurück in die reale Welt gebracht und dort mit dem „Hirn des Alltags“ verarbeitet. Dieser Punkt sollte uns bei der Konstruktion unserer Spiele für den Unterricht in Erinnerung bleiben, da wir durch ihn nun einen weiteren Auftrag haben. Wir müssen unseren Spielen zwar erlauben eigene Welten zu kreieren, der Übergang in die Welt des Alltags sollte jedoch auch unterstützt werden.

Das Spielkonstrukt stellt sozusagen die Barriere zwischen den beiden Welten dar. Auch unsere Regeln sind darin enthalten. Erst diese Regeln formen aus einer Idee eine Spielwelt.

Spielerisches Verhalten ist kein Nebenprodukt des Spielens, sondern gibt Lernenden die Möglichkeit schon bekannte Inhalte vollkommen neu zu erleben. Es gibt Lehrenden die Möglichkeit der Einsicht auf neue Seiten ihrer Schüler. Dadurch öffnen sich eventuell neue Wege, den Lerninhalt in der Klasse zu präsentieren.

Wir merken schon, dass die Trennung von einem dieser Kriterien selbst für den Gebrauch im Rahmen dieser Arbeit sehr schwer fällt. Aus dieser Notwendigkeit heraus ergibt sich damit folgende Definition, welche keinen Anspruch auf Richtigkeit erhebt, für unseren Gebrauch in diesem Kontext jedoch ausreichend ist:

„Spiel ist eine durch intrinsische Motivation hervorgerufene oder weitergeführte Tätigkeit, die durch Rahmenbedingungen eine eigene Welt erschafft auf die sich alle Teilnehmer einigen."

Während die ursprüngliche Motivation zum Spiel in diesem Kapitel und bei Spielen im Mathematikunterricht allgemein in den meisten Fällen von der Lehrperson kommt, meint die hier beschriebene intrinsische Motivation diejenige, die nach diesem ersten Funken herrscht. Sie stellt quasi den Spaß oder die Bereitwilligkeit für das Spielen dar.

Verschiedene Spieltypen

Das bereits im Kapitel zu Definitionen erwähnte Buch „Das Spiel“ von Hans Scheuerl spricht nicht nur von der Schwierigkeit einer allumfassenden Definition und lässt es dabei beruhen. Scheuerl gibt anschließend eine Fülle von Unterscheidungen des Spiels[18]:

Muths unterscheidet nach dem Vorhandensein körperlicher Aktivität. Bei ihm gibt es „Bewegungsspiele“ und „Ruhespiele“.

Groos geht einen Schritt weiter und unterscheidet die eingesetzten Sinne, bei ihm fast analog zu Muths. So gibt es bei ihm die Verwendung von „sensorischen Apparaten“, also im Prinzip Ruhespiele, und „motorische Apparate“, das Pendant zu Bewegungsspielen. Er fügt jedoch noch Spiele mit der Betätigung von „höheren seelischen Anlagen“ hinzu.

Scheuerl erkennt diesen Unterteilungen an, dass sie nur fokussiert auf den jeweiligen Schwerpunkten seien. Würde der Fokus anders liegen würden die Grenzen der Aufteilungen verschwimmen und verschwinden. Hoffnungen setzt er in Walter Schultzes Kategorisierung, der die innere Motivation der Spielenden hinzufügt. So gibt es bei ihm „finite“ und „infinite“ Spiele. Finite Spielformen zielen dabei auf einen Abschluss ab, das Spiel ist von Anfang an begrenzt. Damit hat man eine Unterteilung nicht auf Faktoren basierend, welche von außen auf das Spiel eingreifen, sondern direkt aus dem Spielgebilde.

[18] Vgl. (Scheuerl, 1990), S.126-131

Doch auch diese Einteilung ist für Scheuerl unbefriedigend, stellt das Spielgebilde doch nur den Rahmen des Spiels dar. Dieser Rahmen könne für stark unterschiedliche Spiele gleich aussehen und damit kann diese Kategorisierung auch keinen Endpunkt darstellen.

Die beiden Gesichtspunkte der Einteilung, also einerseits die objektiv-bezogenen von beispielsweise Muths und andererseits die subjektiven Schultzes sollten in einer allumfassenden Kategorisierung beide vertreten sein. So eine Kategorisierung liefert Jean Château.

Bei ihm gibt es die ungeregelten Spiele, mit weiterer Unterteilung in auf Intelligenz basierte und auf Durchsetzungsvermögen setzende. Die zweite große Kategorie stellen die geregelten Spiele dar, mit einem nebeneinander und miteinander Spielen als Unterkategorien.

Wieder sieht Scheuerl diese Einteilung als problematisch, da sie den Wunsch nach einer befriedigenden Kategorisierung durch eine hohe Komplexität holt. Außerdem seien hier eingeordnete Spiele nicht immer als Spiel verwirklicht.

Zu Scheuerls eigener Kategorisierung gibt er sich von vornherein als geschlagen. Er nennt diese einen „Wegweiser“ und benutzt ihn um interessante Gesichtspunkte von Spielen zusammenfassend zu behandeln.

Klaus Kubes Buch „Spieldidaktik“ gibt uns eine andere Kategorisierung vor. Er bezieht sich vielmehr auf den pädagogischen Nutzen von Spielen, im Gegensatz zu Scheuerls psychologischen Ausführungen. Nichtsdestotrotz wurde eine psychologische Ansicht gewählt, da wir schon im Kapitel zu den Lerntheorien die Beiträge berühmter Psychologen auf das Lehren und Lernen gesehen haben.

Im Buch wird anfangs eine Motivation zur Einführung von Spielen in den Unterricht gegeben, die historische Tatsachen aufzeigt[19]. Um das Jahr 1970 herum gab es demzufolge einen wahren Bildungsschock in den Vereinigten Staaten, hervorgerufen durch den ersten von Menschenhand gemachten Satelliten der um die Erde kreiste, namentlich Sputnik 1. Damit fing das große „Space Race“ an, und der Gewinner würde durch das Bildungsniveau des Landes als einen der größten beitragenden Faktoren entschieden werden. Für professionelle Lehrpersonen sicher anfangs ein Grund zur Freude, wurde doch endlich das Licht auf das Bildungssystem geschienen. Somit braucht es uns auch nicht mehr wundern, dass so viele amerikanische Psychologen die gängigen Lerntheorien mitbegründet haben. Das Licht schien und deckte auf, und zwar das stark vernachlässigte Bildungsniveau ganzer sozialer Schichten. Wie für diese Zeit so üblich machten die USA damit den ersten Schritt, und europäische Staaten folgten. Der Konsens war klar: Menschliches Leben hatte sich in den letzten Jahrzehnten stark verändert, während das Bildungssystem steif geblieben ist. Neue Einsichten mussten her, vor

[19] Vgl. (Kube, 1977), S.14-17

allem das Curriculum bedarf einer großen Veränderung. Dieses neue Curriculum brachte aber die Notwendigkeit einer neuen Art des Vermittelns mit sich. Anfangs wurde sich an behavioristische Lerntheorien gehalten, doch wie Kube schreibt[20]:

„Sollen in erster Linie Qualifikationen erworben werden, durch die der Mensch befähigt wird, sich Veränderungen seiner Umwelt nicht nur anzupassen, sondern sie vor dem Hintergrund seiner biographischen Identität auch selbst zielgerichtet zu steuern, können Medien nicht weiterhelfen, die ... Anpassung an und Nachvollzug von vorgegebenen Handlungs-, und Verhaltensstrukturen erwarten."

Die Medien die Abhilfe versprechen sind offener, auf das Individuum gerichtet. Kube gibt hier eine Liste, die diese erfüllen sollen, ausgehend von Witterns und Mosers Werken. Demnach sollen sie eine offene Formulierung der Lerninhalte beinhalten, sowie ein alternatives Lernangebot. Auch Zielkonflikte sollen durch diesen neuen Lehrplan hervorgerufen werden. Spiele fanden in diesen neuen, offenen Lehrmethoden durchaus ihren Platz, doch mussten sie zuerst didaktisch aufbereitet werden.Kube gibt uns diese und diskutiert dabei seine drei verschiedenen Spielformen:

[20] (Kube, 1977), S.16f

- Das Lernspiel[21]

  Zuerst ein Beispiel für ein solches Spiel aus Kubes Buch, inhaltlich für den Mathematikunterricht abgewandt:

  „Zuordnung von Begriffen und Daten“

  Funktionen und ihre (möglichen) Eigenschaften werden von der Lehrperson auf die Tafel gezeichnet. Die Aufgabe der Lernenden ist es nun, die Begriffe aus den zwei Spalten miteinander zu verknüpfen.

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2$	Monoton steigend
$f(x) = -x + 5$	Streng monoton steigend
$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + 2 & für\ x \geq 0 \\ 2 & für\ x < 0 \end{cases}$	Streng monoton fallend

  Lernspiele sind Spiele die auf die Vermittlung bestimmter Begriffe, Fakten und deren Zusammenhänge verwendet werden. Dabei wirken die Regeln selber, oder das Spielkonstrukt, wenn wir der Beschreibung des Spiels von Fritz[22] folgen, als didaktisches Element. Diese Spiele weisen, so Kube, jedoch auch ein gewisses Maß an Spielverhalten auf, dass sich durch Selbstbestimmung und Eigentätigkeit äußert. Dadurch geben diese außerdem die Möglichkeit von Spannung. Wer sich falsch entscheidet, kann verlieren.

[21] (Kube, 1977), S.38-62
[22] (Fritz, 2004)

Er weist aber weiters darauf hin, dass sich trotz dieser Freiheiten der Verlauf der Spiele selber fast immer gleich äußert und diese auch relativ gleich enden. Die exakte Vorgabe der Rahmenbedingungen gepaart mit doch sehr einheitlich beschrittenen Wegen würden zu stark an den Behaviorismus erinnern und daher keine offene Lernsituation konstituieren.
Da wir hier nicht dogmatisch an solche Lernformen gebunden und Lernspiele durchaus nach der oben gegebenen Definition als Spiele zu beschreiben sind, hält diese Kritik nicht von der Verwendung solcher Spielformen ab. Vor allem für die Vermittlung eher „bürokratischer" Inhalte kann das Lernspiel als Auflockerung und zur Methodenerweiterung dienen.

Scheuerls Benutzung des Lernspiels ist vor allem dort, wo bereits bekannte Inhalte wiederholt und geübt werden sollen[23]. Auch zur Verknüpfung von Lernmaterial sei diese Spielform zu verwenden, nicht jedoch um neue Inhalte zu unterrichten. Obwohl das Beispiel von oben ihm damit recht gibt existieren doch zahlreiche Spiele die diese Norm brechen können. Wir können statt der Fachbegriffe von oben beispielsweise alltägliche Bezeichnungen verwenden und im weiteren Verlauf der Unterrichtsstunde diese Alltagsbegriffe durch ihre Fachbegriffe ersetzen.

[23] Vgl. (Scheuerl, 1990), S.156-174

- Das Rollenspiel[24]

  Es ist klar, dass es sich bei Rollenspielen unter anderem darum dreht, soziale Kompetenzen zu erwerben. Doch auch für den Mathematikunterricht kann diese Spielform eingesetzt werden.

  Kube teilt Rollenspiele weiters auf in traditionelle und revidierte Formen, wobei die erste einen starren sozialen Rahmen aufstellt. Damit erzeugt diese Spielform Menschen die der schon existierenden Form folgen und in weiterer Folge eine, wie er es bezeichnet, „undynamische Gesellschaft". Werfen wir einen Blick in den derzeitigen Lehrplan der Oberstufe für die Mathematik so grüßen uns komplett andere Anforderungen. Lernende sollen problemlösend und reflektierend arbeiten (Komplexitätsdimension), sollen die Fähigkeit zu kritisch-argumentativem Arbeiten besitzen. Traditionelle Rollenspiele mit ihrem Versuch einer objektiven Darstellung von Menschen sind daher aktiv zu vermeiden, es sei denn man repräsentiert in den vorher verteilten Rollen wahre Objektivität. Diese ist in der Mathematik zumindest auf dem Verständnisniveau möglich, jedoch sollte man sich hier an das Grundmotto hinter dem Spiralprinzip erinnern: Der derzeitige Stand der Forschung ist auch unseren Schülern in aufbereiteter Form zugänglich. So stehen traditionelle Rollenspiele und ihr Sinn in heutigen Lernumgebungen in einem schlechten Licht.

[24] (Kube, 1977), S.64-99

Revidierte Rollenspielformen geben uns hier mehr Hoffnung auf Einsatz. Kube beschreibt sie folgendermaßen[25]:
„Revidierte Rollenspielformen versuchen Verhaltensqualifikationen zu vermitteln, die ein hohes Maß an Kreativität, Autonomie, Intelligenz und Urteilskraft vom Menschen erwarten"
Weiters gibt er Lernziele vor, die durch Rollenspiele behandelt werden können. Für uns interessant sind dabei die kognitiven Lernziele. Zu diesen zählt er einerseits den *„Erwerb von Fähigkeiten und Fertigkeiten in Form von Wissen und Begriffen"* und andererseits den *„Erwerb sprachlicher Kompetenz"*.[26]
Meint man mit sprachlichen Kompetenzen auch die Verwendung von Fachbegriffen so haben wir hier einen Treffer. Unsere gewünschten Lernziele im Mathematikunterricht die dem Lehrplan folgen sollten also durch revidierte Rollenspielformen umgesetzt werden.

Wie soll man sich solche revidierten Rollenspiel nun vorstellen? Im Prinzip bedeutet das nichts anderes, als das Rollenspiel durchzuspielen und nachher außerhalb der Spielwelt die Ergebnisse zu diskutieren und Verbesserungsvorschläge zu machen. Die Rolle der Lehrkraft sollte dabei sein, neue Wege aufzuzeigen um die Kreativität und den Bruch der Norm auch in

[25] (Kube, 1977), S.99
[26] (Kube, 1977), S.88

Lernenden zu motivieren. Anschließend werden die gemeinsam erarbeiteten revidierten Verhaltensweisen wieder ausgespielt.

- Das Planspiel[27]

Der Begriff Planspiel umfasst eine große Anzahl von Spielen, die stark variieren.Während man Gemeinsamkeiten feststellen kann ist der genaue Rahmen jedoch noch immer ein Punkt der Diskussion. Wir folgen hier Kubes Annahme, dass ein Planspiel unabhängig von der genauen Definition folgende didaktische Ziele erreichen soll [28]:

Das Planspiel soll typische Verhaltensweisen antrainieren. Für uns sind damit vor allem professionelle Verhaltensweisen gemeint. Dies kann im Rahmen des Behaviorismus interpretiert werden, wenn diese Antworten auf Fragen sehr eng gestrickt sind. Wir können diesen Punkt aber auch anders auslegen und direkt auf die Problemlösefertigkeit der Lernenden hinzielen. Ein großes, unlösbar wirkendes Problem in viele kleine lösbare zu unterteilen wäre so eine klassische Verhaltensweise in der Mathematik und Wissenschaft allgemein.
Weiters soll das Planspiel durch die Notwendigkeit von Entscheidungen während des Spiels fördern. Wie wir bereits im

[27]Vgl. (Kube, 1977), S.102-152
[28] (Kube, 1977), S.104

Kapitel zur Definition des Spielbegriffes gesehen haben sind Entscheidungen aber eine Grundvoraussetzung für Spiele im Allgemeinen. Erschaffen wir ein Spiel so ist es nicht zu vermeiden, dass dieser Punkt erfüllt wird.

Der dritte Punkt spielt auch auf etwas an das wir schon mehrmals in dieser Arbeit erläutert haben. Das Planspiel will die Entscheidung über die Lerninhalte in die Hände der Lernenden legen, zumindest teilweise. Hier meint Kube aber nicht die Bestimmung über die Lerninhalte selber, sondern vielmehr die Art der Diskussion über sie.
Kube bezeichnet das Planspiel weiters als :
„…Eine gleichrangige Synthese von freiem Spiel und geplantem Unterricht.“[29]
Unser Fokus bei der Erschaffung der Spiele vom Typ Planspiel soll auch darauf abzielen die Lerninhalte und die Freiheit von Spielern als gleichrangig zu betrachten. Die relativ offene Form dieser Spielart lässt sehr leicht einen Übergang in ein unstrukturiertes Freispiel zu, wenn die Lehrperson nicht eingreift. Doch ein Eingreifen an der falschen Stelle kann zur Auflösung der Spielwelt führen, was das Spiel an sich nichtig macht. Hier ist während dem Spielvorgang Feingefühl gefragt. Bevor die Unterrichtseinheit jedoch beginnt sollten Planspiele eben aus diesem Grund mit deutlichen Zielvorgaben versehen werden.

[29] (Kube, 1977), S.153

Andere Faktoren

Ziel dieses Kapitels ist es, Faktoren beim Einsatz im Unterricht aufzudecken die sich sowohl positiv als auch negativ auswirken können. Wir erhoffen uns von diesem Kapitel die negativen Faktoren auszumerzen und wenn möglich in positive umzuwandeln. Positive Faktoren werden genauer beleuchtet und es wird versucht diese zu stärken. Dabei geht es hauptsächlich um die tatsächliche Umsetzung in einer realen Situation.

Das Thema des Regeln-lernens

Wird der Einbau eines Spiels in eine Unterrichtsstunde geplant, so stehen Lernende vor einem unverrückbaren Kostenfaktor: Der Unterrichtszeit. Um die Spiele tatsächlich zu spielen, muss zumindest bei der Erstanwendung in einer Klasse das Regelwerk erklärt werden. Diese aufgebrachte Zeit kann stark variieren, in den meisten Fällen ist sie jedoch direkt von der wie Meyer es beschrieben hat „echten Lernzeit“ abzuziehen[30]. Nun gibt es allgemein zwei Fälle die eintreten können:

- Das Regelwerk selber besteht nicht aus Lerninhalt
  Lehrende müssen in dieser Situation abwägen. Ist die für die Erklärung der Regeln aufgewandte Zeit den Verlust der echten Lernzeit wert? Vielleicht gibt es empirische Befunde, auf die man sich stützen kann, allermeistens jedoch ist es entweder ein Sprung ins Blaue oder basierend auf Vorerfahrungen mit dem jeweiligen Spiel. Die Vorerfahrungen wiederum können sich auch von Klasse zu Klasse anders ausprägen. Jedenfalls ist der Zeitaufwand für das Weitergeben der Regeln meistens ein Störfaktor.
  Kann man ihn also eliminieren? Dazu ein Vorschlag:
  Ist das Regelwerk so komplex, dass man mehr als ein bis zwei Minuten für die Erklärung braucht kann es im Vorhinein beispielsweise in Textform an die Lernenden weitergegeben werden. Die Regeln werden also von der Lehrkraft

[30] Vgl. (Uni-Frankfurt.de, 2021)

zusammengeschrieben und als Quasi-Hausübung den Lernenden in der Vorstunde mitgegeben. Das funktioniert natürlich nur, wenn die notwendigen Materialien entweder leicht selber herzustellen oder nicht von großer Wichtigkeit für den Spielverlauf sind.
Diese Methode hat auch mehr Vorteile als nur die Zeitersparnis. Lernende können sich gegenseitig dabei helfen die Regeln zu verstehen und ihre kompetitive Natur kann unter Beweis gestellt werden. Wer sich gut auf das Spiel vorbereitet hat, kann sich über eine erhöhte Siegeschance freuen. Im besten Fall spielen Lernende das Spiel aus Interesse sogar vorher selbstständig an, was für die Lehrkraft wieder ein hohes Interesse am Spiel selbst bestätigt. Jedenfalls ist dadurch ein gewisses Maß an Kontrolle für die Motivation gegeben.

- Das Regelwerk besteht zu teilen oder sogar komplett aus Lerninhalt
  Haben wir ein, laut Kubes Einteilung, Lernspiel vorliegen, bei dem die Regeln selber bereits das zu Lernende sind können diese beispielsweise mit einer Sektion Frontalunterricht beigebracht werden. Die echte Lernzeit leidet bei solchen Arten von Spielen zwar nicht, jedoch verwenden wir Spiele im Unterricht meistens, um von solchen Unterrichtsmethoden wegzugehen und durch offenere Lernangebote eine Abwechslung zu bieten.
  Die Aufgabe der Lehrkräfte ist es also wiederum abzuschätzen. Wird ein Spiel geplant mit dem Ziel der Abwechslung der

Unterrichtsmethoden, so ist bei dieser Art des Spiels abzuschätzen, wie lange die Frontalunterrichtsphase anhalten wird und ob ein Spiel welches vom ersten Punkt oben beschrieben wird nicht vorzuziehen ist.

Notwendige Materialien

Es ist leider ein Fakt, dass eine Lehranstalt nicht unbegrenzte Ressourcen zur Verfügung hat. In vielen Fällen wird die Lehrkraft für die Beschaffung der Materialien, die für ein Spiel benötigt werden, aus eigener Tasche zahlen. Dabei sind nicht nur monetäre Faktoren gemeint, sondern auch zeitliche, dieser Punkt verknüpft sich also mit dem vorigen. Ein wichtiger Faktor der jedoch wenig Beachtung in der Fachliteratur findet, ist also die Möglichkeit zur Umsetzung geplanter Spieleinheiten.

Im besten Falle brauchen unsere Spiele für den Mathematikunterricht sehr wenige Ressourcen um sie umsetzen zu können. Um bei der Bewertung und Diskussion der Spiele im folgenden Kapitel eine übersichtliche Kategorisierung für notwendige Materialien zu haben wird folgende Kategorisierung eingeführt:

- M0Z0
  Diese Kategorie beschreibt Spiele, die keine zusätzlichen Materialien von Lernenden und Lehrenden benötigen, um sie im Vollen zu spielen. Wir gehen dabei davon aus, dass Papier und Stifte vorhanden sind. Außerdem ist die benötigte Zeit für das Vorbereiten des Spiels sehr gering. Wir müssen keine langen Erklärungen der Spielregeln geben oder alle Tische im Klassenraum verschieben.
  Wo immer es möglich ist, sollte diese Kategorie angestrebt werden.

- M1Z1

  Wir brauchen hier Materialien, die zwar leicht zu erwarten sind, jedoch nicht selbstverständlich in jeder Mathematikstunde der Oberstufe von den Lernenden oder Lehrenden mitgebracht werden. So etwas wie Zirkel, spezielle Stifte oder Bastelmaterial fällt in diese Kategorie. Eine Bekanntgabe notwendiger Materialien ist also im Vorhinein erforderlich. Lernende brauchen eventuell einen Laptop um etwas herzuzeigen oder müssen Spielfiguren bereitstellen.

  Der Zeitaufwand für die Vorbereitung des Spiels hält sich auch in Grenzen. Vielleicht müssen wir Tische verschieben oder eine längere Anleitung geben. Fünf Minuten soll hier der zeitliche Richtwert sein.

- M2Z2

  Hier ist nicht nur der notwendige Materialaufwand sehr hoch, sondern auch die Vorbereitungszeit. Wir müssen um die zehn Minuten oder länger die Spielregeln erklären, können damit rechnen, dass viele Lernende nicht auf Anhieb alle verstehen oder müssen Räume wechseln, um das Spiel durchzuspielen. Falls die Spielregeln selber nicht Teil des Lerninhaltes sind, ist hier wirklich die Frage zu stellen, ob sich dieses Spiel in irgendeiner Art und Weise für den Lernerfolg der Schüler lohnt. Vielleicht gibt es empirische Studien als Beweis, doch wie schon gesagt sind diese außerordentlich selten.

Der hohe Materialaufwand kann hier entweder nur von der Lehrperson, nur von den Lernenden oder beiden getragen werden.

- Mischkategorien
  In vielen Fällen sind Zeit-, und Materialaufwand nicht gleichermaßen besetzt. Dafür gibt es die Mischkategorien, deren Bezeichnungen sich an die vorigen halten. So wäre die Kategorie M0Z1 mit wenig bis gar keinem Materialaufwand und mit mittelmäßigem Zeitaufwand gleichzusetzen.

Vor allem die Materialkosten werden von Lehranstalt zu Lehranstalt und vielleicht auch innerhalb dieser variieren. Daher wird hier keine definitive Zahl dazugeschrieben. Die Lehrpersonen müssen also selber, klassenweise individualisiert, abschätzen, wie Spiele in ihre Materialkategorie einzuordnen sind. Trotzdem wird eine Vorschlagkategorie bei der Diskussion der Spiele im nächsten Kapitel gegeben, basierend auf persönlichen Erfahrungen.

SPIELE-KAPITEL

Wir haben uns mittlerweile sowohl mit den didaktischen als auch mit den spieltheoretischen Grundlagen auseinandergesetzt. In diesem Kapitel ernten wir nun endlich die Früchte und bewerten diese unter den vorgestellten Aspekten. Hier wird die tatsächliche Vereinigung von Mathematik und Spiel präsentiert, und zwar in Form von Spielideen oder fertigen Spielen die im Unterricht der Oberstufe zum Einsatz kommen können. Dabei wird zuerst das Spiel in seinen Grundzügen vorgestellt, danach werden Grundvoraussetzungen und die konkrete Einbindung in eine Lehrstunde oder eine Gestaltung einer kompletten Einheit gegeben. Anschließend werden die Spiele unter den Gesichtspunkten guten Unterrichts und guter Spiele bewertet und, wenn möglich oder angebracht, Erweiterungen vorgestellt. Zum Abschluss werden die Spiele unter dem hier erworbenen Wissen diskutiert.

Ableitungs-Stich

Dieses Spiel ist nach einer originellen Idee konzipiert.

Ziel des Spiels:

Bei diesem Spiel geht es darum das Wissen über Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln auf ein schnelles Kartenspiel anzuwenden. Spieler versuchen sich gegenseitig auszustechen und dadurch Punkte zu bekommen.

Spielregeln:

Ableitungs-Stich wird als Gruppe mit drei bis fünf Personen gespielt.

Dieses Spiel braucht zwei Stapel unterschiedlicher Karten. Ein Stapel enthält dabei die „Funktionen"-Karten, der andere die „Zahl und Relation"- Karten.

Die Karten vom Stapel „Zahl und Relation" bleiben unaufgedeckt in der Mitte. Auf ihnen ist, wie der Name schon verrät, eine Zahl und eine Relation abgebildet.

Die Karten vom Stapel „Funktionen" werden, nachdem die erste Karte aufgedeckt wurde unter den Mitspielern gleichmäßig aufgeteilt. Auf ihnen sind Gleichungen von Polynomfunktionen abgebildet.

Zu Beginn der ersten Runde wird die oberste Karte vom „Zahl und Relation"-Stapel aufgedeckt. Die so aufgedeckte Zahl ist die „Vergleichszahl". Alle Mitspieler versuchen nun die Ableitungen ihrer erhaltenen Funktionen auf den „Funktionen"-Karten im Kopf zu bilden. Falls das nicht funktioniert ist Spielern hier bei jeder Runde die notwendige Zeit zu geben, diese auf einem Zettel zu bilden, der vor den Mitspielern geheim gehalten werden muss. Hier empfiehlt es sich weiters, Platz auf den „Funktionen“-Karten freizulassen, damit die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion als Hilfe notiert werden kann. Anschließend wird der Funktionswert der Ableitung an der Stelle gebildet, die durch die Zahl auf der „Zahl und Relation“-Karte vorgegeben wird.

Dieser so erhaltene Wert wird nun mit der „Zahl und Relation“-Karte im Kopf verglichen, um eine Aussage zu erhalten. Dazu ein Beispiel:

Auf der „Zahl und Relation“-Karte sind die Zahl 3 und die Relation „>“ abgebildet. Die Aussage ist also „3 > a“, wobei a der jeweilige Funktionswert an der Stelle des Arguments 3 ist.

Ist die Aussage wahr, so können Spieler ihre Handkarte ablegen und der Funktionswert wird nun zur neuen Vergleichszahl, das Relationszeichen und das eingesetzte Argument bleiben die ganze Runde erhalten. Dabei gilt: Wer am schnellsten hinlegt, bekommt einen Punkt, also gilt bei gleichzeitigem Ablegen immer die unterste, sofern korrekt gelegt wurde. Die Runde endet, wenn niemand mehr eine Karte ablegen kann. Alle „Funktionen“-Karten werden eingesammelt und gemischt.

Eine neue Runde beginnt genau gleich wie die erste. Die oberste Karte vom Stapel „Zahl und Relation“ wird aufgedeckt und die Karten vom Stapel „Funktionen“ ausgeteilt.

Ein kurzes Beispiel zum Ablauf einer Runde:

Ich erhalte zwei „Funktionen“-Karten auf denen die Funktionsgleichungen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ stehen.

Die Ableitungen der Funktionen werden nun im Kopf berechnet und deren Funktionsgleichungen entweder gemerkt oder auf den Karten notiert, wobei es den Lehrenden überlassen ist hier die für die jeweilige Klasse richtige Variante zu wählen. In diesem Fall sind dies also $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = 3x^2$.

Die „Zahl und Relation“-Karte wird aufgedeckt und zeigt „2 <“.

Nun wird die Information auf der „Zahl und Relation“-Karte benutzt: Der Funktionswert an der Stelle 2 wird bei beiden Ableitungsfunktionen im Kopf berechnet und die Aussagen werden auf ihre Richtigkeit überprüft. Hier also $2 < f'(2)$ und $2 < g'(2)$. Beide Aussagen sind wahr, ich könnte also frei wählen welche Karte ich ablege, um einen Punkt zu bekommen. Will ich allerdings die Möglichkeit haben, zwei Punkte zu bekommen, so muss ich die richtige Karte zuerst ablegen.

Wird die Karte mit der Funktionsgleichung $g(x) = x^3$ zuerst abgelegt, so wird die Zahl auf der „Zahl und Relation“-Karte mit dem gerade berechneten Funktionswert für das Bilden der Aussage abgelöst, in diesem Fall also $g'(2) = 12$. Wie oben beschrieben bleibt die Stelle des gesuchten Funktionswertes aber gleich, hier 2. Das würde bedeuten, dass ich nun die Aussage $g'(2) = 12 < 4 = f'(2)$ auf Richtigkeit überprüfen muss, wenn ich die Karte mit der

Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ nachher ablegen will. Da diese Aussage jedoch nicht wahr ist, kann ich die Karte in dieser Situation nicht mehr ablegen und habe mir selber einen möglichen Punkt geraubt.

Implementierung in eine Unterrichtsstunde:

Dieses Spiel setzt Vorkenntnisse über Ableitungsregeln voraus, der Schwierigkeitsgrad ist aber so anpassbar, dass es Verwendung direkt nach einer Stunde finden kann, in der die ersten Regeln vorgestellt wurden.

Die Lehrkraft erklärt zuerst die Spielregeln. Dies geschieht am besten dadurch, dass sie selber in die Rolle eines Spielenden geht und eine Vorzeigerunde alleine vorspielt. Danach müssen eventuell Tische umgestellt werden, da das Spiel in größeren Gruppen gespielt werden muss. Dazu muss auch eine Gruppeneinteilung gemacht werden. Nach der Einführung fungiert die Lehrkraft als Schiedsrichter, wenn notwendig. Um eine Sicherung des Lernerfolges zu überprüfen sollte weiters ein Auge auf den Spielvorgang der Gruppen geworfen werden.

Die Lernenden hören anfangs der Einweisung zu und helfen anschließend, falls notwendig, bei der Umstellung der Tische und Stühle. Danach kann das Spiel beginnen.

Erweiterungsmöglichkeiten:

Wie schon oben beschrieben kann der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben (fast) beliebig variiert werden. Beim Anpassen sollte jedoch daran gedacht werden, dass dieses Spiel am besten schnell gespielt wird.

Durch diese Anpassung gibt es zwei Herangehensweisen: Die Lehrkraft bildet die Gruppen selber oder lässt die Lernenden frei entscheiden. Die erste Methode hat den Vorteil, den Schwierigkeitsgrad gezielter auf die Spielgruppen abstimmen zu können, sofern die Lehrkraft danach aufteilt.

Es besteht weiters die Möglichkeit, neue Kartensets zu bilden. Ein Set kann dabei beispielsweise nur auf Winkelfunktionen basieren, es kann ein Set nur für die Potenzregel oder mit dem Fokus auf die Summen/Produkt/Quotientenregel vorbereitet werden und vieles mehr.

Wer seine Lernenden mit dem Planungsaspekt dieses Spiels fordern will kann auch Karten einführen, die den „Zahl und Relation“-Stapel beeinflussen, also beispielsweise ein „>“ mit einem „<“ tauschen. Da Handkarten über die Runde hinweg als Vorrat an potenziellen Stichen, und damit potenziellen Punkten, zu sehen sind müssen Spieler nun immer auf der Hut vor sich verändernden Grundregeln sein.

Auch die Handkarten selber können durch Beimischen neuer Karten manipuliert werden. „Ein Spieler deiner Wahl wirft eine zufällige Karte aus seiner Hand ab“ oder „Ein Spieler deiner Wahl zieht zwei Karten vom „Funktionen“-Stapel“ sind alles mögliche Erweiterungen. Damit wird das Spiel selber jedoch komplizierter, und der Fokus liegt irgendwann nicht mehr beim Üben der Ableitungsregeln, sondern vielmehr in der Strategie und Reihenfolge des Ablegens.

Zu sehr sollte man dieses Spiel nicht verkomplizieren, da wie gesagt noch immer hauptsächlich Ableitungsregeln geübt werden sollen und dies eben einen Großteil der Spielzeit in Anspruch nehmen sollte. Auch muss man sich davor hüten, das Spiel durch beispielsweise unüberlegtes Hinzufügen von Karten die den „Zahl und Relation“-Stapel manipulieren unspielbar zu machen.

Es besteht auch die Möglichkeit, die kompetitive Natur des Spiels komplett zu eliminieren. In dieser Version spielen alle Lernenden mit offenen Handkarten und versuchen nicht, sich gegenseitig zu übertrumpfen, sondern alle Handkarten loszuwerden. Dazu werden kleinere Spielgruppen zu je maximal drei Mitspielern gebildet. Die Mitspieler versuchen nun miteinander ihre Handkarten zu sortieren, behalten dabei jedoch die eigene Hand.

Eine auch ästhetische Erweiterung wäre eine Anpassung der Kartengröße an gängige Spielkarten. Diese können foliert und anschließend mit den auf Papier ausgedruckten neuen Karten für dieses Spiel überdeckt werden. Dies erhöht die Spielbarkeit, da oft viele Mitspieler gleichzeitig ihre Karten ablegen wollen und dadurch Diskussionen entstehen können, vor allem wenn man nur Papier verwendet. Auch das Mischen und Austeilen wird erleichtert, und dadurch mehr Zeit zum echten Lernen und Spielen gewonnen.

Abbildung 2 Folierte Karten, bereit zum spielen! Hier ist ein Probefeld eingezeichnet, in das Spieler die Gleichung der Ableitungsfunktion eintragen können.

Diskussion:

Zuerst überprüfen wir, ob es sich bei diesem Spiel auch wirklich um eines handelt. Rufen wir uns unsere ausreichende Definition noch einmal in Erinnerung:

„Spiel ist eine durch intrinsische Motivation hervorgerufene oder weitergeführte Tätigkeit, die durch Rahmenbedingungen eine eigene Welt erschafft auf die sich alle Teilnehmer einigen.“

Wir können hier leider keine Auskunft darüber geben, ob dieses Spiel in jeder Klasse Spaß macht. Das wird sich natürlich bei den anderen hier vorgestellten Spielen fortsetzen. Was wir aber machen können, ist den Rest der Definition abzugleichen.

Das Spiel erstellt definitiv ein Spielkonstrukt, welches eine eigene Spielwelt umringen kann. Es gibt uns Rahmenbedingungen vor, an die sich die Teilnehmer halten müssen. Diese Rahmenbedingungen sind kein Teil unserer Alltagserfahrung, sie schließen also eine eigene, neue Welt ein. Wir haben somit die erste Hürde überwunden: Das vorgestellte Spiel darf sich tatsächlich so nennen, vorausgesetzt es macht Spaß.

Wie sieht es nun mit der Kategorisierung aus? Diskutieren wir dazu zuerst den notwendigen Zeit-, und Materialaufwand. Wir erinnern uns an die eingeführten Kategorien: M0Z0, M2Z1, etc.... Was würde auf dieses Spiel zutreffen?

Der Materialaufwand ist, zumindest bei der Basisform des Spiels, sehr gering. Lehrpersonen drucken vorher erstellte Karten auf Papier aus und schneiden anschließend aus. Lernende brauchen sogar gar nichts aufwenden. Beim Zeitaufwand verhält sich dieses Spiel ähnlich anfordernd. Die Einführung kann erfahrungsgemäß schnell vollzogen werden, danach müssen nur eventuell Tische und Stühle umgestellt werden. Wir würden dieses Spiel also der eingeführten Kategorien folgend als M0Z1 bezeichnen. Es ist damit relativ einfach umzusetzen. Natürlich ändert sich dies bei den vorgestellten Erweiterungen. Folierte Karten schlagen aufs Budget und komplexere Spielregeln erhöhen die benötigte Vorbereitungszeit. Die Erweiterungen sollten daher eher nur angewendet werden, wenn sich das Spiel an Beliebtheit erfreut und ein Lernerfolg sichtbar ist.

Wirft man einen Blick auf die im gleichnamigen Kapitel dargestellten Kennzeichen guten Unterrichts von Meyer so gibt es hier vieles auf das Lehrende achten müssen.

Unter dem Punkt „Lernförderliches Klima“ wurde dargestellt, dass die gemeinsame Gestaltung des Unterrichts ein wichtiger Punkt sei, der auch hier Anwendung finden kann. Es geht dabei aber nicht um die Frage, ob dieses Spiel gespielt wird. Aussagen darüber können Lernende nur tätigen, wenn sie bereits gespielt haben. Vielmehr geht es um die Varianten des Spiels. Wollen die Schüler eine kompetitive Form oder bevorzugen sie die Zusammenarbeit? Was sind die zu gewinnenden Preise? Welches Kartenset soll verwendet werden? Die Antworten auf diese Fragen können von Lehrenden und Lernenden gemeinsam erarbeitet werden.

Auch das sinnstiftende Kommunizieren kann ausgebaut werden. Gibt es Vorerfahrungen mit Kartenspielen? Vielleicht haben Schüler ja ein foliertes Kartenspiel dabei oder zu Hause.

Zum Punkt des intelligenten Übens können wir überprüfen, ob und wie wir Meyers Hilfestellungen erfüllt haben. Selbsttätigkeit ist in der Ursprungsform des Spiels vorhanden, bei der kooperativen Variante jedoch muss diese von der Lehrperson überprüft werden. Zeitnahe Selbstkontrolle ist hier schwer umzusetzen, da das Spiel generell sehr schnell abläuft. Kontrolle innerhalb der Gruppe gibt es aber. Freiwilligkeit und hohes Interesse sind leider zwei Punkte die sich nur während oder nach dem Ersteinsatz dieses Spiels zeigen können.

Wie wäre die Sicht aus den verschiedenen didaktischen Lernmethoden?

Auf den ersten Blick fällt dieses Spiel sicher in den Behaviorismus. Wir geben einen Input („Funktionen“- und „Zahl und Relation“-Karten) und konditionieren die Lernenden durch Wiederholung auf einen gewünschten Output (ableiten der Funktion, Zahlenwert einsetzen). Doch es geschieht viel mehr während des Spiels.

Betrachtet man das Spiel aus dem Blickwinkel des Kognitivismus, so werden neue Eindrücke klar: Die Lehrperson rückt mehr in das Rampenlicht und sollte, der Theorie entsprechend, unterstützend wirken. Dazu müssen die Funktionen entsprechend gewählt werden und das Spiel an Tempo verlieren. Dies kann vereinzelt durch besonders trickreiche Funktionen geschehen, sollte den Spielablauf jedoch nicht zu sehr stoppen.

Wollen wir das Spiel aus der Sicht des Konnektivismus lehren, so kann unter anderem das Design der Karten komplizierter gemacht werden oder ein „Joker“ eingeführt werden, der um Rat gebeten werden kann.

Eine wichtige Fehlvorstellung ist durch dieses Spiel eventuell richtigzustellen. Wenn man Ableitungen als lokale Änderungsrate betrachtet glauben viele Lernende daran, dass diese Rate fixiert ist. Durch das konstante Einsetzen neuer Zahlenwerte arbeitet dieses Spiel jedoch gegen diese Vorstellung.

<u>Komplexe-Zahlen-Carcassonne</u>

<u>Ziel des Spiels:</u>

Das Spiel basiert auf dem Legespiel „Carcassonne“ von Klaus-Jürgen Wrede, in Deutschland publiziert von der Firma Hans im Glück.

Durch geschicktes Legen verschiedener Plättchen bilden Spieler geometrische Figuren, die bei Fertigstellung Punkte geben.

<u>Spielregeln:</u>

Die Materialien für dieses Spiel bestehen hauptsächlich aus quadratischen „Felder“-Karten, welche eine komplexe Zahl entweder in Normalform oder Polarform abgebildet haben. Auf der Rückseite der Karten ist dabei ein Koordinatensystem mit Urpsrung in einer der Ecken eingezeichnet. Die Abszisse entspricht dabei dem Realteil und die Ordinate dem Imaginärteil. Außerdem wird ein großes Blatt Papier bereitgestellt, welches ein Raster abbildet, dessen Zellengröße den „Felder“-Karten entspricht.

Spieler ziehen nun ringsum Karten aus einem Beutel und stellen die komplexe Zahl auf der Rückseite beginnend beim Ursprung entweder als einen Vektor dar, wenn die Angabe in Polarform war, oder zwei Strecken deren Länge dem Real-, und Imaginärteil in der Normalform entsprechen.

Dabei muss die Strecke die mit dem Realteil korrespondiert einen Eckpunkt im Ursprung haben. Der andere Eckpunkt liegt dem Realteil der imaginären Zahl entsprechend auf der Abszisse. Der Imaginärteil muss mit einem Eckpunkt immer an das Ende der Strecke für den Realteil gehängt werden, welches sich nicht im Ursprung befindet. Weiters ist diese Imaginärteil-Strecke parallel zur Ordinate.

Der Vektor hat seinen Startpunkt immer im Ursprung und seinen Endpunkt entsprechend bei den Koordinaten die dem Real-, und Imaginärteil der komplexen Zahl entsprechen.

Die Karten werden nach dem Einzeichnen der beiden Strecken oder des Vektors mit der Koordinatensystem-Seite nach oben auf das Gitter abgelegt. Dabei gilt:

- Die Karten können beliebig gedreht werden.
- Wenn neue Karten bereits abgelegte berühren müssen sie so abgelegt werden, dass die eingezeichneten Strecken oder Vektoren fortgesetzt werden.
- Karten dürfen auch dort abgelegt werden, wo sie keine bereits abgelegten berühren.
- Wenn hier von berühren die Rede ist, meint das die acht (!) Kartenplätze rings um den mittleren.

Auf diese Weise bilden die Spieler geometrische Figuren. Werden diese durch das Ablegen einer Karte geschlossen bekommt derjenige, der die letzte Karte für die jeweilige Figur abgelegt hat, Punkte die der Anzahl an Eckpunkten der Figur entsprechen.

Das Spiel endet entweder nach einer Zeitvorgabe oder wenn keine neuen Figuren mehr gebildet werden können. Der Spieler mit den meisten Punkten gewinnt.

Implementierung in eine Unterrichtsstunde:

Die Lernenden sollten über komplexe Zahlen und deren Darstellungsmöglichkeiten bereits Bescheid wissen.

Die Lehrkraft erklärt die Regeln mithilfe von Tafelbildern. Danach kann das mittlerweile schon bekannte Tische verstellen und das Einteilen der Gruppen, und damit auch das Spiel beginnen.

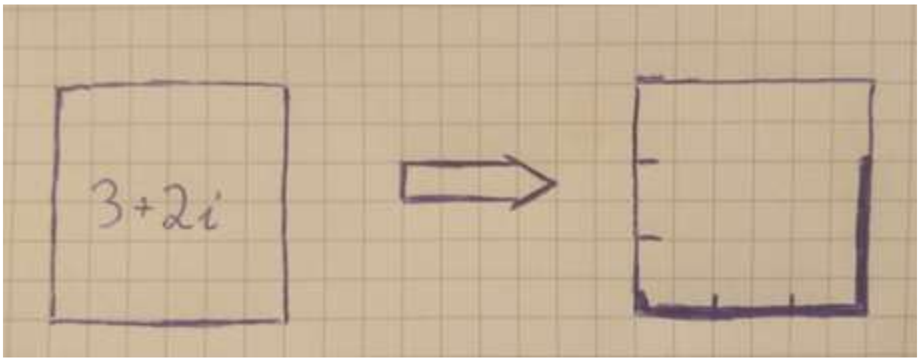

Abbildung 3 Beide Seiten eines Kärtchens, wobei die zwei Strecken auf der Rückseite schon eingezeichnet wurden

Erweiterungsmöglichkeiten:

Um das Spiel taktisch anspruchsvoller zu machen, kann noch mehr in die Richtung des Originalspiels gegangen werden. Alle Mitspieler erhalten eine bestimmte Anzahl an Spielsteinen, von denen sie jeweils einen in jeder ihrer Runden in eine unfertige Figur platzieren können. Dabei gilt, dass sich für eine bestimmte Karte entschieden werden muss, da im Vorhinein nicht gesagt werden kann was innerhalb und außerhalb einer fertiggestellten Figur sein wird. Außerdem dürfen die

Spielsteine nicht wieder selbstständig entfernt werden. Wer beim Abschluss der Figur die meisten Spielsteine innerhalb derer hat, bekommt die Punkte dafür zugeschrieben und seine Spielsteine zurück.

Diskussion:

An diesem Spiel erkennt man das Vorhandensein des Spiralprinzips sehr gut. Lernende haben sich bereits mit den Begriffen „ganze Zahlen“, „Koordinatensystem“ und „Strecke“ befasst. Bei Verständnisproblemen kann auf diese ausgebildeten Vorstellungen zurückgegriffen werden.

Als Kategorie für den Zeit-, und Materialaufwand wurde hier M0Z1 angepeilt. Lernende benötigen gar keine Materialien und die Vorbereitungszeit für dieses Spiel innerhalb der Stunde ist sehr gering. Leider ist die Vorbereitungszeit, die von der Lehrperson im Vorhinein notwendig ist vergleichsweise hoch. Je nach Größe des Feldes müssen zahlreiche Kärtchen mit passenden komplexen Zahlen hergestellt werden. Hier muss man darauf Acht geben diese Zahlen so zu gestalten, dass sie nachher auch zusammenpassend hingelegt werden können. Vor allem bei der Polarform müssen so vor dem Spiel eventuell Einigungen getroffen werden, die die Genauigkeit der Winkelangaben betreffen.

Welche Funktion bin ich?

Dieses Spiel folgt den Regeln des bekannten Spiels „Wer bin ich?“.

Ziel des Spiels:

Eine gegebene Funktionsgleichung soll von einem Spieler, der sie nicht kennt, richtig erraten werden. Dazu geben Mitspieler die Eigenschaften der Funktion an und versuchen diese dadurch zu beschreiben.

Spielregeln:

Klassisch wird dieses Spiel gespielt, indem die Person, die die Funktionsgleichung finden muss, ein Post-it mit eben dieser Funktionsgleichung auf die Stirn geklebt bekommt, sodass er selber diese nicht sehen kann. Dieser Spieler befragt nun die anderen Mitspieler nach Eigenschaften der Funktion: Monotonieverhalten, Existenz von speziellen Punkten und deren Lage, Funktionswerten an bestimmten Stellen, Periodizität, Symmetrie etc...

Dabei kann er immer wieder versuchen zu gewinnen, indem er der Gruppe einen Funktionsterm durch Aufschreiben bekannt gibt. Stimmt dieser mit dem gesuchten Funktionsterm überein, so hat der Spieler die Runde gewonnen.

Die Gruppengröße ist dabei variabel und kann von zwei Spielern bis rauf zur ganzen Klasse gehen. Als Maximum werden jedoch vier Spieler, inklusive dem Fragensteller, empfohlen.

Alle Fragen müssen sich auf Eigenschaften von Funktionen beschränken. Den Graphen der Funktion zeichnen, Teile der Funktionsgleichung oder die vollständige Funktionsgleichung geben sind nicht erlaubt.

Implementierung in eine Unterrichtsstunde:

Die Lehrkraft muss hier im Vorhinein sicherstellen, dass ein Großteil der Eigenschaften von Funktionen, welche Teil des Lehrplans sind, schon erarbeitet wurden.

Zuerst werden die Regeln von der Lehrkraft erklärt. Dazu macht sie sich selbst am besten zum Fragensteller und versucht mit den Antworten der Schüler auf die Funktionsgleichung zu kommen.

Danach werden Gruppen gebildet, entweder von der Lehrkraft oder den Schülern. Falls Tische umgestellt werden müssen, geschieht das am besten jetzt. Jeder Gruppe werden nun die Funktionsgleichungen ausgeteilt, eine für jeden Mitspieler. Entweder benutzt man die Post-it-Methode, die vorher angesprochen wurde, oder man lässt die Funktionsgleichungen einfach auf Zetteln verdeckt liegen. Wichtig ist, dass die Mitspieler dabei ihre eigene Funktionsgleichung nicht sehen.

Dann kann das Spiel auch schon beginnen. Die Rolle der Lehrkraft ist wieder eine kontrollierende. Wenn eine Spielgruppe frühzeitig fertig geworden ist können mehr Funktionsgleichungen ausgeteilt und eine zweite Runde gestartet werden.

Erweiterungsmöglichkeiten:

Wieder können hier Sets von bestimmten Grundfunktionen benutzt werden, um den Schwerpunkt des Spiels zu lenken. Polynomfunktion-Sets, Winkelfunktion-Sets, und Sets mit gebrochenrationalen Funktionen sind nur ein paar Beispiele. Bei jedem dieser Sets werden die Fragen anders ausfallen. So ist beim Winkelfunktion-Set sicher die Periodizität am interessantesten, während bei gebrochenrationalen Funktionen vielleicht eher die Position der Asymptoten erfragt wird.

Um den Schülern zu helfen, kann vor den ersten Fragen gefordert werden, dass der Graph der Funktion gezeichnet werden soll. Natürlich wird auch der Graph dem Spieler, der die Funktionsgleichung finden soll nicht gezeigt. Damit wird das Spiel für die fragen beantwortenden Spieler zwar einfacher, geht dadurch aber vielleicht am Lernziel vorbei. Lehrpersonen müssen hier vor der Planung des Spiels entscheiden ob der Fokus auf dem Herauslesen der Eigenschaften von Funktionen aus ihrer Funktionsgleichung oder dem Graphen der Funktion liegt.

Diskussion:

Dieses Spiel kann sowohl als Lernspiel betrachtet werden, als auch als Planspiel. Ist es unser Ziel ein Lernspiel zu betreiben, so kann die Lehrperson auf die Wortwahl der Lernenden acht geben. Für allgemeine Fragen wie „Hat die Funktion einen Bogen oder zwei?“ sollten in Kooperation mit den Lernenden Fachausdrücke als

Alternative gegeben werden. „Wie viele Nullstellen hat die Funktion?“ und „Wie viele Maxima und Minima gibt es?“ sind solche Alternativen. Durch die Beobachtung der benutzten Sprache kann somit auch ein Lernerfolg festgestellt werden.

Als Lernspiel gesehen muss mehr Entscheidungskraft in die Hände der Lernenden gelegt werden. Sie sollten das Sagen über verwendete Sets haben und eventuelle Einschränkungen in der verwendeten Sprache machen können.

Weiters bedient dieses Spiel die zweite winter´sche Grunderfahrung.

> Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen

Wieder vor allem an der verwendeten Sprache der Lernenden sichtbar ist diese Verbindung zu einer Grunderfahrung eine Motivation um dieses Spiel im Unterricht zu verwenden.

Schneemann

Dieses Spiel ist nach einer originellen Idee konzipiert.

Ziel des Spiels:

In einer Gruppe soll eine Funktionsgleichung aufgestellt werden, indem jeder Beteiligte der Reihe nach einen Term hinzufügt und diesen sinnvoll mit der bestehenden Gleichung verknüpft. Der letzte Mitspieler bildet daraus dann die Stammfunktion.

Spielregeln:

Die Mitspieler bauen sozusagen einen Schneemann mit Teilen einer Funktionsgleichung Stück für Stück auf. In einer Gruppe bestehend aus drei bis vier Mitspielern, welche in einem Kreis sitzen, wird zuerst bestimmt, wo begonnen wird und in welche Richtung des Tisches der Spielverlauf geht, also mit oder gegen den Uhrzeigersinn.

Das Spiel beginnt damit, dass der erste Mitspieler in der Reihe eine simple Funktionsgleichung niederschreibt. Der nächste Spieler fügt dieser Gleichung einen neuen Term mit passender Verknüpfung hinzu. Dies setzt sich so lange fort, bis der letzte Spieler an der Reihe ist. Er fügt der Funktionsgleichung nun nichts mehr hinzu, sondern muss die Stammfunktion berechnen. Dabei darf ihm kein anderer Mitspieler helfen. Für das Gelingen bekommt er einen Punkt. Die anderen Spieler kontrollieren dabei, ob seine Lösung stimmt.

Egal ob dieser letzte Spieler die Stammfunktion nun berechnen konnte oder nicht beginnt die neue Runde nun mit ihm. Er schreibt wieder eine simple Funktionsgleichung auf und das Spiel setzt wie gehabt fort.

Gewonnen hat der Spieler mit den meisten Punkten am Ende der Einheit. Dieses Ende kann vorher mit einer bestimmten Rundenanzahl oder durch verstrichene Zeit festgemacht werden.

Ein paar Grundregeln für das Hinzufügen:

- Alles muss in mathematischen Symbolen formuliert werden
- Es dürfen keine neuen Variablen dazukommen
- Keine Verwendung von „<“, „>“ oder „=“-Symbolen
- Kein Hinzufügen von Termen, die die Berechnung der Stammfunktion unmöglich machen
- Sowohl die Definitionsmenge als auch die Zielmenge müssen Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sein

<u>Implementierung in eine Unterrichtsstunde:</u>

Die Lehrperson stellt das Spiel vor, indem sie eine Funktionsgleichung auf der Tafel aufschreibt und anschließend quasi alleine spielt, indem sie Schritt für Schritt neues hinzufügt und danach die Stammfunktion berechnet.

Wenn die grundlegenden Spielregeln klargemacht wurden müssen eventuell Einschränkungen im Vorhinein klargemacht werden. Beispiele für (noch) unlösbare Fälle sollten dabei wieder an der Tafel mit der ganzen Klasse besprochen werden. Je nach gewünschter

Komplexität der Endfunktion müssen beispielsweise verschachtelte Funktionen vorher bekannt sein oder weggelassen werden.

Danach werden, wie schon bei den anderen Gruppenspielen eventuell Tische verrückt und die Gruppen gebildet.

Erweiterungsmöglichkeiten:

Werden die erstellten Funktionsterme zu kompliziert um schnell die Stammfunktionen berechnen zu können wird der Anteil an echter Lernzeit drastisch fallen. Um das zu vermeiden, können zuerst so lange Funktionsgleichungen gebildet werden, bis jeder Mitspieler eine Aufgabe hat. Mit dieser Variante lässt sich auch ein Zeitlimit für das Finden der Stammfunktionen setzen, wenn die Funktionsgleichungen so gebildet werden, dass nur die „Schneemannbauer“ sie sehen können. Danach kann gemeinsam umgedreht werden und das Berechnen der Stammfunktionen beginnt.

Natürlich muss man sich nicht auf das Suchen von Stammfunktionen beschränken. Man kann auch die Ableitung der Funktion finden lassen. Das Spiel läuft in dieser Variante ansonsten analog zur Standardversion.

Werden die Stammfunktionen zu schnell gefunden kann der Prozess auch fortgesetzt werden. Nun gilt es, zweimal hintereinander das unbestimmte Integral zu finden. Entscheidet man sich für die Variante, in der jeder Spieler gleichzeitig Stammfunktionen berechnen muss, so kann man das so lange betreiben bis die Zeit abgelaufen ist.

Jeder Spieler bekommt dann einen Punkt pro richtiger Stammfunktion im Zeitrahmen.

Diskussion:

Um beim Spiel Schneemann gemein zu sein, was hier zwar niemandem unterstellt werden soll aber durchaus in der Natur des Menschen liegt, muss von den Lernenden verstanden werden, was die Schwierigkeit hinter dem Finden einer Stammfunktion für sie selber ist. Anschließend kann versucht werden diese Schwierigkeiten bei anderen aufzudecken. Diese Selbstanalyse, und folglich auch die Analyse bei Mitspielern, ist eines der Grundprinzipien hinter der Gangart von selbstkonstruiertem Wissen, kann demnach sowohl in einer kognitivistisch als auch in einer konstruktivistisch orientierten Lehreinheit wertvoll sein.

Durch diese Vorgehensweise haben wir, auch wenn gerade nicht selber die Stammfunktion berechnet wird doch etwas vorliegen, was als echte Lernzeit bezeichnet werden kann. Damit ist auch bei diesem Spiel ein wichtiger Punkt aus Meyers Merkmalen abgedeckt. Auch die zeitnahe Selbstkontrolle ist dadurch fast permanent während dem Spielverlauf gegeben.

Funktions-Agent

Ziel des Spiels:

Dieses Spiel ist in Anlehnung an „Werwölfe von Düsterwald“ kreiert worden, welches vom Verlag Asmodée Editions publiziert wird.

Spieler müssen durch gezieltes Fragenstellen und Abstimmen die Person unter ihnen finden, die eine Funktion mit einzigartigen Eigenschaften hat.

Spielregeln:

Dieses Spiel wird wieder in einer Gruppe gespielt, diesmal mit mindestens vier Leuten. Für alle drei „normalen“ Mitspieler sollte je ein „Agent“ dabei sein. Die maximale Gruppengröße wird hier zwar offen gelassen, der Spielverlauf wird jedoch schnell unruhig.

Jeder Mitspieler bekommt anfangs eine Funktion auf einem Zettel zugeteilt, welche er vor allen anderen geheim halten muss. Dabei unterscheidet sich die Funktion des „Agenten“ in einem Merkmal von allen anderen. So haben in einer Vierergruppe beispielsweise drei Spieler eine monoton steigende Funktion aber nur einer hat eine streng monoton steigende Funktion.

Die erste Runde kann beginnen. Spieler stellen sich nun gegenseitig Fragen über ihre Funktionen, welche immer ehrlich beantwortet werden müssen. Nach einer gewissen Zeit, welche von der Lehrperson bestimmt und durchgesagt wird, müssen alle Spieler den Namen der Person auf einen Zettel schreiben, den sie für den Agenten halten.

Diese Zettel werden zuerst wieder geheim gehalten, um anschließend gleichzeitig aufgedeckt zu werden. Der Spieler mit den meisten Stimmen fliegt raus, kommt ins „Gefängnis“ und spielt in den nächsten Runden nicht mehr mit. Danach beginnt eine neue Runde, welche genauso abläuft wie die Erste.

Der Agent hat gewonnen, wenn nur mehr ein anderer Mitspieler außer ihm übrig ist. Die normalen Spieler haben gewonnen, wenn sie den Agenten rauswählen.

Alle Fragen müssen sich auf Eigenschaften von Funktionen beschränken. Graphen aufzeichnen lassen oder Funktionsterme geben ist nicht erlaubt.

Implementierung in eine Unterrichtsstunde:

Wieder müssen, so wie schon beim Spiel „Welche Funktion bin ich?“, die Eigenschaften der Funktionen, die während des Spiels verwendet werden, bekannt sein. Die Lehrperson zeigt das Spiel am besten mit einem Schüler als einstweiligem Mitspieler vor und erklärt so die Regeln für alle.

Anschließend werden wieder, falls notwendig, Tische verrückt und die Funktionen ausgeteilt. Die Lehrkraft stoppt die Zeit für eine Runde und gibt deren Ende bekannt, was die Abstimmungs-Phase einläutet.

Erweiterungsmöglichkeiten:

Je nach Größe der Spielgruppe können verschiedene Zusatzrollen am Anfang des Spiels implementiert werden. Wie schon in der Sektion zu den Spielregeln angedeutet gibt es die Möglichkeit, mehr als einen Agenten im Spiel zu haben.

Der Präsident kann einen raus gewählten Mitspieler wieder zurückholen, ist jedoch niemals selber Agent.

Der Lügner macht, was der Name verrät. Er muss in jeder Aussage die er trifft lügen.

Dem Doppelagenten werden am Anfang des Spiels alle anderen Agenten gesagt. Er selber hat dabei auch eine „Agenten-Funktion". Sein Ziel ist es, alle anderen Agenten rauszuwählen und als letzter übrigzubleiben.

Der Staranwalt ist niemals Agent und kann während jeder Abstimmung vorher einen Mitspieler auf einen Zettel schreiben, um ihn gegen den Rauswurf zu schützen.

Hier sind der Fantasie, vor allem bei den Lernenden, fast keine Grenzen gesetzt.

Diskussion:

Dieses Spiel hat auf den ersten Blick viele Gemeinsamkeiten mit dem vorher präsentierten „Welche Funktion bin ich". Allerdings ist die Art der Verarbeitung der Inhalte hier teilweise auf den Kopf gestellt. Wir suchen nicht mehr nur Übereinstimmungen, sondern müssen uns auch auf die Unterschiede konzentrieren. Beide Varianten sind gängige Arten von Übungen und beide sollten im Verlauf der Schulkarriere für Lernende präsent sein.

Abschlussgedanken

Nun sind wir auch schon am Ende dieser Arbeit angelangt. Ich hoffe ich konnte ihnen, dem Leser oder der Leserin, dabei helfen die Mathematik und das Spiel wieder etwas näher zusammenrücken zu lassen. Vielleicht haben sie die ein oder andere Idee für ihren eigenen Unterricht oder sogar ein Spiel zu Hause bekommen oder neue Einsichten zur Didaktik oder Spielen im Allgemeinen gewonnen. Auf jeden Fall hoffe ich sie hatten das, wonach wir offensichtlich alle suchen: Spaß.

Abstract

Diese ihnen vorliegende Arbeit befasst sich damit, Spiele zu finden, welche in einem gängigen Mathematikunterricht der Oberstufe zum Einsatz kommen können. Dabei werden die Themengebiete und Voraussetzungen aus dem aktuellen Lehrplan der AHS für Österreich abgeleitet. Anschließend werden die vorgestellten Spiele unter Kategorien beurteilt, welche aus der Behandlung von Themen sowohl der allgemeinen Didaktik, der mathematischen Fachdidaktik als auch der Spielwissenschaft hervorgehen. Dadurch soll gewährleistet werden, dass diese Spiele dokumentierte Kriterien für Lehrkräfte besitzen, an denen die Umsetzbarkeit und der Mehrwert für ihren Unterricht bestimmt werden kann. Durch die Einführung in eben diese Theorien wird dabei anfangs versucht einen Überblick in die Denkweisen zu geben, welche für die Erstellung eigener Spiele für den Mathematikunterricht wichtig sind.

Quellenverzeichnis

Fritz, J. (2004). *Das Spiel verstehen.* München: Juventa Verlag.

Gagné, R. M. (2011). *Conditions of Learning.* Münster Verlag.

Hoblitz, A. (2015). *Spielend lernen im Flow.* Wiesbaden: Springer.

Klieme, E. (2007). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards : eine Expertise.* Bonn: BMBF, Referat Öffentlichkeitsarbeit.

Kube, K. (1977). *Spieldidaktik.* Pädagogischer Verlag Schwann.

Lern-Psychologie.de. (2021). Abgerufen am 3. März 2021 von Lern-Psychologie.de: http://www.lern-psychologie.de/behavior/pawlow.htm#:~:text=Ein%20neutraler%20Stimulus%20(NS)%20ist,eine%20Reaktion%20%2F%20einen%20Reflex%20auslöst

Lernpsychologie.net. (2021). Abgerufen am 5. März 2021 von http://www.lernpsychologie.net/lerntheorien/konstruktivismus

Mogel, H. (2008). *Psychologie des Kinderspiels.* Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

Pittman, K. (kein Datum). *Youtube*. Abgerufen am 2. März 2020 von https://www.youtube.com/watch?v=hG9SzQxaCm8

Reiss, K. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik.* Basel: Birkhäuser.

RIS.bka.gv.at. (2021). Abgerufen am 2. März 2021 von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2018-09-01

Scheuerl, H. (1990). *Das Spiel.* Basel: Beltz Verlag.

Uni-Frankfurt.de. (2021). Abgerufen am 7. März 2021 von https://www.uni-frankfurt.de/83960548/Meyer_10_Merkmale_guten_Unterrichts.pdf

Vontobel, P. (2006). *Didaktisches Design aus lernpsychologischer Sicht.* Zürich: Pädagogische Hochschule Zürich.

Weinert, F. E. (2014). *Leistungsmessungen in Schulen.* Weinheim/Basel: Grünwald.

Weiß, G., & Zirfas, J. (2019). *Handbuch Bildungs- und Erziehungsphilosophie.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Wikipedia. (2021). Abgerufen am 03. Februar 2021 von https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik

ANHANG: KARTEN ZUM AUSDRUCKEN FÜR DAS SPIEL „ABLEITUNGS-STICH“

Probe:

Probe:

Probe:

Probe:

Probe:

Probe:

Probe:

Probe:

Probe: