



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Fachdidaktische Aufarbeitung zur elementaren Flächen-  
geometrie“

verfasst von / submitted by

Julian Simon Wiederin

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geschichte,  
Sozialkunde, Politische Bildung

Betreut von / Supervisor:

Doz. Dr. Franz Embacher



## Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Professor Franz Embacher bedanken, welcher sich bereiterklärt hat, meine Diplomarbeit zu betreuen und mich durch unzählige Gespräche immer wieder aus dem Dickicht der Mathematik befreit hat und mir den Mut gegeben hat, fachdidaktische Konzepte selbst zu entwickeln und neu zu denken. Ebenfalls möchte ich mich herzlich bei Herrn Professor Roland Steinbauer bedanken, der in seinen Seminaren meine Neugier für dieses Thema geweckt hat und mich ebenfalls motiviert hat, die Ideen in meinem Kopf in eine Diplomarbeit zu gießen.

Der nächste Dank gilt meinen Studienkolleginnen und Kollegen, sowohl diejenigen, welche ich in meinem Studium über die Mathematik, als auch diejenigen, welche ich über die Geschichte kennen- und schätzen gelernt habe. Beide Sichtweisen halfen mir, sowohl innermathematische Schwierigkeiten immer wieder zu diskutieren, als auch außermathematische fachdidaktische Ideen auf mathematische Inhalte umzumünzen. Namentlich möchte ich mich hier ganz speziell bei Judith Painsi, Sibylle Schedler, Johannes Neuhold, Verena Weninger, Magdalena Ehe und Benjamin Heiß bedanken. Ebenfalls möchte ich mich bei Magdalena Keller für das Aufhellen der eingescannten Bilder bedanken.

Ein großes Dankeschön gebührt auch meiner Familie, welche mich sowohl finanziell als auch geistig in meinem Studium unterstützt hat. Sie hatten stets ein offenes Ohr für mich und schlussendlich verdanke ich nicht zuletzt meinen Eltern die Einstellung, der Welt immer wieder mit Neugierde zu begegnen und Eindrücke mit anderen zu debattieren.

Auch bei meiner Schule, meinem Kollegium und meiner Direktorin möchte ich mich herzlich bedanken, die mich in den letzten Semestern meines Studiums herzlich aufgenommen haben, mich immer wieder anspornten, mein Studium abzuschließen und durch so manche Unterrichtsfreistellungen für letzte Prüfungstermine mir dies schlussendlich auch ermöglichten.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fachdidaktisches Konzept</b>	<b>3</b>
2.1	Vorgehensweise . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Inhaltliche Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Reguläre Flächen</b>	<b>11</b>
4.1	Theorie . . . . .	11
4.1.1	Definition . . . . .	12
4.1.2	Definition . . . . .	12
4.2	Betrachtung der Definition . . . . .	13
4.3	Anknüpfungspunkte und mögliche Fehlvorstellungen . . . . .	17
4.4	Präsentation und Methodik . . . . .	19
4.4.1	Beispiel Ebene . . . . .	23
4.4.2	Beispiel Funktionsgraphen . . . . .	25
4.5	Reguläre Flächen mit mehreren lokalen Parametrisierungen . . . . .	27
4.5.1	Karten . . . . .	28

## Inhaltsverzeichnis

4.5.2	Gedankenexperiment Polarkoordinaten . . . . .	31
4.6	Nullstellengebilde . . . . .	34
4.6.1	Proposition . . . . .	35
4.6.2	Betrachtung der Definition und Anmerkungen . . . . .	36
4.6.3	Beispiel Ellipsoid . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Glatte Abbildungen</b>	<b>39</b>
5.1	Einstieg und intuitiver Zugang . . . . .	39
5.2	Problemstellung . . . . .	44
5.3	Theorie . . . . .	46
5.3.1	Proposition . . . . .	46
5.3.2	Korollar . . . . .	48
5.3.3	Proposition . . . . .	48
5.3.4	Definition . . . . .	49
5.3.5	Definition . . . . .	49
5.4	Betrachtung der Theorie . . . . .	49
5.5	Anknüpfungspunkte und Fehlvorstellungen . . . . .	53
5.6	Präsentation und Methodik . . . . .	55
5.7	Diffeomorphe Flächen . . . . .	57
5.7.1	Definition . . . . .	57
5.7.2	Beispiel Kugel - Ellipsoid . . . . .	57
5.7.3	Beispiel Ebene - Funktionsgraph . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Tangentialebenen an regulären Flächen</b>	<b>61</b>
6.1	Einstieg und Problemstellung . . . . .	61

6.2	Theorie . . . . .	63
6.2.1	Definition . . . . .	63
6.3	Betrachtung der Theorie . . . . .	63
6.3.1	Spezialfall reguläre Flächen als Funktionsgraphen . . . . .	64
6.4	Theorie . . . . .	66
6.4.1	Proposition . . . . .	66
6.4.2	Beweis . . . . .	66
6.5	Anknüpfungspunkte und mögliche Fehlvorstellungen . . . . .	67
6.5.1	Beispiel mehrdimensionale Kettenregel . . . . .	67
6.5.2	Richtungsableitungen . . . . .	68
6.6	Präsentation und Methodik . . . . .	70
6.6.1	Beispiel linearer Abhängigkeit von Geschwindigkeits- vektoren von Kurven auf Punkten auf regulären Flächen	72
6.6.2	Beispiel Tangentialebene durch Nullstellengebilde . . . . .	74
6.6.3	Motivation und Ausblick . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Differential zwischen regulären Flächen</b>	<b>79</b>
7.1	Theorie . . . . .	80
7.1.1	Definition . . . . .	80
7.1.2	Proposition . . . . .	80
7.2	Betrachtung der Theorie . . . . .	80
7.2.1	Beweisskizze . . . . .	81
7.3	Präsentation und Methodik . . . . .	84
7.3.1	Beispiel Übersichtsraster . . . . .	85

Inhaltsverzeichnis

<b>8</b>	<b>Literatur-und Abbildungsverzeichnis</b>	<b>89</b>
<b>9</b>	<b>Anhang</b>	<b>95</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	95



# 1 Einleitung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der fachdidaktischen Aufarbeitung von elementarer Flächengeometrie. Hierbei sollen, ausgehend von regulären Flächen, mathematische Vorstellungen, Begrifflichkeiten, Visualisierungsmöglichkeiten und Grundvorstellungen bis hin zum Begriff des Differentials zwischen regulären Flächen fachdidaktisch aufgearbeitet werden.

Dabei werden auch viele Beispiele miteinbezogen und durchgerechnet, um verschiedenste Definitionen auf ihre Sinnhaftigkeit hin zu testen bzw. zu veranschaulichen.

Zielgruppe bilden alle Mathematiker/innen und Interessent/innen, welche sich mit Flächengeometrie beschäftigen. Sowohl für das Selbststudium als auch im Rahmen von Seminaren, in denen Flächengeometrie betrieben wird, soll diese Arbeit als Unterstützung dienen, Referate vorzubereiten und Grundvorstellungen zu Begriffen zu diskutieren und zu bilden.

## 1 Einleitung

Wissen über Parametrisierungen von Kurven im dreidimensionalen Raum wird hierbei vorausgesetzt. Auch ein Grundverständnis und die Handhabung von Abbildungen, der euklidischen Metrik des  $\mathbb{R}^3$  und Matrizen im dreidimensionalen euklidischen Raum sollten vorhanden sein.

Als mathematisches Fundament dient die Strukturierung von Christian Bär, welche er in seinem Buch "Elementare Differentialgeometrie" vorgegeben hat und an deren Reihenfolge sich diese Arbeit orientiert.

## 2 Fachdidaktisches Konzept

Um eine fachdidaktische Arbeit in einem Themenfeld zu entwerfen, zu dem es kaum zugrundeliegende fachdidaktische Literatur gibt, muss man sich mit der Frage beschäftigen, wie Mathematik generell vermittelt werden kann.

Da bei der Beschäftigung mit Flächengeometrie viele neue Begriffe aufkommen, mit denen sich Studierende auseinandersetzen müssen, muss die Frage aufgegriffen werden, wie Begriffsbildung in der Mathematik funktioniert. Des Weiteren ist jedoch zu beachten, dass das Zielpublikum dieser Arbeit bereits über ein relativ umfangreiches Vorwissen in den Bereichen lineare Algebra und Analysis verfügen muss, sodass das Bilden und Einordnen von neuen mathematischen Begriffen also keine unbekannte Tätigkeit darstellt. Deshalb muss der Fokus darauf gelegt werden, wie man an dieses vorhandene Vorwissen anknüpfen kann, auf welche Begriffe der Analysis oder der linearen Algebra man sich stützen kann und wo die Gefahr besteht, Fehlvorstellungen zu entwickeln, indem neue Begrifflichkeiten falsch verknüpft werden.

## 2 Fachdidaktisches Konzept

Hierzu möchte ich die Theorie des kognitiven Konstruktivismus kurz erwähnen, ohne jedoch genauer auf diese einzugehen. Sie verbindet die Vorstellungen, dass Wissenserwerb auf der einen Seite ein Prozess ist, welcher auf eigenen Lernerfahrungen aufbaut, andererseits durchaus von anderen Personen vermittelt werden kann, indem durch geeignete Vermittlung vorliegendes Wissen mit bereits Vorhandenem verknüpft wird.<sup>1</sup>

Deshalb wird einer der Schwerpunkte sein, neue Definitionen einerseits zu erläutern, um verschiedene Sichtweisen und Zugänge anzubieten, andererseits gezielt auf mögliche Fehlvorstellungen hinzuweisen, die durch das falsche Verknüpfen mit bereits bestehenden Begriffen entstehen könnten. Um diese verschiedenen Zugänge anzubieten, wird diese Arbeit auch viele Visualisierungen und Beispiele beinhalten, die der Veranschaulichung und dem intuitiven Zugang dienen können, aber auch "Reality Checks" darstellen können, um die Sinnhaftigkeit von Definitionen wenigstens stichprobenartig zu prüfen.<sup>2</sup> Hierbei werden vor allem gängige Flächen verwendet, deren Eigenschaften intuitiv zugänglich sind, wie Kugeln, Ebenen, Zylinder oder Tori.

Des Weiteren werden auch Anleitungen zu finden sein, die dabei helfen können, Anschauungsmaterialien zu erstellen, welche zur Veranschaulichung herangezogen werden können und speziell bei Referaten vor größeren

---

<sup>1</sup>vgl. Astrid FISCHER, "Vorstellungen zur Linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und -ergebnisse von Studierenden", (Dortmund 2005)

<sup>2</sup>Anmerkung: Die verschiedenen Zugangsweisen und eine Analyse der Denkmuster sind beispielsweise bei Leonoe BURTON zu finden

## 2.1 Vorgehensweise

Gruppen dazu dienen können, Begriffe intuitiv zugänglich zu machen.

Auch moderne Medien sollen in dieser Arbeit berücksichtigt werden, wie zum Beispiel der Einsatz von Geogebra und Internetquellen. Hierbei wird speziell der intuitive Zugang gefördert.

Um den fachdidaktischen Gedanken dieser Arbeit zu vervollständigen, werden neben den oben genannten Aspekten und Inhalten auch methodische Vorschläge für Vortragende zu finden sein. Diese beziehen sich darauf, wie ein Vortrag nicht nur inhaltlich, sondern auch präsentationstechnisch bereichert werden kann.

## 2.1 Vorgehensweise

Aufbauend auf diesen Ideen, habe ich mir ein vierstufiges Modell überlegt. Jenes beinhaltet die Gestaltung und Aufarbeitung der Kapitel nach meinen Vorstellungen.

In einem ersten Schritt eines jeden Kapitels werde ich die Theorie erarbeiten, das heißt, die wichtigsten Definitionen, Propositionen, Beweise und Korollare aus dem Buch von Christian Bär wiedergeben, wobei hier beim ersten Kapitel eine Ausnahme gemacht wird, da zuerst eine Einleitung und Motivation stattfindet, welche ansonsten jeweils am Ende eines jeden Kapitels für das nächste angeführt wird. Als zweiten Schritt werden diese

## 2 Fachdidaktisches Konzept

Definitionen auseinandergenommen und stückweise erklärt und es wird versucht, diese grafisch darzustellen und deren Sinnhaftigkeit wiederzugeben. Auch bei den Beweisen soll auf die wichtigsten Beweisschritte eingegangen werden. Danach folgen Anknüpfungspunkte und mögliche Fehlvorstellungen, welche man aus der Analysis und der Linearen Algebra mitbringen könnte. Dies soll vor allem für intuitive Zugänge betrachtet werden. Im vierten und letzten Schritt werden dann methodische Vorschläge gegeben, wie dieses Kapitel im Rahmen von Vorträgen oder Seminaren präsentiert werden könnte und welche Veranschauungsmaterialien hierzu verwendet werden könnten. Anschließend werden dann die theoretischen Grundlagen des nächsten Kapitels behandelt und das Konzept beginnt von vorne.

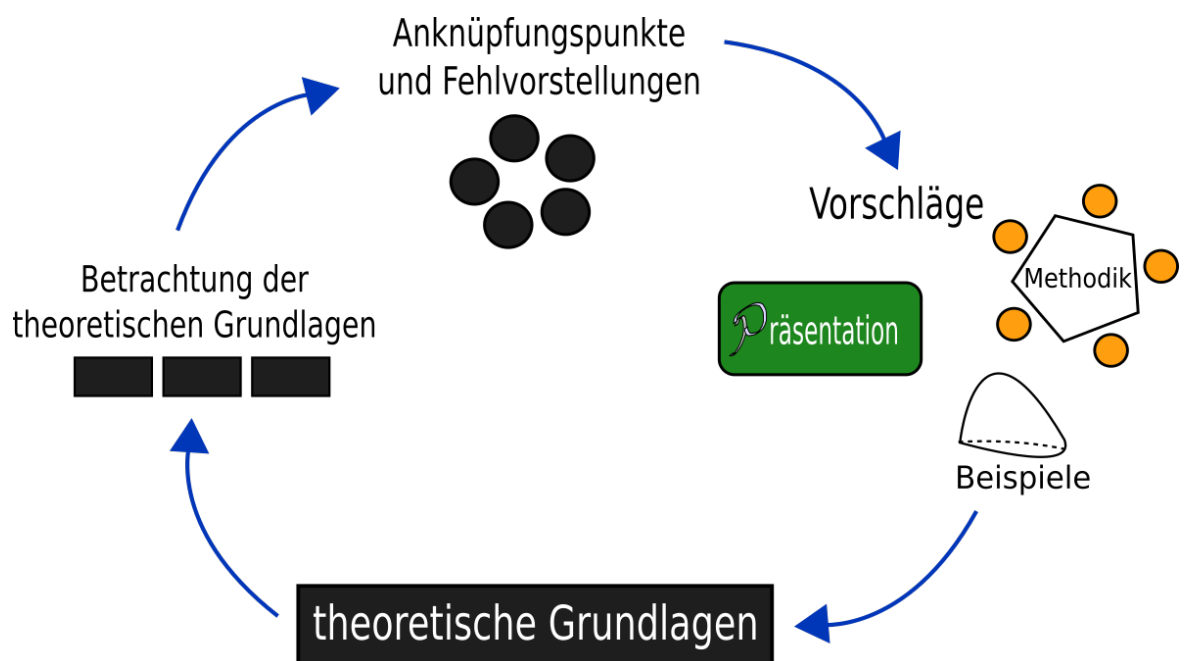


Abbildung 2.1: Visualisierung der Vorgehensweise

### 3 Inhaltliche Einleitung

Worum geht es bei Flächengeometrie überhaupt? Die Antwort darauf ist im Begriff selbst schon enthalten: Es geht darum, Geometrie auf regulären Flächen zu betreiben. Der Begriff der regulären Flächen wird im nächsten Kapitel eingeführt und veranschaulicht. Prinzipiell will man, wenn man Geometrie betreibt, Längen und Winkel messen. Um dies zu bewerkstelligen, werden wir in irgendeiner Form eine Norm definieren müssen, wie aus der linearen Algebra bekannt sein sollte. Eine bereits bekannte Norm ist die euklidische Norm des  $\mathbb{R}^3$ , auf welche zurückgegriffen werden kann. Hierbei ergibt sich jedoch das Problem, dass eine reguläre Fläche zwar eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  ist, jedoch bis auf Ebenen, die durch den Ursprung gehen, kein Unterraum. Es ergibt sich somit der Umstand, dass Eigenschaften von zweidimensionalen Flächen zuerst von "außen", also aus der Außensicht des  $\mathbb{R}^3$  beschrieben werden, und man sich der elementaren Werkzeuge dieses Raumes bedient.

Lässt man diese Außensicht weg, kommt man zu einer zweiten spannenden Frage, mit welcher sich die Flächengeometrie beschäftigt: Kann ein

### 3 Inhaltliche Einleitung

zweidimensionales Wesen, welches auf so einer Fläche lebt, Aussagen über diese treffen? Ein Gedankenexperiment dazu ist die Frage, ob beispielsweise ein Mensch, welcher sich auf der Erde befindet, ohne Außensicht entscheiden könnte, ob er oder sie sich auf einer kugelförmigen oder einer ebenen Fläche befindet. Hierzu wird in dieser Arbeit das Bild einer Ameise herangezogen, welche sich als zweidimensionale/r Bewohner/in auf einer Fläche bewegt. Im mathematischen Terminus spricht man hier von der "inneren Geometrie", also von geometrischen Eigenschaften einer Fläche, welche ohne Außensicht beschrieben werden können. Hierbei spielen kleine, lokale Umgebungen um Punkte auf Flächen eine wesentliche Rolle, da die zweidimensionale Ameise in unserem Gedankenexperiment keine globalen Effekte erkennen kann. Es ist folglich in unserem Gedankenexperiment nicht möglich, beispielsweise einmal um einen Zylinder zu wandern, um dann den Startpunkt wiederzuerkennen.

Um Aussagen über die Geometrie einer Fläche treffen zu können, spielt der Begriff der Krümmung eine wesentliche Rolle, also die Frage, ob ein zweidimensionales Wesen nur mit Hilfe der Werkzeuge, die die innere Geometrie zur Verfügung stellt, Aussagen über das Krümmungsverhalten der Fläche, auf der diese lebt, in der Nähe von Punkten treffen zu kann, ohne globale Effekte erkennen zu müssen. Hierbei trifft man wieder auf das bereits oben genannte Problem: Um einen Krümmungsbegriff zu erhalten, werden in irgendeiner Form Ableitungen berechnet werden müssen, was auf einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , welche selbst in den meisten Fällen keine Ebene ist, bewerkstelligt werden muss.





Abbildung 3.1: Veranschaulichung zweidimensionaler Bewohner

Wenn man sich im Rahmen eines Seminars mit einem neuen Thema beschäftigt, ist es von enormer Wichtigkeit, eine ausführliche Einleitung und Motivation zu geben, weshalb man dieses Thema betreibt. Im Sinne des kognitiven Konstruktivismus soll diese Motivierung einer Problemstellung die intrinsische Motivation fördern, um einen Lernprozess zu starten.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>vgl. Astrid FISCHER, "Vorstellungen zur Linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und -ergebnisse von Studierenden", (Dortmund 2005)

### 3 Inhaltliche Einleitung

Durch das Gedankenexperiment mit dem zweidimensionalen Einwohner einer Fläche im dreidimensionalen Raum sollen intuitiv die Probleme vermittelt werden, welche sich im Laufe der Thematik ergeben. Hier würde sich auch eine Diskussionsrunde mit dem Auditorium anbieten, wenn die Teilnehmer/innenzahl es ermöglicht. Es könnte diskutiert werden, wie die Herangehensweise wäre, um geometrische Aussagen über eine Fläche zu treffen, wenn man sich als Ameise darauf bewegt und nur lokale Effekte messen kann. Mögliche Stichwörter für die Diskussion könnten sein: Erdkrümmung, Schiffmasten, Leuchttürme, intuitive Vermutung über Winkelsummen von (genügend großen) Dreiecken auf Kugeln/ Ebenen/ Hyperbolischen Flächen, historischer Rückblick auf verschiedene Weltmodelle,...

Nach diesem intuitiven Zugang muss dann notwendigerweise zuerst definiert werden, was man unter einer regulären Fläche versteht.

# 4 Reguläre Flächen

## 4.1 Theorie

Zu Beginn der Theorie stehen bei Christian Bär zwei zentrale Definitionen, welche ich hier zuerst in etwas abgeänderter Form anführen und dann zerlegen und diskutieren möchte. Anschließend werde ich auf Anknüpfungspunkte und mögliche Fehlvorstellungen eingehen, die bei der Auseinandersetzung mit regulären Flächen auftreten können. Danach werde ich einige Tipps zur Präsentationstechnik geben und Methoden und Anschauungsmaterial beschreiben, welche nützlich sein können, um ein intuitives Verständnis für reguläre Flächen aufzubauen. Diese Vorgehensweise wird auch in den nächsten Kapiteln angewendet werden.

## 4 Reguläre Flächen

### 4.1.1 Definition

Sei  $S$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , d.h.  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Wir nennen  $S$  eine reguläre Fläche, falls es zu jedem Punkt  $p \in S$  eine offene Umgebung  $V$  von  $p$  im  $\mathbb{R}^3$  gibt, sowie eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^2$  und eine glatte Abbildung  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , derart dass gilt

- (i)  $F(U) = S \cap V$ , und  $F$  ist ein Homöomorphismus
- (ii) Die Jacobimatrix  $D_u F$  hat für jeden Punkt  $u \in U$  Rang 2.

### 4.1.2 Definition

Eine Abbildung  $F : U \rightarrow S \cap V$  aus Definition 4.1.1 oder auch das Tripel  $(U, F, V)$  heißt lokale Parametrisierung von  $S$  um  $p$ . Die Menge  $S \cap V$  heißt Koordinatenumgebung von  $p$ . Die Komponenten  $u^1$  und  $u^2$  von  $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$  heißen dann auch Koordinaten des Punktes  $F(u) \in S$  (bezüglich der Parametrisierung  $F$ ).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Die Begriffe "offen", "glatt", "Homöomorphismus" und "Jacobimatrix" werden auf den nächsten Seiten diskutiert und veranschaulicht werden.

## 4.2 Betrachtung der Definition

“Flächen im Raum sind zweidimensionale Objekte”<sup>2</sup>, schreibt Christian Bär als einleitende Worte in seinem Werk. Man kann sich zunächst einmal verschiedenste Flächen wie Handtuchflächen, Flächen, die aussehen wie Eierschalen, oder einfach Kugeloberflächen, Ellipsoide, Ebenen oder Zylinderoberflächen vorstellen, welche eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  bilden. Als nächstes betrachtet man einen Punkt  $p$  auf der Fläche  $S$ . Hierbei ist wichtig, dass es sich um eine lokale Definition handelt, was durch die Umgebung  $V$  verdeutlicht wird, welche in den meisten Fällen nicht die gesamte Fläche umschließt.

Die offene Umgebung  $V$  kann man sich wie eine im Raum schwebende Kartoffel vorstellen, die in einem gewissen Bereich die Fläche schneidet. Die Schnittmenge  $S \cap V$  bildet also wieder eine zweidimensionale Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , welche man sich wie eine offene Umgebung auf der Fläche  $S$  um den Punkt  $p$  vorstellen kann.

Als nächstes kann man  $F$  betrachten.  $F$  ist eine Funktion, welche vom  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^3$  abbildet. Hierbei wird auch der  $\mathbb{R}^2$  durch eine offene Umgebung  $U$  eingegrenzt. Die Funktion  $F$  soll hierbei genau von der offenen Umgebung  $U$  in die offene Umgebung um einen Punkt  $p$  abbilden, welche die Menge

---

<sup>2</sup>Christian BÄR, “Elementare Differentialgeometrie”, 2. Auflage, (Berlin/New York 2010), S. 92

<sup>3</sup>Ankmerkung: die schraffierte Fläche auf der Abbildung 4.1

#### 4 Reguläre Flächen

$S \cap V$  ist. Somit existiert auch ein Punkt  $u$  in der Menge  $U$ , für den gilt:

$$F(u) = p.$$

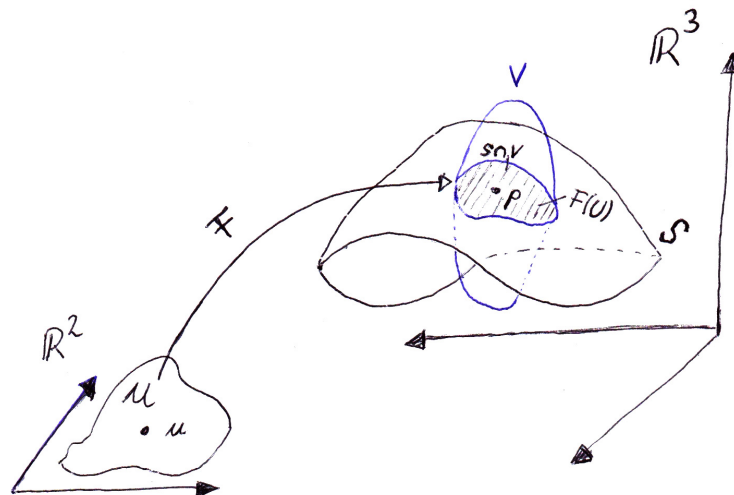


Abbildung 4.1: Visualisierung der Definition 4.1.1

Es bleibt also noch zu klären, was man unter einer glatten Abbildung und einem Homöomorphismus versteht.

Wenn zwischen zwei Flächen eine bijektive, stetige Funktion existiert, deren Umkehrfunktion auch stetig ist, spricht man von zwei homöomorphen Flächen. Intuitiv kann man sich vorstellen, dass sich dann zwei Flächen in einem gewissen Sinn ähnlich schauen. Man kann sich das wie eine "weiche Verformung" vorstellen, also wenn sich eine Fläche durch "Biegen" und "Kneten" in eine andere Fläche überführen lässt, ohne dass dabei etwas geknickt, zerrissen oder zusammengeklebt wird. Die folgende Abbildung

## 4.2 Betrachtung der Definition

soll diese Idee veranschaulichen.

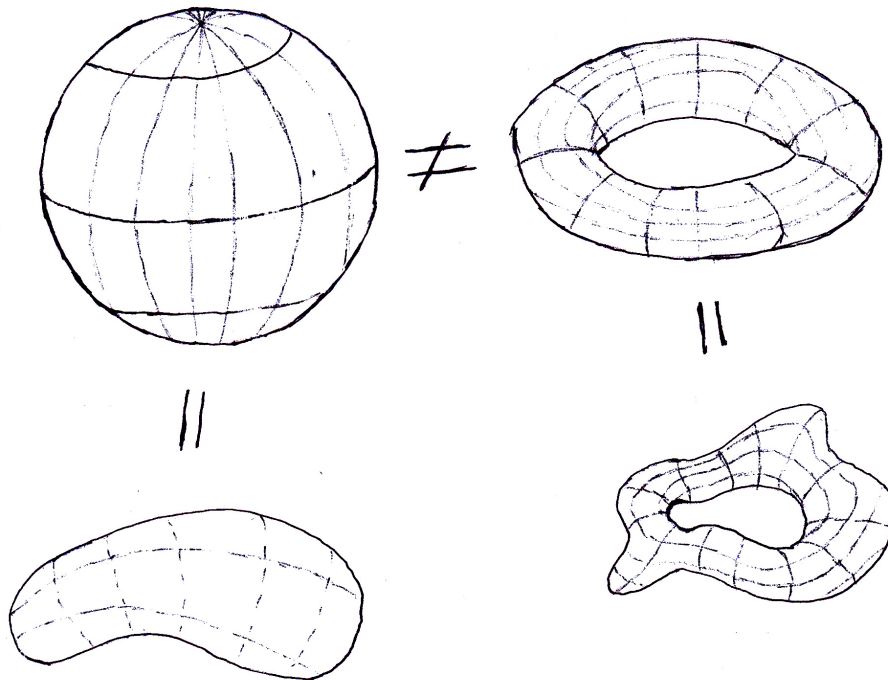


Abbildung 4.2: Vorstellung homöomorphe Flächen

Die Bedingung, dass die Jacobimatrix  $D_u F$  Rang 2 hat impliziert zunächst einmal, dass  $F$  differenzierbar ist. Dies ist aber sowieso durch die Glattheit vorausgesetzt. Dass die Jacobimatrix vollen Rang hat, kann man sich bei Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  vorstellen, wie wenn diese stetig differenzierbar auf ihrem gesamten Definitionsbereich sind. Es garantiert also, dass die Flächen keine Ecken oder Kanten besitzen. Die erste Ableitung als Tangentensteigung bei Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , welche garantiert, dass zu jedem Punkt des Definitionsbereichs eine Tangente an den Graphen gelegt

#### 4 Reguläre Flächen

werden kann, wird hier bei einer Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^3$  umgemünzt auf die Vorstellung, dass an jedem Punkt auf der Fläche  $S$  eine Tangentialebene angelegt werden kann. Das wird später noch eine wesentliche Rolle spielen.

Des Weiteren garantiert die Bedingung des vollen Ranges der Jacobimatrix, dass linear unabhängige Vektoren in  $U$  auch wieder linear unabhängig in  $V$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  sind.

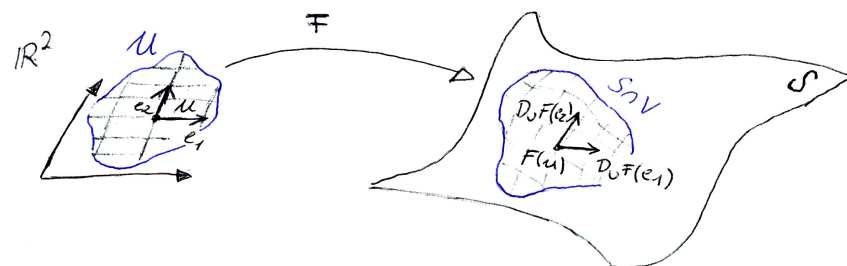


Abbildung 4.3: Visualisierung der Garantie der linearen Unabhängigkeit

Die Definition 4.1.2 führt zwei Begriffe ein. Es werden die offenen Umgebungen  $U$  und  $V$ , zusammen mit der Funktion  $F$ , welche von der Umgebung  $U$  in die Umgebung  $S \cap V$  abbildet, als Parametrisierung bezeichnet. Der Begriff Parametrisierungen ist bereits mit Vorstellungen behaftet, auf welche im nächsten Schritt eingegangen wird.



## 4.3 Anknüpfungspunkte und mögliche Fehlvorstellungen

Zunächst möchte ich auf eine Fehlvorstellung eingehen, die auftreten kann, wenn man eine reguläre Fläche zunächst nur als Grafik betrachtet. Sicherlich sind dreidimensional dargestellte Funktionen aus der Analysis bekannt, was zu Irritation führen kann. Dreidimensionale Graphen von Funktionen werden oft dargestellt, wenn Funktionen der Form  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet werden. Hier kann jeder reelle Funktionswert von  $f$  auf der vertikalen Achse über den Koordinaten der Punkte ihrer Argumente aufgetragen werden.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$ . Hier können relativ problemlos die partiellen Ableitungen von  $f$  gebildet werden.  $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x)$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y)$ , was in einem späteren Schritt noch eine Rolle spielen wird.

Eine reguläre Fläche ist diese Funktion streng genommen jedoch nicht, da  $F$  nicht in den  $\mathbb{R}$  abbildet, sondern in den  $\mathbb{R}^3$ . Ein Trick, wie man aus einer solchen Funktion eine reguläre Fläche “basteln” kann, wird in den folgenden Beispielen noch angeführt.

Schraubt man in einem Gedankenexperiment das Ganze um eine Dimension herunter, kommt man eher auf eine Vorstellung, die auch mit dem Begriff Parametrisierung in Einklang zu bringen ist.

#### 4 Reguläre Flächen

Betrachten wir zum Beispiel eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$
 also die Parametrisierung des Einheitskreises. Hier

könnte man die Begriffe ähnlich ummünzen. Man kann eine offene Umgebung in  $\mathbb{R}$  finden, um  $t$  einzugrenzen. Es lässt sich auch ohne Probleme eine offene Umgebung im  $\mathbb{R}^2$  finden, zum Beispiel die offene Kreisscheibe mit Radius 1.5 und Mittelpunkt  $(0|0)$ <sup>4</sup>. Der Einheitskreis wäre nun eine Teilmenge dieser offenen Kreisscheibe, die sich folgendermaßen beschreiben ließe:

$$K = \{x^2 + y^2 = 1 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Hierbei hätte die Jacobimatrix  $D_{(t)}f = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$  vollen Rang (also Rang 1)  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Schraubt man nun von dieser bekannten Form der Parametrisierung die Dimensionen des Grund- und des Zielraumes um eins hinauf, kommt man zu der Vorstellung einer Parametrisierung einer regulären Fläche. Aus einer parametrisierten (eindimensionalen) Kurve im  $\mathbb{R}^2$  wird also eine parametrisierte (zweidimensionale) Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

Die folgende Grafik soll, analog zur Visualisierung der Definition 4.1.1, eine Vorstellung visualisieren. Hierbei werden absichtlich dieselben Buchstaben

---

<sup>4</sup>Anmerkung: Natürlich kann jede offene Kreisscheibe oder beliebige andere offene Umgebungen gewählt werden, welche alle Punkte des Einheitskreises umfasst und sternförmig ist. Diese hier ist nur exemplarisch als ein konkretes Beispiel angeführt.

#### 4.4 Präsentation und Methodik

verwendet wie bei der Definition, außer dass  $V$  durch  $A$  ersetzt wird (offene Umgebung im  $\mathbb{R}^2$  statt im  $\mathbb{R}^3$ ), wobei diese in der untenstehenden Grafik verwendete Benennung ansonsten bei Kurven nicht üblich ist.

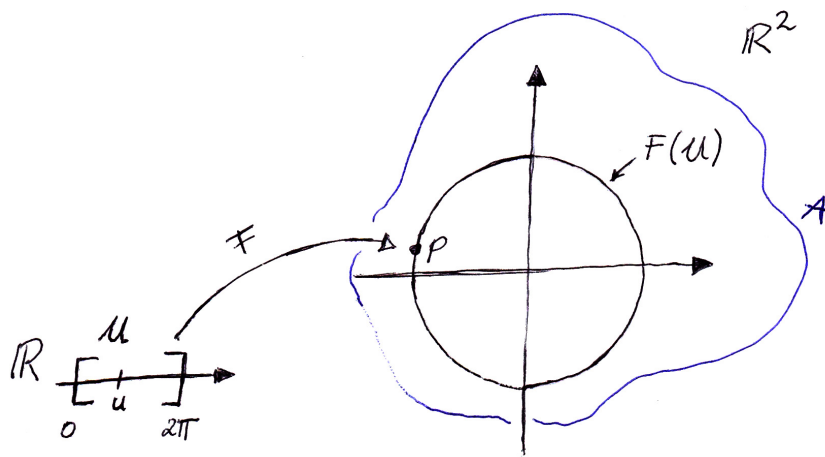


Abbildung 4.4: Visualisierung Einheitskreis

#### 4.4 Präsentation und Methodik

Um den Einstieg in eine neue Thematik zu motivieren, ist zu empfehlen, zuerst die bereits genannten Motivationsgründe, weshalb man Geometrie auf Flächen betreiben will, aufzuzeigen. Das Gedankenexperiment der zweidimensionalen Ameise, welche sich auf einer Fläche befindet, nur lokale Effekte messen kann und etwas über die Geometrie der Fläche, auf der sie

#### 4 Reguläre Flächen

sich befindet, herausfinden will, eignet sich sehr gut als Diskussionsthema, wie bereits im vorherigen Kapitel angeführt.

Steigt man nun mit regulären Flächen ein, kann ein erstes In-Berührung-Kommen durch Visualisierung und intuitiven Zugängen geschaffen werden. Beispielsweise können mehrere Flächen zur Veranschaulichung mitgebracht (Bälle, Zylinder, Kartonschachteln) oder an die Tafel gezeichnet werden und die Gruppe soll nach Bauchgefühl entscheiden, welche Flächen "regulär" sind und welche nicht, ohne die genaue Bedeutung dieses Wortes zu kennen. Hierbei ist natürlich darauf zu achten, dass absichtlich nichtreguläre Flächen (mit Ecken oder Knicken) und reguläre Flächen (Kugeloberfläche, Handtuchflächen) aufgezeichnet werden.

#### 4.4 Präsentation und Methodik

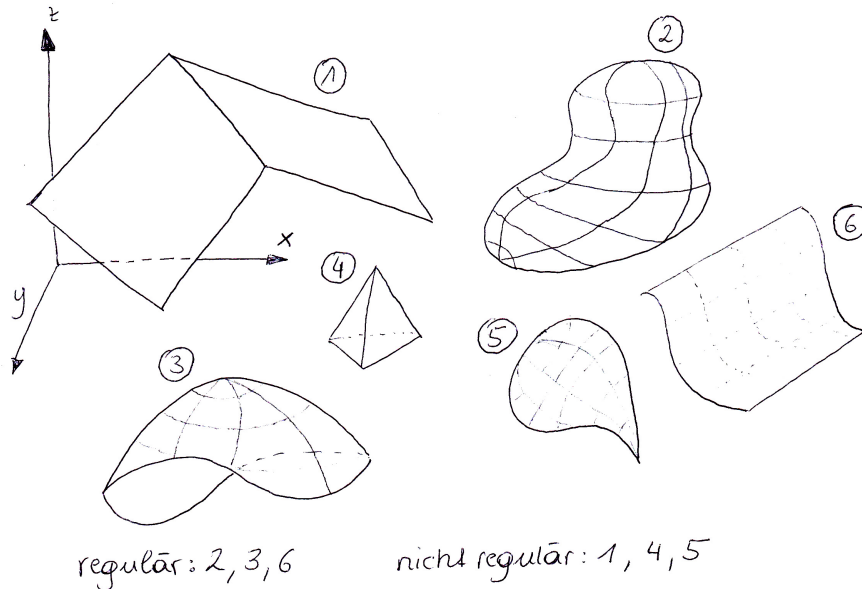


Abbildung 4.5: Vorschlag für mögliche Flächen

Ob explizit auf die Fehlvorstellung von Funktionsgraphen im  $\mathbb{R}^3$  eingegangen wird, ist von der/dem Vortragenden zu entscheiden.

Einige bekannte Beispiele für Parametrisierungen können jedoch ebenfalls angesprochen und bei Bedarf wiederholt werden, um danach gemeinsam das Gedankenexperiment des “Raufschraubens der Dimensionen” durchzuführen. Hierbei empfiehlt sich eine Mischung aus Lehrendenvortrag und Gruppengespräch, wobei als Medien sowohl die Tafel als auch ein Beamer mit Computereinsatz verwendet werden kann, um Beispiele für Kurven und Flächen zu veranschaulichen.

#### 4 Reguläre Flächen

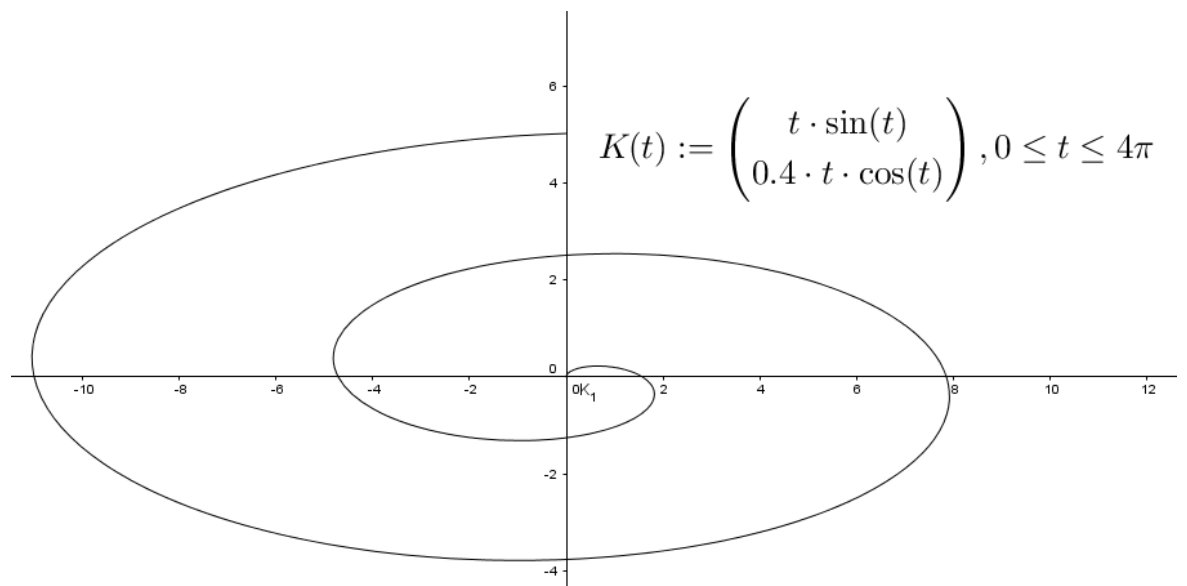


Abbildung 4.6: Beispiel einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$

Hierbei kann deutlich gemacht werden, dass eine Kurve als solche eine eindimensionale Untermenge des  $\mathbb{R}^2$  ist, als auch nochmal die Eigenschaft erklärt werden, was es bedeutet, wenn die Jacobimatrix hier vollen Rang hat. In dem oben angeführten Beispiel ist die Jacobimatrix

$$D_{(t)}K = \begin{pmatrix} \sin(t) + t \cdot \cos(t) \\ 0.4 \cdot \cos(t) - 0.4t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

und hat vollen Rang.

Des Weiteren kann darauf hingewiesen werden, dass diese Kurve in jedem Punkt, in dem eine offene Umgebung existiert (also außer im Startpunkt  $t = 0$  und im Endpunkt  $t = 4\pi$ ), lokal aussieht wie ein "sanft" verbogenes

Geradenstück, also einen Homöomorphismus zu einer offenen Menge des  $\mathbb{R}$  definiert. Analog kann dies bei regulären Flächen betrachtet werden. Auch diese müssen in einer offenen Umgebung um beliebige Punkte aussehen wie "sanft" verbogene Ebenenstücke des  $\mathbb{R}^2$ . Dass dies nur lokal möglich sein muss, wird klar, wenn man sich beispielsweise einen Torus oder auch die Sphäre ansieht.

Anschließend müssen natürlich die formal korrekten Definitionen in irgendeiner Form präsentiert und vermittelt werden.

Im nächsten Schritt wäre es ratsam, ähnlich wie bei der Kurve, ein Beispiel für eine Parametrisierung einer regulären Fläche zu präsentieren. Als Einstieg bietet sich die leichteste aller regulären Flächen, die Ebene, an.

#### 4.4.1 Beispiel Ebene

Ein konkretes Beispiel zum Einstieg wäre die Ebene, welche durch den Nullpunkt geht und z.B. die Richtungsvektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  hat.

$$S = \left\{ u^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

#### 4 Reguläre Flächen

$$F(u^1, u^2) := u^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und die Jacobimatrix  $D_{(u)}F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  hat vollen Rang (Rang2) und ist

sogar unabhängig von  $u$ . Das Ganze kann dann natürlich auch allgemein für Ebenen gerechnet werden, welche durch einen beliebigen Punkt  $p$  gehen und die (linear unabhängigen) Richtungsvektoren  $v_1$  und  $v_2$  besitzen. Dann erhält man

$$F(u^1, u^2) := p + u^1 \cdot \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} + u^2 \cdot \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{pmatrix} \text{ und } D_{(u)}F = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \\ v_1^3 & v_2^3 \end{pmatrix}$$

ebenfalls mit vollem Rang und unabhängig von  $u$ .



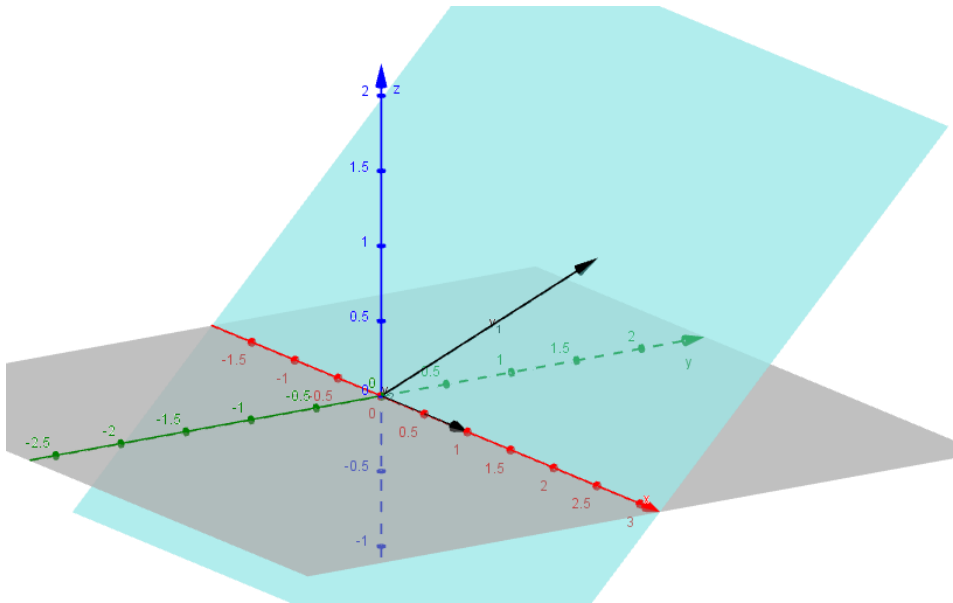


Abbildung 4.7: Ebene durch Ursprung mit Richtungsvektoren  $(1, 1, 1)^T$  und  $(1|0|0)^T$

#### 4.4.2 Beispiel Funktionsgraphen

Wie bereits oben bei den Fehlvorstellungen angesprochen, ist eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  keine reguläre Fläche. Mit einem einfachen Trick kann man diese aber in eine Parametrisierung einer regulären Fläche verwandeln.

Betrachten wir beispielsweise die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) \text{ und definieren } F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(u^1, u^2) := \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ f(u^1, u^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \sin(u^1) + \sin(u^2) \end{pmatrix} \text{ und setzen } U = \mathbb{R}^2 \text{ und}$$

$$V = \mathbb{R}^3.$$

## 4 Reguläre Flächen

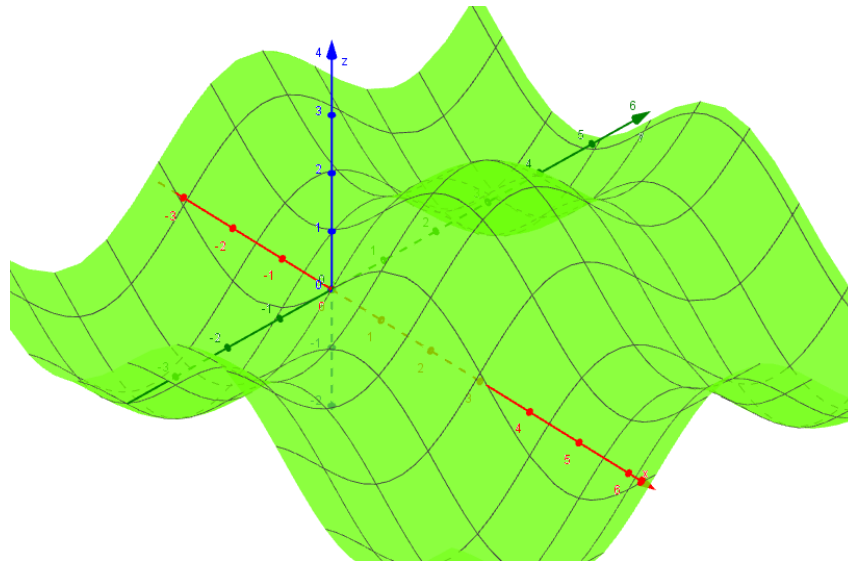


Abbildung 4.8: Visualisierung von  $F(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))^T$

Klarerweise ist hier  $F(\mathbb{R}^2) = S = S \cap \mathbb{R}^3$  und somit  $F(U) = S = S \cap V$  und eine Umkehrfunktion  $F^{-1} : V \rightarrow U$  findet man leicht, indem man  $F^{-1}(u^1, u^2, \sin(u^1) + \sin(u^2)) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$  setzt.<sup>5</sup>

Die Jacobimatrix berechnet sich folgendermaßen:

$$\frac{\partial F}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos(u^1) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cos(u^2) \end{pmatrix} \Rightarrow D_u F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos(u^1) & \cos(u^2) \end{pmatrix}$$

Somit ist also auch die zweite Bedingung für eine reguläre Fläche erfüllt.<sup>6</sup>

<sup>5</sup>Bei Funktionsgraphen kann immer  $U = \mathbb{R}^2$  gesetzt werden.

<sup>6</sup>Anmerkung: Bei Christian Bär findet sich auf S. 94 der allgemeine Beweis, dass dies für alle glatte Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit diesem Trick funktioniert.

## 4.5 Reguläre Flächen mit mehreren lokalen Parametrisierungen

### Parametrisierungen

Sowohl bei der Ebene als auch bei regulären Flächen, welche über Funktionsgraphen definiert werden, kommt man mit einer einzigen Parametrisierung aus. Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall.

Betrachtet man zum Beispiel die Einheitssphäre  $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ ,

so kann diese nicht durch denselben Trick mit einer Funktion  $F(x, y) :=$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$  parametrisiert werden, da man ein solches  $f$  nicht finden kann

und jeweils nur eine Halbkugel (ohne Äquator) damit beschreiben kann.

(Man wählt zum Beispiel für die untere Halbkugel

$U = \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 < 1\}$  mit einem dazugehörigen  $V = \{(x, y, z)^T \mid z < 0\}$

und  $F(x, y) := (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})^T$ ).

Da dieses Beispiel im Buch von Bär komplett durchgerechnet ist, verweise ich für die ausführlichen Berechnungen aller Parametrisierungen auf dieses.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>zu finden in: Christian BÄR, "Elementare Differentialgeometrie", 2. Auflage, (Berlin/New York 2010), S. 94f

## 4 Reguläre Flächen

Man benötigt (mit dieser dort gewählten Parametrisierung) sechs verschiedene lokale Parametrisierungen, um die gesamte Sphäre abzudecken. Dies soll als Motivation für die nächste Proposition dienen und kann auch durchaus in einem Vortrag so motiviert werden.

Hier möchte ich noch auf eine weitere Begrifflichkeit und eine damit vorhandene Vorstellung eingehen.

### 4.5.1 Karten

Lokale Parametrisierungen von regulären Flächen werden auch Karten genannt. Hierbei ist die Konnotation einer Landkarte naheliegend und auch treffend. Wenn man sich das Beispiel der Einheitssphäre von Christian Bär ansieht, kann man sich das in idealisierter Weise mit der Weltkugel vorstellen. Ein dreidimensionaler Globus wäre hier die Fläche, welche (aus verschiedensten Gründen) in einem Atlas, wie man ihn aus dem Alltag kennt, mit mehreren Karten lokal beschrieben wird.

Man greift sich also gedanklich einen Punkt aus dem Globus heraus und zeichnet sich eine Karte mit einer offenen Umgebung auf ein ebenes Flächenstück (Landkarte). Diese Landkarte ist dann lokal zu der offenen Umgebung um den Punkt auf dem Globus homomorph.

Auch eine Problematik, welche später noch behandelt wird, wird hier intuitiv zugänglich: Lokal ist es auf einer Karte gut möglich, die in Wirklichkeit gekrümmte Fläche (z.B. Wien) auf einer Landkarte so darzustellen, dass

#### 4.5 Reguläre Flächen mit mehreren lokalen Parametrisierungen

Verzerrungen so minimal sind, dass sie nicht auffallen. Sieht man sich aber Weltkarten an, welche versuchen, den ganzen Globus darzustellen, stimmen Flächenverhältnisse und Winkel nicht und die Karte wirkt "verzerrt". Man kann so intuitiv eine Vorstellung schaffen, dass bei der Abbildung einer Kugeloberfläche auf eine Ebene, welche nicht lokal sondern global sein soll, irgendetwas "kaputt" geht, also Längen oder Winkel zerissen werden. Weshalb dies so ist, kann mathematisch gezeigt werden, wobei man dazu die Grundlagen braucht, welche in den nächsten Kapiteln erarbeitet werden.

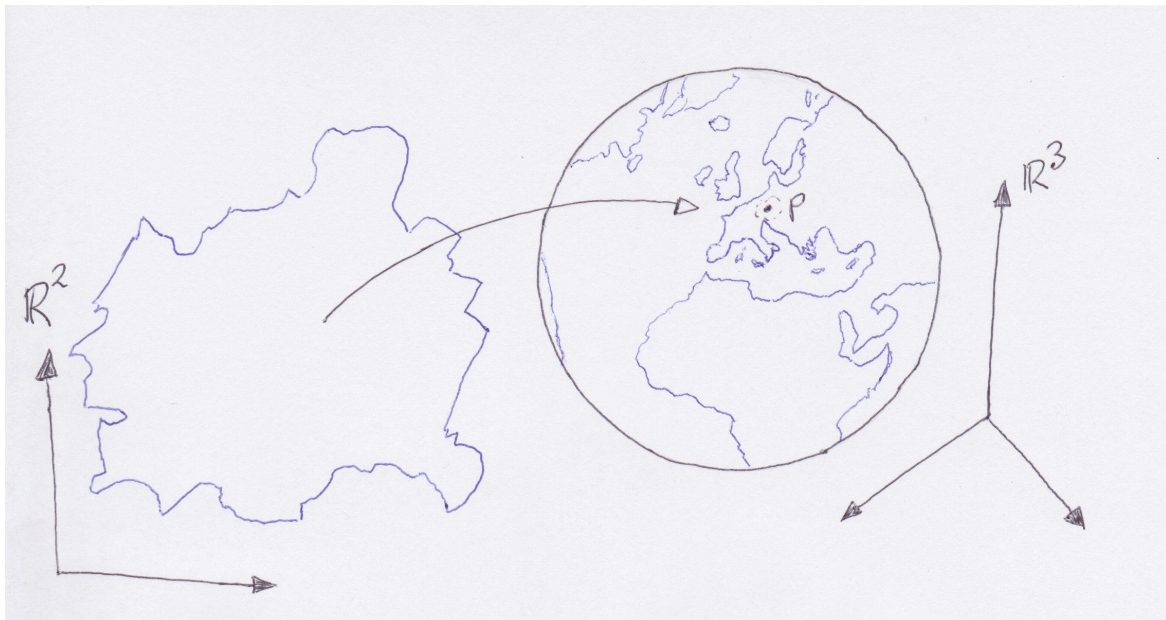


Abbildung 4.9: Vorstellung Karte und lokale Parametrisierung

Eine weitere interessante Frage, der man sich in diesem Zusammenhang intuitiv nähern kann, ist, was mit einem Koordinatengitter passiert, welches man in zweidimensionalen Karten auf die Sphäre überträgt, um zum

#### 4 Reguläre Flächen

Beispiel Positionsbestimmungen möglich zu machen (Koordinaten).

Ein Koordinatengitter besteht in einer zweidimensionalen Ebene üblicherweise aus senkrechten und waagrechten Geraden. Hierbei kann nochmal die Abbildung 4.3 dabei helfen, sich eine Grundvorstellung zu bilden. Überträgt man nun ein Koordinatengitter von der Ebene auf die Kugel, ergeben sich einige Probleme. Beispielsweise erhält man Längen- und Breitenkreise, wie sie aus Atlanten und Globen bekannt sind. Hierbei wird ein Nullmeridian definiert, den man in der zweidimensionalen Ebene beispielsweise durch den Ursprung legen kann. Wählen wir hierzu die Kugelkoordinaten:

Wir definieren  $S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$  als reguläre Fläche  
und  $F : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow S$   
mit  $F(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$  und betrachten folgende Abbildung:

Wir können jeden Punkt innerhalb des Rechteckes im  $\mathbb{R}^2$  eindeutig auf der Kugeloberfläche identifizieren. Probleme gibt es jedoch am Rand des Rechteckes. Die senkrechten Strecken bei 0 und  $2\pi$  treffen denselben Nullmeridian, was für die Eindeutigkeit der Umkehrabbildung  $F^{-1}$  ein Problem ist. Noch problematischer wird es bei den waagrechten Strecken bei  $\frac{\pi}{2}$  und  $-\frac{\pi}{2}$ . Diese markieren alle denselben Punkt auf der Kugeloberfläche, wobei die obere Strecke auf den Nordpol und die untere Strecke auf den Südpol abbildet.

## 4.5 Reguläre Flächen mit mehreren lokalen Parametrisierungen

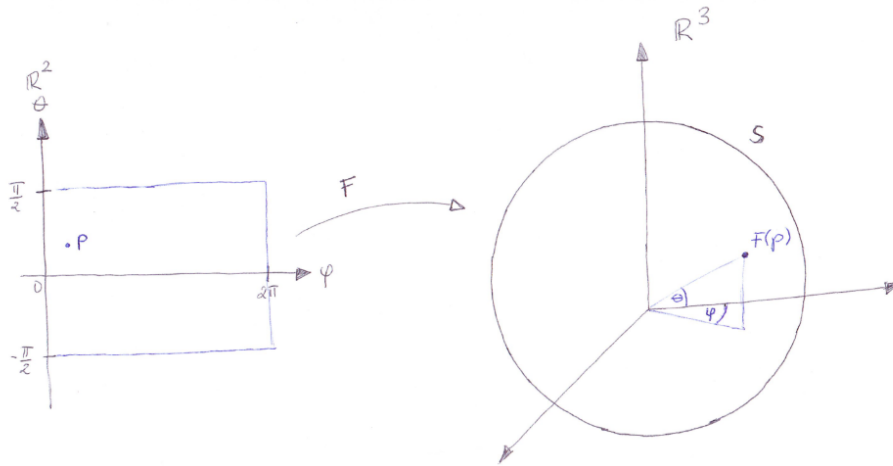


Abbildung 4.10: Kugelkoordinaten

Was passiert nun aber mit Geradenstücken, welche im  $\mathbb{R}^2$  als Koordinatengitter verwendet werden können, sprich bei einem konstanten Winkel den anderen Winkel komplett durchläuft? Dann erhält man genau die Breiten- und Längengrade, welche aus der Geographie bekannt sind.

### 4.5.2 Gedankenexperiment Polarkoordinaten

Um zu veranschaulichen, wie Geraden(stücke) aussehen können, wenn diese in verschiedenen Parametrisierungen angegeben werden, kann das folgende Beispiel in Seminaren angeführt werden. Hierbei steht wieder ein intuitiver Zugang zu verschiedenen Darstellungsarten und die Erkenntnis, dass Geraden in verschiedenen Koordinatenumgebungen ganz unterschiedlich aussehen können, im Vordergrund.

## 4 Reguläre Flächen

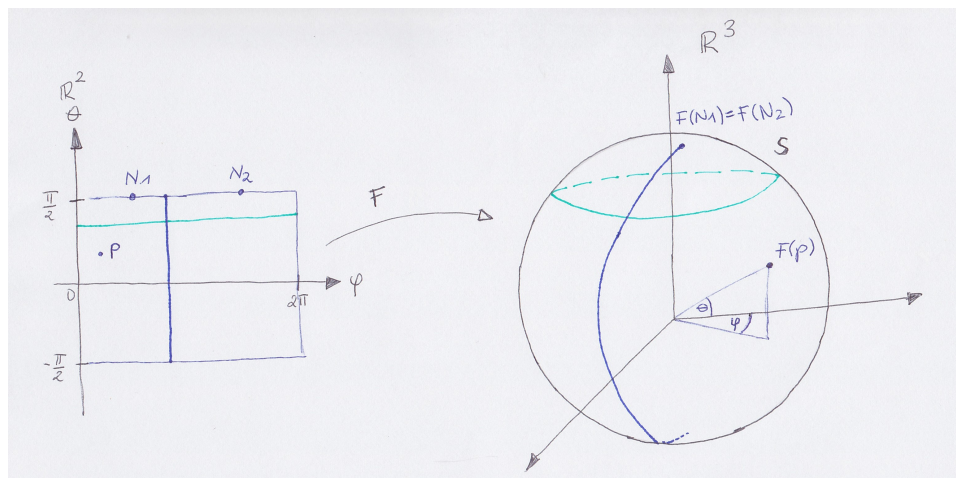


Abbildung 4.11: Längen- und Breitengrade

Betrachtet man hierzu die Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty[ \times [0, 2\pi]$  mit

$$F(x, y) := \left( \begin{array}{c} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{array} \right)^8 \text{ und}$$

$$F^{-1} = \left( \begin{array}{c} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{array} \right)$$

Also die Abbildung, welche die kartesischen Koordinaten in die Polarkoordinaten überführt. Wiederum muss der Winkel 0 mit dem Winkel  $2\pi$  identifiziert werden und jeder Punkt, bis auf seinen identifizierten Randpunkt, kann eindeutig identifiziert werden.

---

<sup>8</sup>Anmerkung: Für die korrekte Berechnung des Winkels in den Polarkoordinaten bräuchte es noch eine Fallunterscheidung, welche hier aber nicht gemacht wird.



#### 4.5 Reguläre Flächen mit mehreren lokalen Parametrisierungen

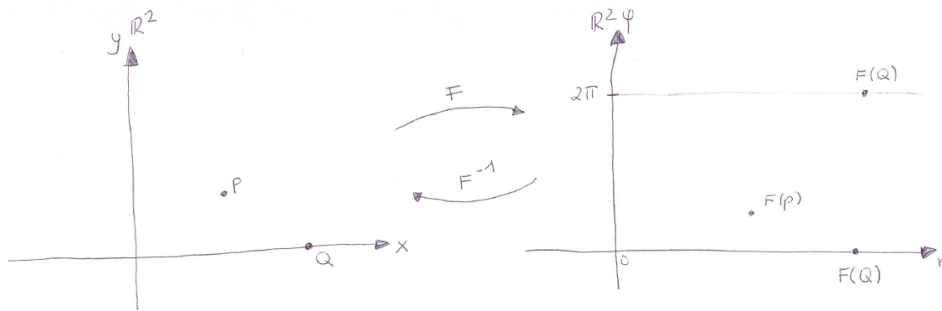


Abbildung 4.12: karthesische Koordinaten und Polarkoordinaten

Spannend ist nun die Frage, wie eine Gerade des kartesischen Koordinatensystems in der Darstellung der Polarkoordinaten aussieht. Aber auch umgekehrt, was passiert, wenn man eine "Gerade" des Polarkoordinatensystems auf das kartesische Koordinatensystem überträgt und wie es aussieht, wenn man ein komplettes Koordinatennetz überträgt.

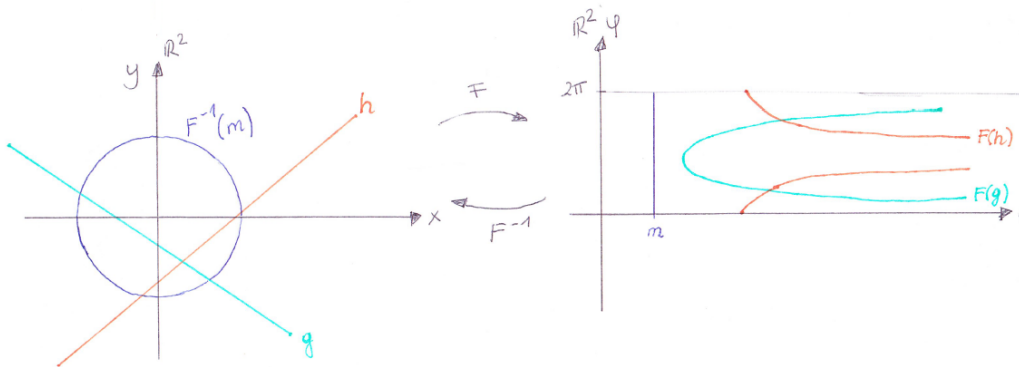


Abbildung 4.13: Geraden in verschiedenen Koordinatensystemen

Ein Geradenstück in den Polarkoordinaten, welches alle Winkel bei konstantem Radius durchläuft, wird anschaulich auf einen Kreis in den karthe-

## 4 Reguläre Flächen

sischen Koordinaten abgebildet. Umgekehrt sehen die Geraden des kartesischen Koordinatensystems im Polarkoordinatensystem ganz ungewohnt aus. Sie durchlaufen nur gewisse Winkel und (wenn sie nicht durch den Ursprung gehen) erreichen den Radius 0 nie, sondern nähern sich diesem und entfernen sich dann wieder.

Wird ein ganzes Koordinatengitter in das kartesische Koordinatensystem übertragen, erhält man dabei ein bekanntes Bild:

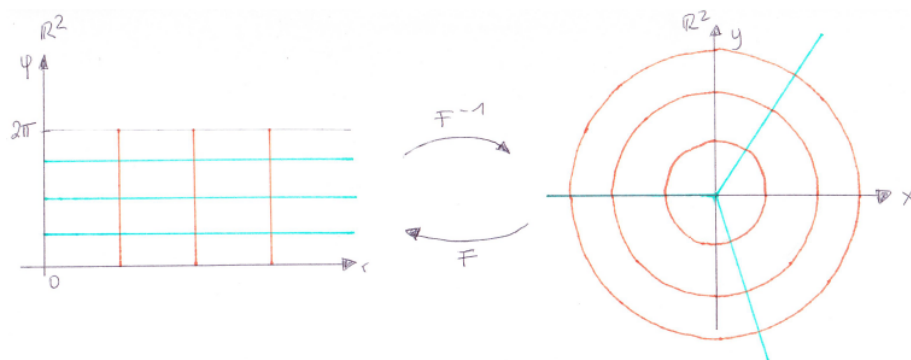


Abbildung 4.14: Koordinatennetz der Polarkoordinaten im kartesischen Koordinatensystem

## 4.6 Nullstellengebilde

Da der Nachweis der Bedingungen (i) und (ii) aus der Definition 4.1.1 einer regulären Fläche oft mühsam ist, nimmt man zur Beschreibung regulärer Flächen oft Nullstellengebilde von Funktionen zu Hilfe. Hierzu findet sich bei Christian Bär folgende Proposition:

### 4.6.1 Proposition

Sei  $V_0 \subset \mathbb{R}^3$  offen, sei  $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Wir setzen

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \mid f(x, y, z) = 0 \right\}.$$

Falls  $\forall p \in S$  gilt:

$$\text{grad}f(p) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dann ist } S \text{ eine reguläre Fläche.}$$

**Beweis** Sei  $p := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in S$ . Wegen  $\text{grad}f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{pmatrix}$  können wir ohne

Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$  ist.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine offene Umgebung  $V \subset V_0$  von  $p$ , eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^2$  von  $(x_0, y_0)$  und eine glatte

$$\text{Funktion } g : U \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so dass } S \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \right\}.$$

Setzen wir  $F : U \rightarrow V$ ,  $F(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ , so sehen wir, dass  $F$  eine

## 4 Reguläre Flächen

lokale Parametrisierung ist.<sup>9</sup>

### 4.6.2 Betrachtung der Definition und Anmerkungen

Als erste kleine Anmerkung möchte ich hier auf die Aussage von Bär “so sehen wir, dass  $F$  eine lokale Parametrisierung ist“ hinweisen. Natürlich kann man diesen Umstand erkennen, formal jedoch bezieht er sich eigentlich auf seinen Beweis über des Tricks, wie man eine reguläre Fläche mit einem Funktionsgraphen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben kann.

Doch was bringt uns diese Proposition an nützlichen Werkzeugen mit? Es genügt, ein Nullstellengebilde zu finden, dessen Gradient auf  $S$  nirgends verschwindet, um die Regularität einer Fläche nachzuweisen. Somit fällt die Überprüfung des Ranges der Jacobimatrix und der Homöomorphieeigenschaft weg und vereinfacht dies. Wichtig ist hierbei jedoch, dass dies eine hinreichende Bedingung, aber keine notwendige ist. Es kann also durchaus sein, dass sich ein Nullstellengebilde findet, deren Gradient sogar für alle Punkte der Fläche verschwindet, die aber trotzdem regulär ist.

---

<sup>9</sup>in: Christian BÄR, “Elementare Differentialgeometrie”, 2. Auflage, (Berlin/New York 2010), S. 96

### 4.6.3 Beispiel Ellipsoid

Betrachten wir beispielsweise das Ellipsoid  $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$ , so lässt sich als Nullstellengebilde leicht die Funktion  $f(x, y, z) := \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{1^2} - 1$  finden.

Wir wählen als  $V = \mathbb{R}^3$ . Dann erhalten wir die Fläche

$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0 \right\}$  als Fläche, die über ein Nullstellengebilde

definiert ist. Um nachzuweisen, dass es sich bei diesem Ellipsoid um eine reguläre Fläche handelt, reicht es also zu zeigen, dass der Gradient dieser Nullstellenfunktion für alle Punkte auf dem Ellipsoid nicht verschwindet.

Wir betrachten nun  $\text{grad}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{2y}{9} \\ 2z \end{pmatrix}$ . Dieser wäre nur  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

bei  $p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , welcher aber nicht auf  $S$  liegt. Somit ist dieses Ellipsoid eine reguläre Fläche.<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>Der allgemeine Beweis für Ellipsoide, welche in dieser Form als Nullstellengebilde einer Funktion gegeben sind, findet sich bei Bär auf Seite 96f.

## 4 Reguläre Flächen

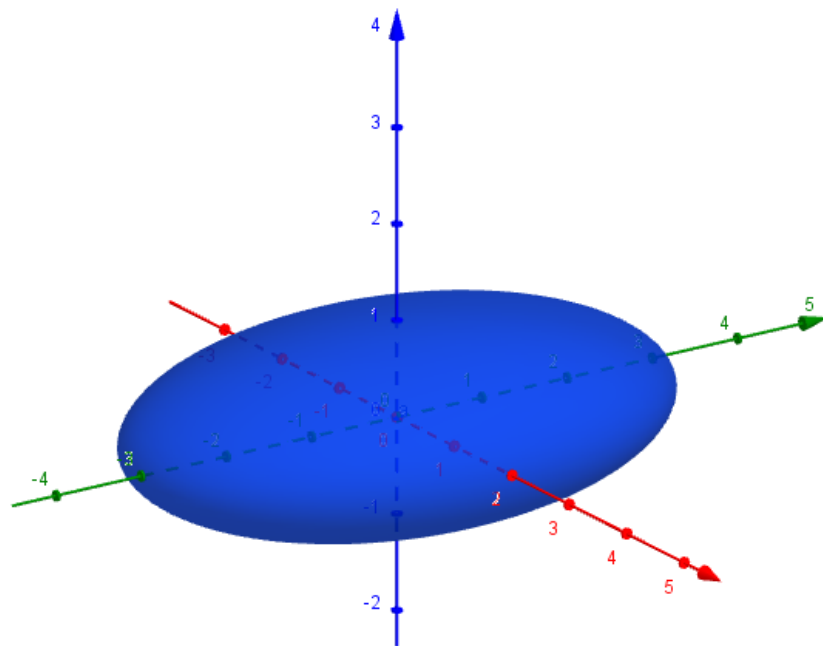


Abbildung 4.15: Ellipsoid mit  $S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 = 0\}$

# 5 Glatte Abbildungen

## 5.1 Einstieg und intuitiver Zugang

Im vorherigen Kapitel haben wir uns damit beschäftigt, was reguläre Flächen überhaupt sind und welche Methoden es gibt, zu überprüfen, ob Flächen regulär sind oder nicht. Nun geht es darum, über die Form dieser Flächen etwas auszusagen, auf ihnen Geometrie zu betreiben. Es gibt viele Möglichkeiten, etwas über das Verhalten von Funktionen von  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auszusagen. Eine davon ist ein zentraler Begriff der Geometrie: Die Krümmung, mit deren Hilfe sich bestimmen lässt, wie "stark" sich eine Funktion in der Umgebung eines Punktes vom Graphen einer Geraden unterscheidet. Hierbei kann zunächst auch auf einen intuitiven Zugang zum Krümmungsbegriff aufgebaut werden. Zum Beispiel kann die Vorstellung nützlich sein, dass die Krümmung in einer Weise angibt, wie "stark" sich eine Kurve in einem Punkt in diesem vom Graph einer Geraden unterscheidet, beziehungsweise ihre Richtung ändert.

## 5 Glatte Abbildungen

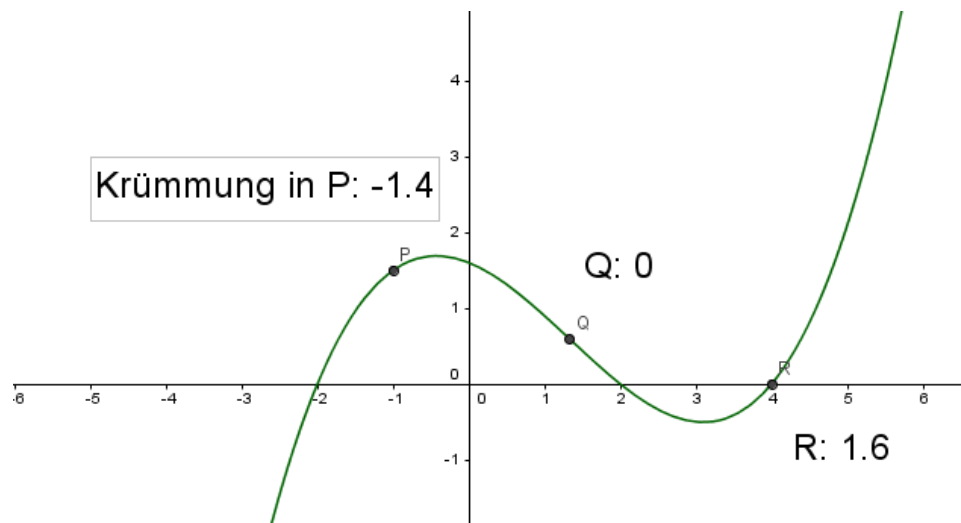


Abbildung 5.1: Krümmung in Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$

Sieht man sich intuitiv eine Funktion  $f$  von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  an, so kann hier folgender Ansatz gesetzt werden:

Wir stellen uns den Graphen dieser Funktion als Gebirgslandschaft vor. Diese lässt sich wieder als reguläre Fläche darstellen mit  $F(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$

Legt man nun auf eine solche Gebirgslandschaft gedanklich zwei Wanderwege, die zum Beispiel genau in die Richtung der Koordinatenachsen verlaufen, so kann man diese als Kurven beschreiben, welche auf dieser Fläche verlaufen.

Um solch eine zu basteln kann man beispielsweise  $f(x, y) = p_1(x) + p_2(y)$  setzen, wobei  $p_1(x)$  und  $p_2(y)$  Polynomfunktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  sind, was



## 5.1 Einstieg und intuitiver Zugang

die stetige Differenzierbarkeit und den vollen Rang der Jacobimatrix von

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \text{ gewährleistet.}$$

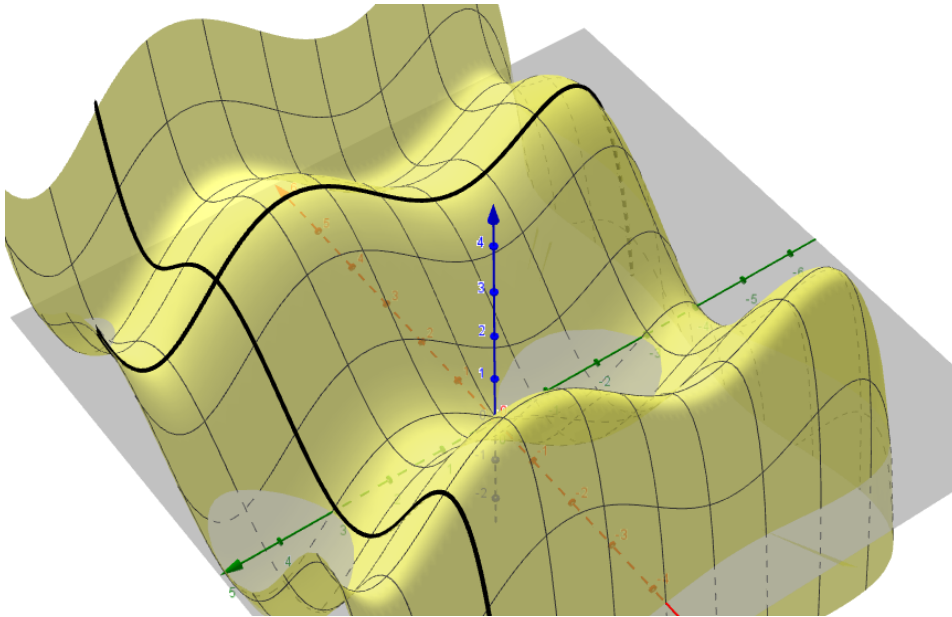


Abbildung 5.2: Gebirgslandschaft als Funktionsgraph mit Kurven als Wanderwege

Definiert man nun  $c_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ f(t, 2) \end{pmatrix}$  und  $c_2(t) := \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ f(3, t) \end{pmatrix}$ , so erhält

man zwei Kurven, welche auf der Fläche in die Koordinatenrichtungen verlaufen.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Anmerkung: Die Konstanten 2 und 3 wurden nur aus optischen Gründen für diese Grafik gewählt, können im Allgemeinen beliebig gewählt werden.

## 5 Glatte Abbildungen

Diese zwei Kurven sind stetig differenzierbar. Die Geschwindigkeitsvektoren der Kurven  $c_1$  und  $c_2$  im Schnittpunkt  $(3|2)$  sagen auch etwas über das Verhalten der Fläche in diesem Punkt aus, zumindest in die zwei Richtungen, in welche die Kurven verlaufen, da diese sich auf der Fläche bewegen.<sup>2</sup> Dies wäre ein erster Anhaltspunkt, eine Vorstellung für einen Krümmungsbegriff auf einer Fläche zu schaffen.

Betrachten wir im Folgenden  $c_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'(t,2) \end{pmatrix}$  und  $c_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'(3,t) \end{pmatrix}$ , so können wir deren Ableitungen auch im Punkt  $(3|2)$  berechnen und erhalten zwei Ableitungsvektoren der Form  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und können diese im Punkt  $P := (3|2|f(3,2))$  anhängen.

---

<sup>2</sup>Anmerkung: Eigentlich sagen diese zwei Geschwindigkeitsvektoren nicht nur über diese zwei gewählten Richtungen etwas aus, aber darauf wird später eingegangen.

## 5.1 Einstieg und intuitiver Zugang

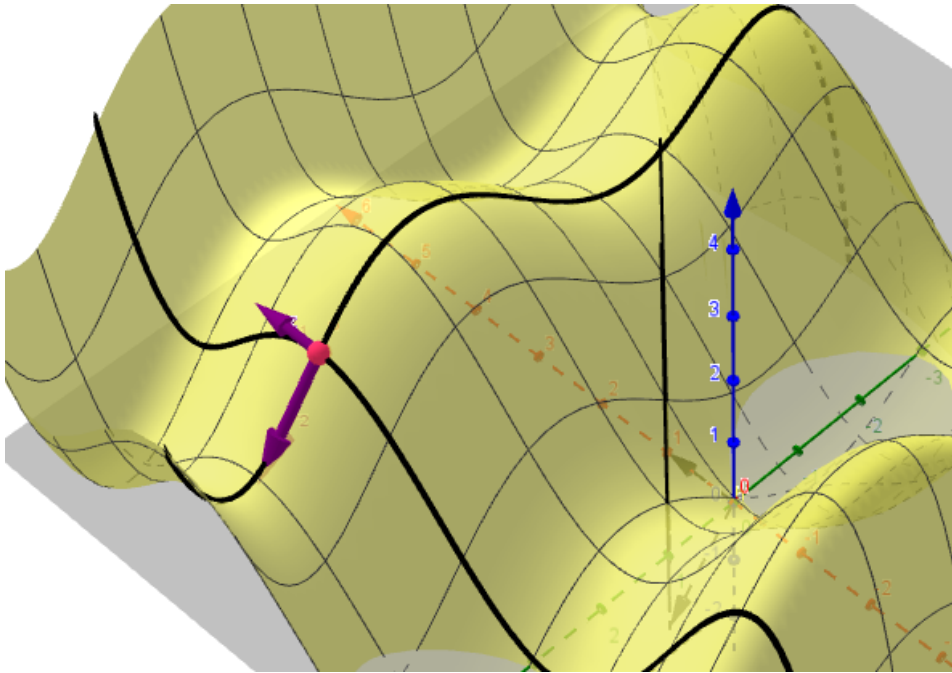


Abbildung 5.3: Ableitungen der Kurven in der Gebirgslandschaft

Wir definieren folgende Ebene:

$$E(\lambda, \mu) := P + \lambda \cdot \dot{c}_1(3) + \mu \cdot \dot{c}_2(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ f(3,2) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \text{ und}$$

betrachten diese.

Hierbei kann man die Beobachtung machen, dass diese in einer Form eine lineare Bestapproximation an die Fläche im Punkt  $P$  darstellt. Mit dieser Idee und Motivation lassen sich erste Gedankenexperimente durchspielen, wie man über das Verhalten einer Fläche in der Nähe eines Punktes Aussagen getroffen werden können, indem die bereits bekannten Mittel aus der mehrdimensionalen Analysis angewendet werden.

## 5 Glatte Abbildungen

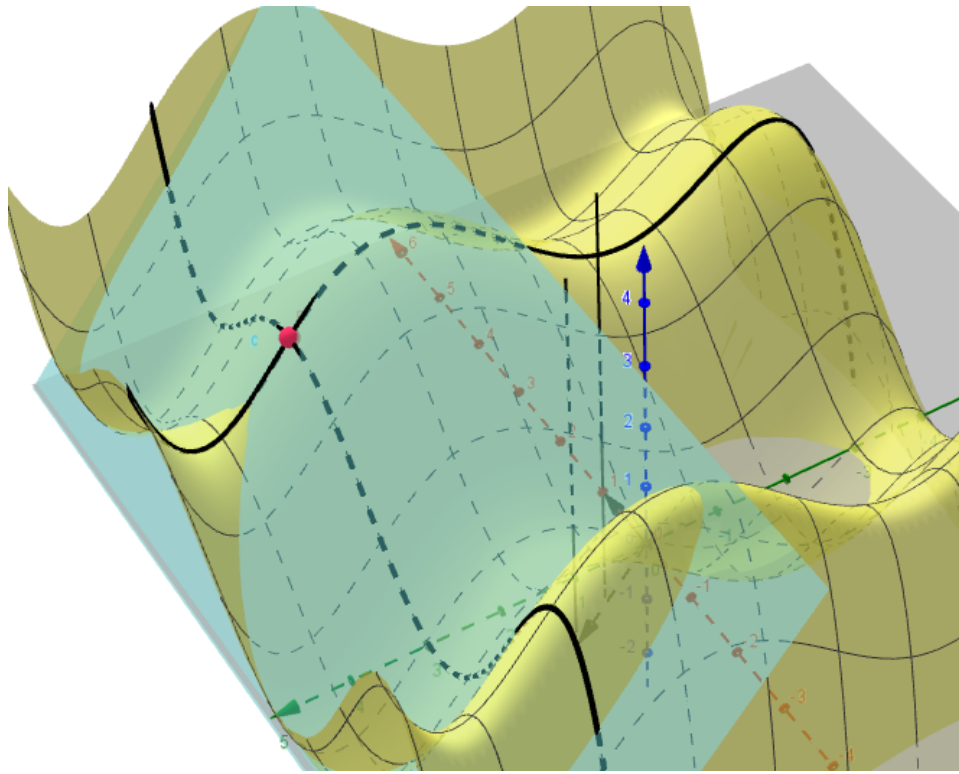


Abbildung 5.4: Tangentialebene an eine Gebirgslandschaft

### 5.2 Problemstellung

Im Wesentlichen muss nun versucht werden, die Konzepte der Differentialrechnung, welche aus dem  $\mathbb{R}^n$  bekannt sind, auf reguläre Flächen zu übertragen, um auf diesen Geometrie betreiben zu können. Im vorherigen Beispiel war die reguläre Fläche auf eine Funktion von  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zurückzuführen, wo bereits bekannt ist, wie (partielle) Ableitungen gebildet werden können. Im Allgemeinen sind aber reguläre Flächen nicht über Funktionsgraphen gegeben. Deshalb werden, um später Werkzeuge

entwickeln zu können, die auf einen Krümmungsbegriff hinführen, im Folgenden drei verschiedene Fälle angesehen. Die Glattheit einer Funktion impliziert, dass diese unendlich oft stetig differenzierbar ist. Jedoch ist mit dem momentanen Wissensstand noch nicht definiert, was Glattheit oder Differenzierbarkeit für Funktionen bedeuten, deren Definitionsmengen oder Zielmengen auf regulären Flächen sind.

Deshalb werden drei Fälle untersucht werden:

- (1) Funktionen, deren Bild auf regulären Flächen liegt - die "hinein" abbilden
- (2) Funktionen, deren Definitionsbereich auf regulären Flächen liegt - die "hinaus" abbilden und
- (3) Funktionen, deren Definitionsbereich und deren Bild auf regulären Flächen liegen - die "dazwischen" abbilden

Die Grundidee dahinter ist, dass man kleine Umgebungen auf regulären Flächen auf zweidimensionale Karten zurückführt, indem man Funktionen verknüpft und auf den bekannten  $\mathbb{R}^2$  zurückgreift.

## 5 Glatte Abbildungen

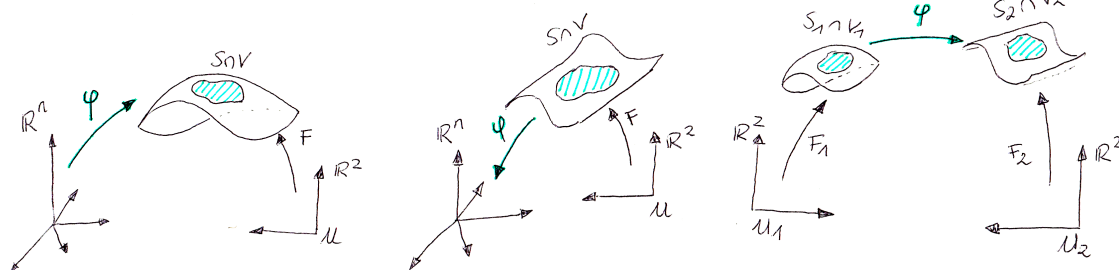


Abbildung 5.5: Übersicht der zu behandelnden Abbildungen

## 5.3 Theorie

Folgende Beweise, Definitionen und Propositionen sind (in nur leicht abgeänderter Form) bei Bär zu finden.

### 5.3.1 Proposition

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche und  $F : U \rightarrow S \cap V$  eine lokale Parametrisierung von  $S$ . Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine glatte Abbildung mit  $\varphi(W) \subset S \cap V$ . Dann ist  $\varphi$  als Abbildung von  $W$  nach  $\mathbb{R}^3$  glatt genau dann, wenn  $F^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  glatt ist.

**Beweis** Sei  $\psi := F^{-1} \circ \varphi$  eine glatte Abbildung, so ist  $\varphi = F \circ \psi$  als Verkettung zweier glatter Abbildungen ebenfalls glatt.

Die Rückrichtung des Beweises gestaltet sich etwas umständlicher, da zuerst geklärt werden muss, was es bedeutet, dass  $F^{-1}$  glatt ist, da deren Definitionsbereich auf einer regulären Fläche und nicht im euklidischen Raum liegt.

Sei  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  glatt. Sei  $p \in W$ . Wir setzen  $q := \psi(p) \in S \cap V$  und  $u_0 := F^{-1}(q) \in U$ .

Wir schreiben  $F(u^1, u^2) := \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) \\ y(u^1, u^2) \\ z(u^1, u^2) \end{pmatrix}$ . Da das Differential  $D_{u_0}F$  maximalen Rang hat, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die  $2 \times 2$ -Matrix  $\left( \frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1, u^2)}(u_0) \right)$  invertierbar ist.

Wir definieren die Abbildung

$G : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $G(u^1, u^2, t) = \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) \\ y(u^1, u^2) \\ z(u^1, u^2) + t \end{pmatrix}$  und berechnen ihr Differential an der Stelle  $(u^1, u^2, t) = (u_0^1, u_0^2, 0)$ :

$$D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial x}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial y}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial z}{\partial u^2}(u_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte liefert:

$$\det D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G = \det \left( \frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1, u^2)}(u_0) \right) \neq 0.$$

## 5 Glatte Abbildungen

Somit ist  $D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G$  invertierbar und wir können nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung  $U_1 \subset U \times \mathbb{R}$  von  $(u_0^1, u_0^2, 0)$  und eine offene Umgebung  $V_1 \subset V$  von  $q$  finden, sodass

$G|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$  ein Diffeomorphismus ist. Wir setzen  $W_1 := \varphi^{-1}(V_1)$ . Dann ist  $W_1$  eine offene Umgebung von  $p$ . Für  $p' \in W_1$  gilt  $G^{-1} \circ \varphi(p') = (F^{-1} \circ \varphi(p'), 0)$  denn  $F(u^1, u^2) = G(u^1, u^2, 0)$ . Da  $G^{-1} \circ \varphi$  als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt ist, gilt dies auch für  $F^{-1} \circ \varphi$  auf  $W_1$ . Nun ist  $W_1$  eine offene Umgebung des beliebig vorgegebenen Punktes  $p$  und die Aussage ist bewiesen.

### 5.3.2 Korollar

Sei  $S$  eine reguläre Fläche. Seien  $(U_1, F_1, V_1)$  und  $(U_2, F_2, V_2)$  lokale Parametrisierungen. Dann ist  $F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$  glatt.

### 5.3.3 Proposition

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche,  $p \in S$  und  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Es gibt eine offene Umgebung  $V$  von  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  und eine Fortsetzung  $\tilde{\varphi}$  von  $\varphi|_{S \cap V}$  auf  $V$ , die um  $p$  glatt ist.



## 5.4 Betrachtung der Theorie

(2) Es gibt eine lokale Parametrisierung  $(U, F, V)$  mit  $p \in V$ , sodass  $\varphi \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um  $F^{-1}(p)$  glatt ist.

(3) Für alle lokalen Parametrisierungen  $(U, F, V)$  mit  $p \in V$  ist  $\varphi \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt um  $F^{-1}(p)$ .

### 5.3.4 Definition

Gelten die Bedingungen (1) bis (3) aus Proposition 5.3.3, so nennen wir  $\varphi$  glatt nahe  $p$ .

### 5.3.5 Definition

Seien  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  reguläre Flächen. Wir nennen  $\varphi$  glatt nahe  $p$ , falls es eine lokale Parametrisierung  $(U_1, F_1, V_1)$  von  $S_1$  um  $p$  gibt und eine lokale Parametrisierung  $(U_2, F_2, V_2)$  von  $S_2$  um  $\varphi(p)$  derart, dass  $F_2^{-1} \circ \varphi \circ F_1 : F_1^{-1}(\varphi^{-1}(V_2) \cap V_1) \rightarrow U_2$  nahe  $p$  glatt ist.

## 5.4 Betrachtung der Theorie

Grob gesagt, liefert die Theorie das Ergebnis, dass die Differenzierbarkeit von Funktionen, deren Ziel- oder Definitionsbereich auf regulären Flächen liegt, mit Hilfe von Parametrisierungen überprüft werden können. Es ist also

## 5 Glatte Abbildungen

erlaubt, Funktionen mit glatten Abbildungen in die offenen Umgebungen des  $\mathbb{R}^2$  von Parametrisierungen "runter zu schießen" und dort zu rechnen. Und hierbei hängt es auch nicht davon ab, welche Parametrisierung gewählt wird - ist eine Abbildung in einer glatt, ist sie es in allen. Man kann die Glattheit also in einer beliebigen Karte um einen Punkt überprüfen. Die Glattheit ist aber immer nur lokal um einen Punkt  $p$  gewährleistet.

In der Proposition 5.3.1 geht es um die Glattheit von Abbildungen, die in reguläre Flächen hinein abbilden. Die Regularität von Flächen garantiert, dass diese lokal um jeden Punkt homöomorph zu offenen Umgebungen im  $\mathbb{R}^2$  sind. Dies wird ausgenutzt und man betrachtet für die Differenzierbarkeit einer Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch Anhängen einer Karte die Funktion  $F^{-1} \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ . Es macht also keinen Unterschied für die Differenzierbarkeit, ob die Abbildung in einer kleinen Umgebung einer regulären Fläche oder in einer Umgebung einer zugehörigen Karte im  $\mathbb{R}^2$  betrachtet wird.

Um die Glattheit von  $F^{-1}$  zu beweisen, wird ein kleiner Trick angewandt und eine neue Abbildung  $G$  definiert:  $G(u^1, u^2, t) := \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) \\ y(u^1, u^2) \\ z(u^1, u^2) + t \end{pmatrix}$ . Diese bildet nun also von  $[u^1, u^2] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ab, wobei wir für  $t = 0$  genau die ursprüngliche Fläche enthalten. Die Bijektivität dieser Abbildung wird überprüft und das Problem somit auf die bekannte, mehrdimensionale Analysis zurückgeführt.

#### 5.4 Betrachtung der Theorie

Geometrisch bedeutet das, dass man einen vertikalen Zylinder über die Fläche  $S \cap V$  legt, um so eine dreidimensionale Umgebung zu erhalten. Hier wird noch angemerkt, dass dies o.B.d.A geschieht. Es wäre nämlich beispielsweise möglich, dass  $\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1,u^2)}\right)$  nicht vollen Rang hätte. Dann könnte man aber einen horizontalen Zylinder anlegen und entweder die Abbildung

$$\tilde{G}(u^1, u^2, t) := \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) + t \\ y(u^1, u^2) \\ z(u^1, u^2) \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise}$$

$$\bar{G}(u^1, u^2, t) := \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) \\ y(u^1, u^2) + t \\ z(u^1, u^2) \end{pmatrix} \text{ definieren.}$$

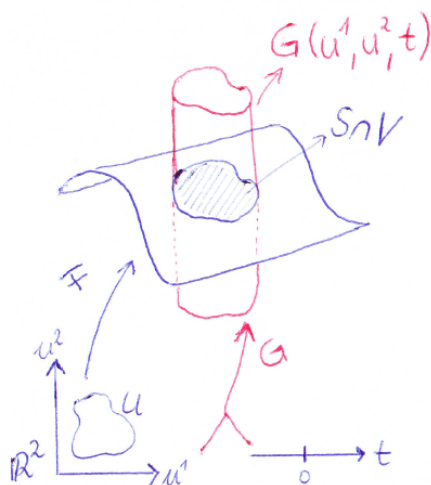


Abbildung 5.6: Veranschaulichung des Tricks

## 5 Glatte Abbildungen

Ersetzt man in der Proposition 5.3.1 den beliebig gewählten  $\mathbb{R}^n$  durch  $\mathbb{R}^2$  und wählt für die Funktion  $\varphi := \tilde{F}$  eine Funktion einer Parametrisierung, so kommt man auf das Resultat des Kartenwechsels. Hier garantiert die Proposition, dass die Differenzierbarkeit von Funktionen, welche in reguläre Flächen hinein abbilden, nicht von der Wahl der Karte abhängig ist. Es kann also eine möglichst geschickte Parametrisierung gewählt werden, in welcher die Differenzierbarkeit leicht nachzurechnen ist und diese ist somit für beliebige Parametrisierungen gezeigt. Dieses wichtige Erkenntnis erwähnt Bär in einem eigenen Korollar (hier Korollar 5.3.2). Es existiert zwischen verschiedenen Karten, welche eine gemeinsame offene Umgebung auf einer regulären Fläche kartieren, immer ein Diffeomorphismus.

Auch bei den Abbildungen, welche den Definitionsbereich auf regulären Flächen haben, nutzt man dann in der Proposition 5.3.3 die Karten. Die Schwierigkeit hier besteht darin, dass es keine offene Umgebung um  $S$  im  $\mathbb{R}^3$  gibt, da eine reguläre Fläche ja lokal immer homöomorph zu einem Flächenstück ist und jede noch so kleine offene Kugel nicht in einer regulären Fläche enthalten sein kann. Man wählt nun wieder eine Parametrisierung um einen Punkt und weist die Differenzierbarkeit von  $\varphi \circ F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  nach, was mit den bekannten Mitteln der mehrdimensionalen Analysis bewerkstelligt werden kann.

Als letztes werden in der Definition 5.3.5 noch Abbildungen betrachtet, welche von einer regulären Fläche in eine andere reguläre Fläche abbilden. Wieder wird mit Karten gearbeitet, indem man anstatt der Differenzierbarkeit einer Abbildung von  $S_1 \rightarrow S_2$  die Differenzierbarkeit von Abbildungen

## 5.5 Anknüpfungspunkte und Fehlvorstellungen

$U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2$  überprüft. Dies wird bewerkstelligt, indem man durch Verkettung eine neue Abbildung definiert:  $\psi := F_2^{-1} \circ \varphi \circ F_1$ .

Vereinfacht gesagt lassen sich mit Hilfe von Karten Fragen der Differenzierbarkeit auf regulären Flächen in bekanntes Terraint zurückführen, sodass "alles passt". Sowohl Abbildungen, welche auf regulären Flächen definiert sind, als auch Abbildungen, die auf reguläre Flächen abbilden oder auch solche, die zwischen zwei regulären Flächen abbilden, können mit Hilfe von Karten betrachtet werden. Und noch dazu ist es egal, welche Parametrisierung verwendet wird, da auch Kartenwechsel untereinander diffeomorph sind.

## 5.5 Anknüpfungspunkte und Fehlvorstellungen

Bei diesem Kapitel ist es von essenzieller Bedeutung, dass der Begriff der Ableitung aus der mehrdimensionalen Analysis bekannt und verständlich ist und auf dieser Grundvorstellung aufgebaut werden kann.

Hierbei kann es in Seminaren nützlich sein, vor dem Start mit der eigentlichen Materie eine kleine Wiederholung aus der Analysis zu geben. Dabei ist es wichtig, die allgemeine Differenzierbarkeit einer Funktion von partieller Differenzierbarkeit zu unterscheiden und nochmals auf die Vorstellung der linearen Bestapproximation hinzuweisen. Diesen Unterschied kann man gut mit den Wanderwegen auf der Gebirgslandschaft vergleichen. Partielle Differenzierbarkeit heißt in diesem Sinne, dass die Steigung der Wanderwege in

## 5 Glatte Abbildungen

einem Punkt lokal durch Geraden approximierbar sind. Differenzierbarkeit heißt in dem Sinne, dass die Ebene, welche durch die zwei Steigungsvektoren aufgespannt werden, tatsächlich eine lineare Bestapproximation an die Gebirgslandschaft bildet.

Betrachtet man beispielsweise eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dann bedeutet Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$ , dass  $\lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{f(x) - (A \cdot (x - x_0) + f(x_0))}{|x - x_0|}$  existiert, wobei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix ist. Man nennt diese dann das Differenzial von  $f$  in  $x_0$  und schreibt  $D_{(x_0)}f$ . Diese Matrix ist, wenn der Grenzwert existiert, ident mit der Jacobimatrix und lässt sich also auch aufschreiben als

$$D_{(x_0)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x^m} \end{pmatrix} = A$$

Ist eine Abbildung in jedem Punkt ihrer Definitionsmenge differenzierbar, so nennt man sie differenzierbar. Ist dies beliebig oft möglich, dann nennt man eine Abbildung glatt. Als Diffeomorphismus bezeichnet man eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ <sup>3</sup>, wenn diese bijektiv und glatt ist und deren Umkehrfunktion ebenfalls glatt ist.

Diese Begriffe der mehrdimensionalen Analysis müssen bei Bedarf wiederholt werden. Je nach Arbeitsgruppe und Zusammensetzung der Teilnehmer/innen ist dies aber möglicherweise auch nicht nötig.

---

<sup>3</sup>bzw. offenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$

## 5.6 Präsentation und Methodik

Im Einstieg ist es sicherlich ratsam, zuerst wieder mit einer Motivation zu beginnen. Diese sollte dazu motivieren, weshalb man Abbildungen die im Zusammenhang mit regulären Flächen stehen überhaupt differenzieren will. Gleichzeitig kann hier das Bild der linearen Bestapproximation nochmals aufgefrischt werden. Ein konkretes Beispiel mit einer Gebirgslandschaft kann hierbei die Begriffe aus der mehrdimensionalen Analysis ebenfalls nochmals in Erinnerung rufen und eine Vorstellung schaffen.

Da die nachfolgenden Propositionen und Definitionen dazu dienen, eine korrekte Handhabung mit gewissen Abbildungen zu gewährleisten, kann eine Übersicht dabei helfen, den roten Faden nicht zu verlieren. Hierbei können, wenn mehrere Tafeln in einem Hörsaal oder Seminarraum vorhanden sind, eine dazu verwendet werden, die drei zu behandelnden Fälle zu visualisieren und eine Art Fahrplan zu geben, wo man sich gerade befindet. Ebenfalls könnte diese Platz bieten, die wichtigsten Erkenntnisse aus diesem Kapitel festzuhalten.

Ob man die Beweise durchgeht oder nur Beweisskizzen anbietet, ist natürlich sowohl Geschmacksache, als auch abhängig von dem Zweck des Seminars oder der Vorlesung. Auf jeden Fall sollte aber zuvor auf die Probleme eingegangen werden, um eine Motivation für die Notwendigkeit des Folgenden zu geben. Während der Propositionen und Beweise können Grafiken nicht nur zur Veranschaulichung genommen werden, sondern auch helfen, den

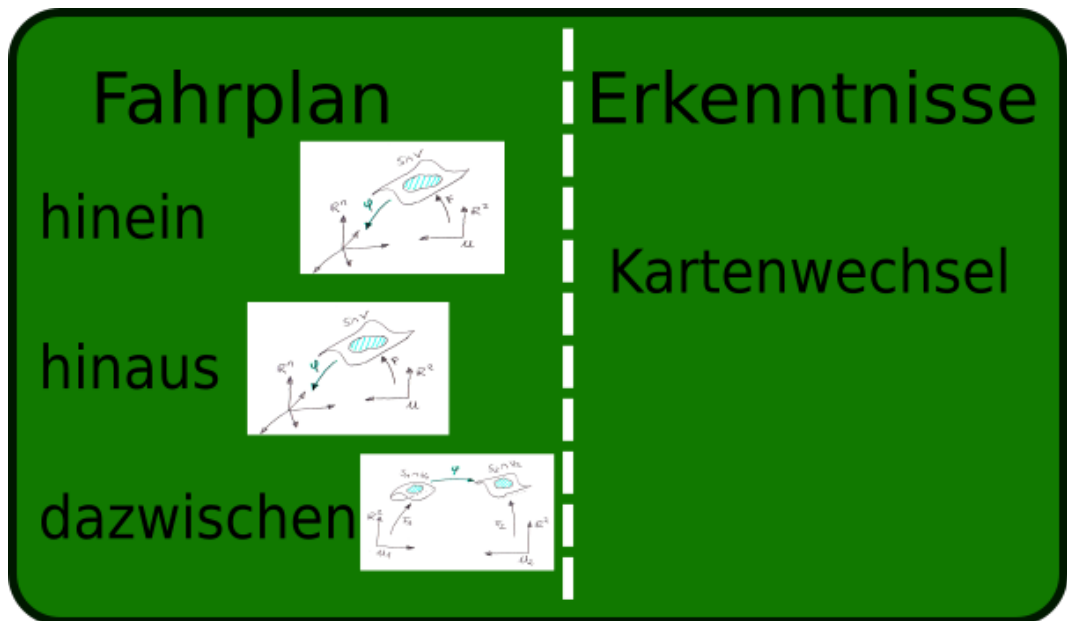


Abbildung 5.7: Fahrplan- und Erkenntnistafel

Überblick zu behalten. Eine einheitliche Bezeichnung für die Funktionen, deren Glattheit nachgewiesen werden soll, kann ebenfalls helfen, die Orientierung nicht zu verlieren. In dieser Arbeit wurden im Theorieteil diese jeweils mit  $\varphi$  bezeichnet, Abbildungen die zu Parametrisierungen gehören mit  $F$  und neu zusammengesetzte Abbildungen, die aus Verkettung anderer entstehen mit  $\psi$ .



## 5.7 Diffeomorphe Flächen

Nun gilt es noch formal zu klären, was diffeomorphe Flächen sind. Hierzu ist bei Bär folgende Definition zu finden.

### 5.7.1 Definition

Seien  $S_1$  und  $S_2 \subset \mathbb{R}^3$  reguläre Flächen. Eine Abbildung  $f : S_1 \rightarrow S_2$  heißt Diffeomorphismus, falls  $f$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  glatt sind. Existiert ein solche Diffeomorphismus, dann heißen die Flächen  $S_1$  und  $S_2$  diffeomorph.

Diese Definition lässt sich am besten mit Hilfe eines Beispielen veranschaulichen.

### 5.7.2 Beispiel Kugel - Ellipsoid

Definieren wir zunächst die Sphäre.

$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} \text{ und ein Ellipsoid } S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \right\}.$$

## 5 Glatte Abbildungen

Dann findet sich ein  $f$  mit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  mit  $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{3} \\ \frac{y}{2} \\ z \end{pmatrix}$ , welche die

Sphäre in das Ellipsoid überführt. Ebenfalls führt  $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x \\ 2y \\ z \end{pmatrix}$  das

Ellipsoid in die Sphäre über. Überprüfen wir im ersten Schritt, ob  $g$  die

Umkehrfunktion von  $f$  ist.  $f(g(x, y, z)) = f(3x, 2y, z) = \begin{pmatrix} \frac{3x}{3} \\ \frac{2y}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

Somit ist  $g = f^{-1}$ .

$D_{(xyz)}f = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $D_{(xyz)}f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  garantieren,

dass  $f$  und  $f^{-1}$  glatt auf ganz  $\mathbb{R}^3$  sind, und somit  $\forall p \in S_1$  und  $\forall \tilde{p} \in S_2$ .

Somit sind auch sicherlich  $f|_{S_1}$  und  $f^{-1}|_{S_2}$  glatt.

Damit ist bewiesen, dass die Sphäre und das oben definierte Ellipsoid diffeomorph sind.<sup>4</sup>

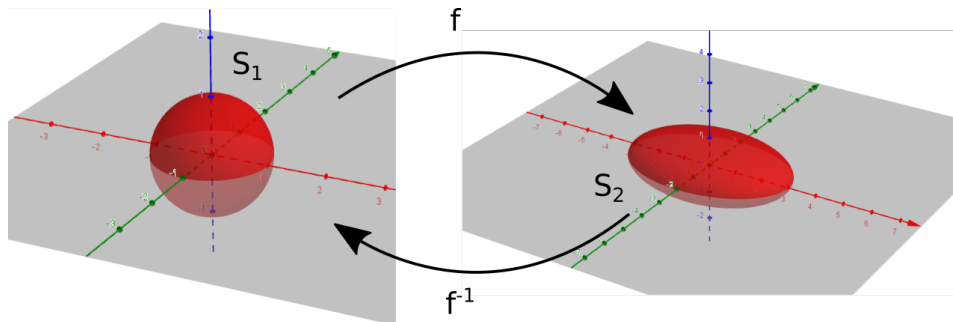


Abbildung 5.8: Diffeomorphismus Sphäre Ellipsoid

### 5.7.3 Beispiel Ebene - Funktionsgraph

Wenn man sich nochmals das Beispiel der Gebirgslandschaft in Erinnerung ruft, bietet sich sofort ein zweites Beispiel für diffeomorphe Flächen. Zur Erinnerung: Wir hatten eine  $C^\infty$  Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und über diese eine

lokale Parametrisierung  $F(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$  gefunden, mit

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3. \text{ Somit ist } S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

<sup>4</sup>Anmerkung: Natürlich lässt sich das auch für allgemeine Ellipsoide zeigen. Bei Bär findet sich auf Seite 105 eine glatte Funktion, welche die Sphäre in einen beliebigen Ellipsoiden überführt.

## 5 Glatte Abbildungen

Sei  $S_2$  die  $xy$ -Ebene im  $\mathbb{R}^3$ , und somit  $S_2 := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Dann lässt sich ein Diffeomorphismus durch die Funktion

$$g : S_1 \rightarrow S_2, g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } g^{-1} : S_2 \rightarrow S_1, g^{-1}(x, y, 0) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

finden. Durch die allgemeine Formulierung ist gewährleistet, dass dies für alle regulären Flächen gilt, welche über einen Funktionsgraphen einer  $C^\infty$  Funktion von  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert sind.

# 6 Tangentialebenen an regulären Flächen

## 6.1 Einstieg und Problemstellung

Beim Beispiel 5.7.2 auf Seite 57 haben wir streng genommen etwas gemacht, was wir eigentlich gar nicht dürften. Wir haben die Jacobimatrix von  $f$  und  $f^{-1}$  von Funktionen berechnet, welche von  $S_1 \rightarrow S_2$  bzw.  $S_2 \rightarrow S_1$  definiert waren. Dies war deshalb möglich, weil wir die Funktionen als Funktionen von  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  aufgefasst haben. Aus der Analysis ist bekannt, wie man Funktionen, welche zwischen euklidischen Räumen abbilden, differenziert. Reguläre Flächen (mit Ausnahme der Ebene) sind jedoch keine Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$ . Deshalb müssen wir eine Methode finden, wie man eine Funktion, welche zwischen regulären Flächen abbildet, differenzieren kann. Somit können lokale Aussagen über die Fläche in Nähe von Punkten getroffen werden. Um dies zu motivieren, kann es von Vorteil sein, nochmals bekannte Anknüpfungspunkte zu zeigen.

## 6 Tangentialebenen an regulären Flächen

Bei einer differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$  kann mit Hilfe der ersten Ableitung  $f'(x)$  eine Tangente an jeden Punkt der Funktion gelegt werden. Diese kann man sich als lineare Bestapproximation an einen Punkt vorstellen. Die erste Ableitung gibt also Auskunft darüber, welche Gerade an diesem Punkt der Funktion am ähnlichsten sieht.

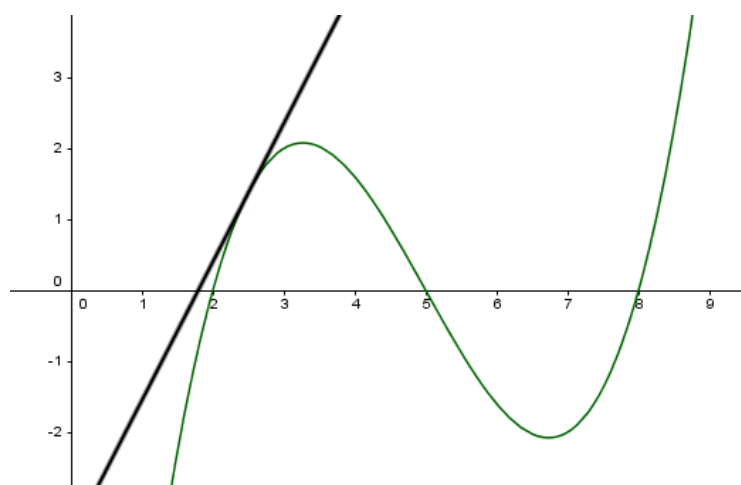


Abbildung 6.1: Tangente als lineare Bestapproximation an eine Funktion von  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Denken wir an unsere Gebirgslandschaft zurück, so können wir eine reguläre Fläche an einem Punkt gedanklich ebenfalls bestmöglich approximieren, indem man die Tangente durch eine Tangentialebene ersetzt. Betrachtet man anschließend eine Funktion  $f : S_1 \rightarrow S_2$ , so kann man sich vorstellen, dass man in einem Punkt  $p \in S_1$  eine Tangentialebene anlegt und dasselbe in  $f(p) \in S_2$  macht. Somit hätte man einen zweidimensionalen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^3$  gefunden, wenn man diese Tangentialebene durch den Ursprung legt, der die reguläre Fläche in einem Punkt bestmöglich approximiert. Für den Spezialfall, dass die reguläre Fläche als dreidimensionaler

Funktionsgraph gegeben ist, haben wir dies bereits intuitiv angewendet, was im Kapitel 5.1 mit den Wanderwegen gemacht wurde. Nun betrachten wir die allgemeine Definition für reguläre Flächen.

## 6.2 Theorie

### 6.2.1 Definition

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche und  $p \in S$ . Dann heißt

$T_p S := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \epsilon > 0 \text{ und eine glatte parametrisierte Kurve } c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \text{ mit } c(0) = p \text{ und } \dot{c}(0) = X\}$  die Tangentialebene von  $S$  in  $p$ . Die Elemente der Tangentialebene heißen Tangentialvektoren.

## 6.3 Betrachtung der Theorie

Die Definition 6.2.1 mag auf den ersten Blick etwas verwirrend erscheinen. Die Tangentialebene wird hier definiert durch "Geschwindigkeitsvektoren" von Kurven, welche in einem kleinen Bereich um den Punkt  $p$  auf der regulären Fläche verlaufen. Eigentlich ist noch nicht klar, dass es sich bei dieser Menge tatsächlich um eine Ebene handelt. Denkt man an die Idee mit den Wanderwegen auf der Gebirgslandschaft zurück, ist man dieses Problem umgangen, indem man nur in  $x$ - und  $y$  Richtung die Kurven

## 6 Tangentialebenen an regulären Flächen

verlaufen lassen hat und somit zwei linear unabhängige Vektoren gefunden hat, welche somit selbstverständlich eine Ebene aufspannen.

Aus der mehrdimensionalen Analysis ist bekannt, dass für Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , welche differenzierbar sind, für die Richtungsableitung in Richtung  $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} D_v f(x_0, y_0) &= \langle \text{grad}(f(x_0, y_0)), v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot v^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot v^2 \end{aligned}$$

Und somit sind alle Richtungsableitungen von den Ableitungen in  $x$  und  $y$  Richtungen linear abhängig. Dies kann auch als intuitiver Zugang genutzt werden, um zu zeigen, dass zumindest bei regulären Flächen, welche über Funktionsgraphen gegeben sind, die Definition 6.2.1 Sinn ergibt.

### 6.3.1 Spezialfall reguläre Flächen als Funktionsgraphen

Betrachten wir den Spezialfall genauer, bei der eine reguläre Fläche über einen Funktionsgraphen gegeben ist. Wir haben also eine  $C^\infty$  Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ und definieren wieder } F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$F(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}. \text{ Und erhalten somit die Fläche } S := \left\{ F(x, y) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Wir definieren unsere "Wanderwege" in  $x$ - und  $y$ - Richtung, die sich im



### 6.3 Betrachtung der Theorie

Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  kreuzen sollen, als  $c_x(t) := \begin{pmatrix} t + x_0 \\ y_0 \\ f(t + x_0, y_0) \end{pmatrix}$  und

$$c_y(t) := \begin{pmatrix} x_0 \\ t + y_0 \\ f(x_0, t + y_0) \end{pmatrix} \text{ und erhalten somit } \dot{c}_x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(t + x_0, y_0) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\dot{c}_y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t + y_0) \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun den Wanderweg, der in Richtung  $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$  geht. Die-

sen können wir definieren durch  $c_v(t) := \begin{pmatrix} v^1 \cdot t + x_0 \\ v^2 \cdot t + y_0 \\ f(v^1 \cdot t + x_0, v^2 \cdot t + y_0) \end{pmatrix}$  und

erhalten

$$\dot{c}_v(t) = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x_0 + t \cdot v^1, y_0 + t \cdot v^2) \end{pmatrix}. \text{ Und dieser ist nun linear abhängig}$$

von den Steigungen der anderen beiden Wanderwege, denn

$$\dot{c}_v(t) = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x_0 + t \cdot v^1, y_0 + t \cdot v^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(t + x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot v^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t + y_0) \end{pmatrix}.$$

$v^2 = \dot{c}_x(t) \cdot v^1 + \dot{c}_y \cdot v^2$ , im Kreuzungspunkt eingeschränkt auf  $t = 0$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Hierbei ist zu beachten, dass  $\frac{\partial f}{\partial t}(t + x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  entspricht, da  $t$  nur in  $x$ -Richtung verläuft (analog in  $y$ -Richtung).

## 6 Tangentialebenen an regulären Flächen

Bevor hier auf die Methodik und Anknüpfungspunkte eingegangen wird, will ich noch eine wichtige Proposition anführen, welche in Bär auf Seite 107 zu finden ist.

### 6.4 Theorie

#### 6.4.1 Proposition

Sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  offen. Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine glatte Funktion. Sei  $S = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ . Es gelte:  $\text{grad}f(p) \neq 0 \forall p \in S$ . Dann steht für  $p \in S$  der Gradient von  $f$  senkrecht auf die Tangentialebene.

$$\text{grad}f(p)^\perp = T_p S$$

#### 6.4.2 Beweis

Wählen wir einen beliebigen Vektor  $X$  aus der Tangentialebene, welche im Punkt  $p$  an  $S$  angelegt wird. Da diese über die Geschwindigkeitsvektoren aller Kurven, welche durch  $p$  in einer  $\epsilon$ -Umgebung durch  $S$  verlaufen, definiert war, wählen wir eine solche glatte parametrisierte Kurve  $c$  mit den Eigenschaften:  $c(0) = p$ ,  $\dot{c}(0) = X$ , wobei  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  gilt.

## 6.5 Anknüpfungspunkte und mögliche Fehlvorstellungen

Da  $S$  in der Proposition als Nullstellengebilde über die Funktion  $f$  definiert war, gilt:  $(f \circ c)(t) = 0$  für alle  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Wir differenzieren diese Aussage und erhalten:

$0 = \frac{d}{dt} f \circ c|_{t=0} = \langle \text{grad} f(c(0)), \dot{c}(0) \rangle = \langle \text{grad} f(p), X \rangle$  womit gezeigt wäre, dass  $X$  normal auf den Gradienten von  $f$  steht.

## 6.5 Anknüpfungspunkte und mögliche Fehlvorstellungen

Die Anknüpfungspunkte liegen hier offensichtlich in der mehrdimensionalen Analysis. Betrachtet man Tangentialebenen als Menge von Geschwindigkeitsvektoren, ist es nützlich, auf das Wissen der Richtungsableitungen zurückzugreifen. Auch wäre es hier hilfreich, die mehrdimensionale Kettenregel nochmal zu wiederholen, da diese für den Beweis 6.4.2 nötig ist. Das folgende Beispiel soll eine Möglichkeit bieten, dies zu veranschaulichen.

### 6.5.1 Beispiel mehrdimensionale Kettenregel

Wir stellen uns ein Flugzeug vor, dessen Flugposition abhängig von der Zeit durch eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben ist. Des weiteren sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, welche jedem Ort seine Temperatur zuweist. Beide Funktionen sollen differenzierbar sein.

## 6 Tangentialebenen an regulären Flächen

Die Verknüpfung  $f \circ g$  gibt also die Temperatur am Ort des Flugzeuges an.

Die Ableitungen sind definiert durch

$$g'(t) := \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ g'_3(t) \end{pmatrix} \text{ und } Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung der Verknüpfung  $(f \circ g)'(t) = Df(g(t)) \cdot g'(t) = D_x f(g(t)) \cdot$

$$g'_1(t) + D_y f(g(t)) \cdot g'_2(t) + D_z f(g(t)) \cdot g'_3(t) = \left\langle \begin{pmatrix} D_x f \\ D_y f \\ D_z f \end{pmatrix} g(t), \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ g'_3(t) \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$\langle \text{grad} f(g(t)), g'(t) \rangle$$

Man kann die Ableitung von  $g$  als Geschwindigkeitsvektor des Flugzeuges am Zeitpunkt  $t$  interpretieren und die Ableitungen von  $f$  als die Temperaturänderungen in die drei Achsenrichtungen. Somit wäre die zusammengesetzte Funktion  $f \circ g$  die Temperatur an der Stelle des Flugzeuges und  $(f \circ g)'$  die Temperaturänderung in Richtung des Geschwindigkeitsvektors des Flugzeuges zum Zeitpunkt  $t$ .

### 6.5.2 Richtungsableitungen

Der nächste große Anknüpfungspunkt aus der mehrdimensionalen Analysis sind die Richtungsableitungen. Diese werden nicht nur benötigt, um den

## 6.5 Anknüpfungspunkte und mögliche Fehlvorstellungen

Spezialfall von regulären Flächen als Funktionsgraphen zu veranschaulichen, sondern sind auch später für das Verständnis noch von wesentlicher Bedeutung. Sehen wir uns nochmals die Definition einer Richtungsableitung an. Da wir diese nicht allgemein im  $\mathbb{R}^n$  benötigen, da es für die Vorstellung genügt, den dreidimensionalen Fall zu betrachten, wird im Folgenden die Definition konkret für den  $\mathbb{R}^3$  angepasst.

Sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $v \in \mathbb{R}^3$  mit  $\|v\| = 1$ ,  $p \in G$ . Falls der Grenzwert

$$D_v f(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t \cdot v) - f(p)}{t}$$

existiert, heißt diese Zahl die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $p$  in Richtung  $v$ .

Wenn  $v = (1, 0, 0)^T$ , bzw.  $(0, 1, 0)^T$  oder  $(0, 0, 1)^T$  ist, so erhält man genau die partiellen Ableitungen in  $x$ ,  $y$  und  $z$  Richtung. Wichtig ist jedoch der Satz, wie man Richtungsableitungen berechnen kann:

$G \subset \mathbb{R}^3$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $p \in G$ . Wenn  $v \in \mathbb{R}^3$  mit  $\|v\| = 1 \Rightarrow \exists D_v f(p)$  und es gilt  $D_v f(p) = \langle \text{grad} f(p), v \rangle$ .

Beweis: Wir definieren eine Funktion  $g(t) := p + t \cdot v$  und betrachten die Ableitung  $g'(t) = v$ . Wie im vorherigen Beispiel betrachten wir nun die Verknüpfung von  $D_v f(p) = (f \circ g)'(0) = Df(g(0)) \cdot g'(0) = Df(p) \cdot g'(0) = \langle \text{grad} f(p), v \rangle$

## 6 Tangentialebenen an regulären Flächen

Dies sind zwei wichtige Werkzeuge, um anschaulich zu erklären, weshalb die Menge von Geschwindigkeitsvektoren in einem Punkt von "Wanderwegen", welche sich in diesem Punkt treffen und auf der regulären Fläche verlaufen, tatsächlich eine Ebene bilden, wenn man den Spezialfall betrachtet, dass eine reguläre Fläche über einen Funktionsgraphen gegeben ist.

### 6.6 Präsentation und Methodik

Bei der Einführung der Tangentialebenen bietet es sich an, eine ausführliche Visualisierung in die Präsentation einzubauen. Hierzu kann man beispielsweise einen Wasserball als reguläre Fläche hernehmen. Des Weiteren wäre es sicherlich sinnvoll zu wiederholen, dass man sich eine Tangentialebene als lineare Bestapproximation einer regulären Fläche in einem Punkt vorstellen kann. Ein starkes Kartonpapier kann hierbei beispielsweise als Tangentialebene genommen werden. Wie dieses bestmöglich an den Wasserball angehalten werden kann, ist intuitiv sofort verständlich.

Im nächsten Schritt kann man die Anknüpfungspunkte aus der Analysis verwenden, um die späteren formalen Beweise in einem bekannteren Rahmen vorzubereiten.

Hierbei ist es vom Verständnis der Kursteilnehmer/innen abhängig, ob man nochmal explizit wiederholen will, wie die mehrdimensionale Kettenregel funktioniert. Dies könnte mit dem oben angeführten Beispiel bewerkstelligt

werden. Wichtig ist jedoch sicherlich nochmals zu erwähnen, dass die Ableitung zweier verknüpften Funktionen mit

$(f \circ g)'(t) = \langle \text{grad}f(g(t)), g'(t) \rangle$  berechnet werden kann. (mit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dies wird benötigt, um die Ableitung der Verknüpfung einer Nullstellenfunktion  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit einer Kurve auf  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  zu berechnen.  $((f \circ c)'(0))$

Um dann den nächsten Gedankengang anzuregen, kann man mit Geogebra die Richtungsableitungen veranschaulichen, welche im Punkt einer regulären Fläche durch die bereits bekannten Wanderwege gegeben sind. Ein solches Beispiel findet sich in dieser Arbeit im Kapitel 5.1.

Von diesem Beispiel ausgehend kann mit Hilfe der Bemerkung bzw. einer ausführlicheren Wiederholung, dass  $D_v f(p)$  durch  $\langle \text{grad}f(p), v \rangle$  gegeben ist, die Erkenntnis gewonnen werden, dass jede Richtungsableitung linear abhängig ist von den partiellen Ableitungen in einem Punkt auf einem Funktionsgraphen. Dies dient dem Verständnis für den allgemeinen Fall, dass dies auch für alle Kurven, die in sämtlichen Richtungen durch einen Punkt derselben Fläche verlaufen, gelten kann. Von der linearen Unabhängigkeit der Geschwindigkeitsvektoren (bzw. Richtungsableitungen) zu der Erkenntnis, dass diese dann auch alle auf einer Ebene liegen müssen, dürfte es ein Leichtes sein. Auch kann angemerkt werden, dass die Voraussetzung in der mehrdimensionalen Analysis, dass der Richtungsvektor die Eigenschaft  $\|v\| = 1$  aufweisen muss, mit der Bedingung zusammenhängt, dass die Kurven  $c$  parametrisiert sind, also konstante Geschwindigkeit 1 haben.

### 6.6.1 Beispiel linearer Abhängigkeit von Geschwindigkeitsvektoren von Kurven auf Punkten auf regulären Flächen

Dieses Beispiel kann dazu verwendet werden, die lineare Abhängigkeit grafisch und rechnerisch zu veranschaulichen. Wir nehmen wiederum den Spezialfall einer regulären Fläche an, welche durch einen Funktionsgraphen gegeben ist.

$$f(x, y) = x^3 - x^2 + x + y^3 - y^2 - y + 4 \text{ mit } F := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} - \text{wir "basteln"}$$

"also wieder eine Gebirgslandschaft, die durch eine Polynomfunktion gegeben ist.

Wir wollen Kurven durch den Punkt  $P = (0|0|4)$  legen, welche auf der regulären Fläche verlaufen. Hierzu nehmen wir beispielsweise zuerst die Kurven, welche in x- und y-Richtung verlaufen. Diese sind gegeben durch:

$$c_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ f(t, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^3 - t^2 + t + 4 \end{pmatrix} \text{ und } c_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ f(0, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^3 - t^2 - t + 4 \end{pmatrix}$$

Als nächstes können zwei Kurven herangezogen werden, welche in eine andere Richtung durch den Punkt  $P$  gehen. Beispielsweise:



$$c_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ f(t, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t^3 - 2t^2 + 4 \end{pmatrix} \text{ und } c_4(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ f(2t, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 9t^3 - 5t^2 + t + 4 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten ihre Geschwindigkeiten:

$$\dot{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3t^2 - 2t + 1 \end{pmatrix}, \dot{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3t^2 - 2t - 1 \end{pmatrix}, \dot{c}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6t^2 - 4t \end{pmatrix}, \dot{c}_4(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 27t^2 - 10t + 1 \end{pmatrix}.$$

Alle diese Kurven verlaufen zum Zeitpunkt  $t = 0$  durch den Punkt  $P$ . Ihre Geschwindigkeitsvektoren in diesem Punkt sind:

$$\dot{c}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dot{c}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dot{c}_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{c}_4(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist leicht zu erkennen, dass  $\dot{c}_3(0) = \dot{c}_1(0) + \dot{c}_2(0)$  und  $\dot{c}_4(0) = 2 \cdot \dot{c}_1(0) + \dot{c}_2(0)$  ist und somit alle drei Vektoren auf derselben Ebene liegen.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Anmerkung: Aus ästhetischen Gründen wurden bei der Grafik andere Werte und Funktionen verwendet.

## 6 Tangentialebenen an regulären Flächen

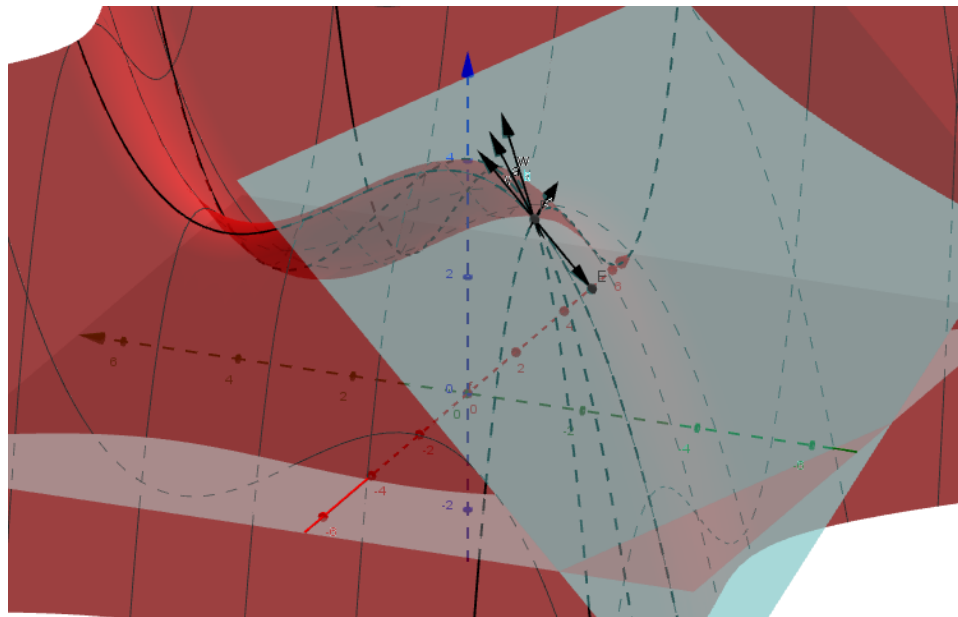


Abbildung 6.2: Mehrere Geschwindigkeitsvektoren von Kurven, die auf einer regulären Fläche verlaufen

### 6.6.2 Beispiel Tangentialebene durch Nullstellengebilde

Zur Veranschaulichung der Proposition 6.4.1 empfiehlt es sich, konkrete Beispiele heranzuziehen. Sehen wir uns beispielsweise den Zylinder an, welcher durch die Nullstellenfunktion  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$  gegeben ist. Dies ist offensichtlich der Zylinder in  $z$ -Richtung mit Radius eins. Denn alle Punkte, die von der Umkehrfunktion  $f^{-1}(0)$  beschrieben werden, sind jene, bei denen  $x^2 + y^2 = 1$  gilt, wobei  $z$  beliebig ist.

Betrachten wir nun  $\text{grad}f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dieser liefert uns für jeden Punkt auf dem Zylinder einen Normalvektor zu dessen Tangentialebene. Betrachten wir beispielsweise den Punkt  $(1, 0, 4)$ , so ist die Tangentialebene also durch den Normalvektor  $(2, 0, 0)$  und den Fußpunkt  $(1, 0, 4)$  eindeutig bestimmt.<sup>3</sup>

Als weiteres Beispiel kann man ein Paraboloid betrachten. Dies kann dazu dienen, aufzuzeigen, dass die Proposition 6.4.1 nicht nur für "relativ einfache" Flächen wie Zylinder, Ebenen etc. gilt. Betrachtet man zum Beispiel das Paraboloid, das durch die Nullstellenfunktion  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$  gegeben ist. Für die Vorstellung einer solchen Funktion kann man folgendermaßen vorgehen:  $x$  und  $y$  fließen jeweils quadratisch in die Funktion ein. Dies bedeutet, dass beide Werte immer positiv sind und die Information von ihrem Abstand zum Nullpunkt liefern. Desto weiter dieser Abstand ist, desto größer muss  $z$  werden, um diesen auszugleichen. Wir erhalten also einen Paraboloiden, der aussieht wie eine quadratische Funktion, welche um die  $z$ -Achse rotiert wurde. Diese Vorstellung kann durch die Umformung  $x^2 + y^2 - z = 0 \Leftrightarrow z = x^2 + y^2$  noch verdeutlicht werden.

---

<sup>3</sup>Anmerkung: Die Tangentialebene wird oft durch Anhängen des Fußpunktes dargestellt. Rechnerisch gesehen ist es jedoch von Vorteil, die Tangentialebene durch den Nullpunkt zu legen, um einen zweidimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  zu erhalten, damit das neutrale Element vorhanden ist.

## 6 Tangentialebenen an regulären Flächen

Der Gradient ist gegeben durch  $\text{grad}g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}$ . Betrachtet man nun beispielsweise den Fußpunkt  $(0, 0, 0)$ , so ist der Normalvektor der zugehörigen Tangentialebene  $(0, 0, -1)$ , also die  $x$ - $y$ -Ebene. Für den Fußpunkt  $(1, 1, 2)$  ist dieser  $(2, 2, -1)$ . Dies kann beispielsweise durch Geogebra gezeichnet werden, um so die Anwendung der Proposition 6.4.1 zu veranschaulichen.<sup>4</sup>

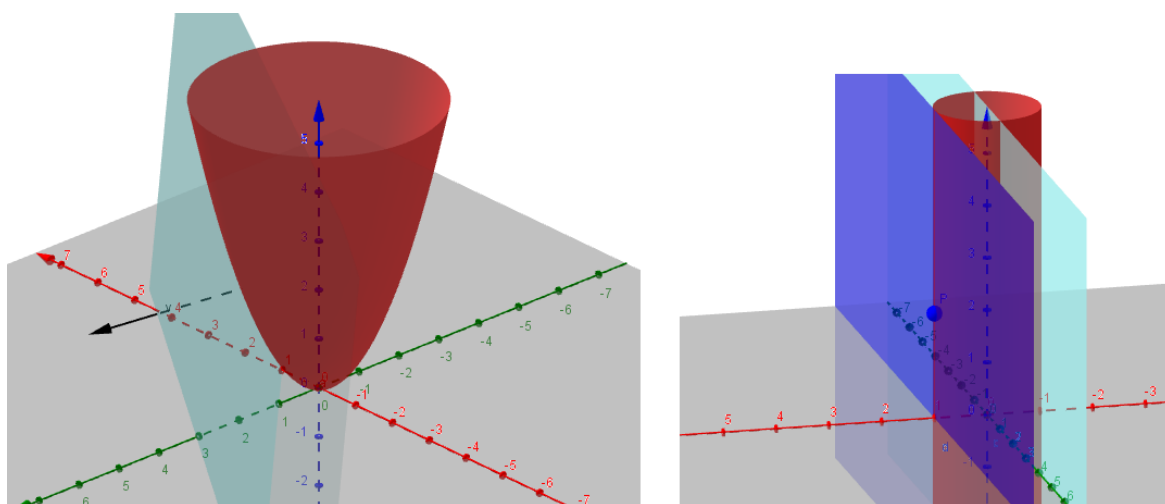


Abbildung 6.3: Veranschaulichung der Tangentialebene von Zylinder und Paraboloid, die mit Hilfe von Nullstellengebilden berechnet wurden.

---

<sup>4</sup>Anmerkung: Bei Bär findet man auf Seite 108 das Beispiel der Kugel. Dieses Beispiel wäre optimal, um es mit einem Wasserball als Kugel und beispielsweise einem Stift als Normalvektor auch greifbar zu veranschaulichen.

### 6.6.3 Motivation und Ausblick

Was haben wir dadurch erreicht? Wir wissen nun, wie man eine reguläre Fläche in einem Punkt durch eine Tangentialebene linear bestapproximieren kann. Ähnlich wie durch die lineare Bestapproximation von Funktionen haben wir also eine "Art von Differential" für reguläre Flächen berechnet. Wichtig ist, sich nochmals den Unterschied vor Augen zu führen, dass es sich hierbei um ein Differential in Punkten von regulären Flächen handelt und nicht um differenzierbare Funktionen. Diese regulären Flächen sind oftmals durch mehrere lokale Parametrisierungen gegeben und bilden keinen affinen Raum, auf dem das bekannte Konzept von Richtungsableitungen funktioniert. Dieses Problem wurde umgangen, indem man die Tangentialebene über Geschwindigkeitsvektoren von Kurven definierte und die Sinnhaftigkeit (bzw. die Eindeutigkeit) der Menge von Geschwindigkeitsvektoren als Deutung einer Ebene zeigte. Und weiters hat man noch ein Konzept gefunden, wie man Normalvektoren finden kann, wenn eine reguläre Fläche als Nullstellengebilde gegeben ist.

Nun fehlt uns noch eine formale Aufarbeitung der Frage, was ein Differential zwischen zwei regulären Flächen ist. Dies wird im folgenden Kapitel behandelt.



## 7 Differential zwischen regulären Flächen

Wir wollen nun definieren, was wir unter dem Differential zwischen zwei regulären Flächen verstehen. Hierbei können wir auf folgende Ideen zurückgreifen: Wenn wir eine glatte Abbildung zwischen zwei regulären Flächen haben, können wir mit diesen Vektoren der Tangentialebenen zwischen den Flächen transformieren. Wir greifen also auf die Tangentialebenen der regulären Flächen zurück, was uns wieder dazu anregen wird, Kurven bzw. deren zugehörige Geschwindigkeitsvektoren zu betrachten. Des Weiteren sollte dieses Differential wohldefiniert, also eindeutig sein. Schon in vorangegangenen Kapiteln hat man hier eine wesentliche Vorarbeit geleistet: Beim Vornehmen eines Kartenwechsels bleibt die Eindeutigkeit der regulären Flächen erhalten. Auch die Glattheit von Funktionen zwischen zwei regulären Flächen wurde bereits behandelt. Wir werden also wieder auf lokale Parametrisierungen zurückgreifen müssen, um die Wohldefiniertheit des Differentialen zeigen zu können.

## 7.1 Theorie

### 7.1.1 Definition

Seien  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  reguläre Flächen, sei  $f : S_1 \rightarrow S_2$  eine glatte Abbildung,  $p \in S_1$ . Das Differential von  $f$  in  $p$  ist die Abbildung

$d_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ , die folgendermaßen definiert ist: Man wähle zu einem Vektor  $X \in T_p S_1$  eine glatte parametrisierte Kurve  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = X$  und setze

$$d_p f(X) = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \in T_{f(p)} S_2$$

### 7.1.2 Proposition

Durch Definition 7.1.1 ist  $d_p f$  wohldefiniert, das heißt  $d_p f(X)$  hängt nur von  $X$  ab, nicht jedoch von der speziellen Wahl der Kurve  $c$ . Ferner ist  $d_p f$  linear.<sup>1</sup>

## 7.2 Betrachtung der Theorie

Die Definition selbst ist wenig überraschend, wenn man mit den bisherigen Konzepten vertraut ist. Man wählt einen Vektor der Tangentialebene und

---

<sup>1</sup>Die Definition und Proposition sind bei Bär auf Seite 108f zu finden.



## 7.2 Betrachtung der Theorie

will diesen mit Hilfe einer glatten Funktion auf eine andere reguläre Fläche abbilden. Man wählt passend zum Vektor eine glatte parametrisierte Kurve, welche genau durch den gewünschten Punkt zum Zeitpunkt 0 verläuft und den Vektor der Tangentialebene als Geschwindigkeitsvektor beinhaltet. Wichtiger jedoch ist die Frage, ob diese Abbildung eindeutig ist. Dies wird in der nachfolgenden Proposition behauptet.

Der komplette Beweis der Proposition 7.1.2 ist bei Bär zu finden. Für das Verständnis möchte ich hier nur eine Beweisskizze anführen.

### 7.2.1 Beweisskizze

Die grundlegende Problematik besteht in der Definition

$d_p f(X) = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0}$ , da hier nicht klar ist, ob diese von der Wahl der Kurve abhängig ist oder nicht.

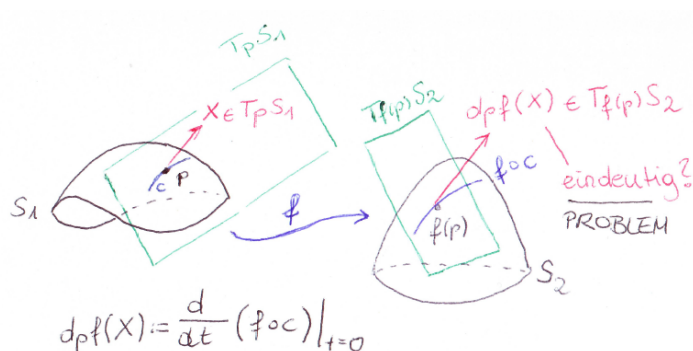


Abbildung 7.1: Eindeutigkeitsproblem beim Differential aufgrund der Kurvenwahl

## 7 Differential zwischen regulären Flächen

Die grundlegende Herangehensweise besteht darin, die direkte Abbildung zwischen zwei regulären Flächen über ihre Parametrisierungen zu umgehen. Man betrachtet also zwei Parametrisierungen  $(U_1, F_1, V_1)$  und  $(U_2, F_2, V_2)$  von  $S_1$  und  $S_2$  und definiert sich  $\tilde{f} := F_2^{-1} \circ f \circ F_1$  als Abbildung von  $U_1 \rightarrow U_2$ . Man definiert den "Fußpunkt" in  $U_1$  als  $u_0 = F_1^{-1}(p)$ . (Vgl. Idee 1 bei Abbildung 7.2)

Im nächsten Schritt definiert man eine neue Kurve  $u := F_1^{-1} \circ c$  die von  $(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U_1$  abbildet. (Vgl. Idee 2 bei Abbildung 7.2)

Nun lässt sich der Vektor in der Tangentialebene von  $S_1$  als  $D_{u_0}F_1(\dot{u}(0)) = X$  schreiben. (Vgl. Idee 3 bei Abbildung 7.2)

Für die folgenden "Umwege" über die Parametrisierungen werden einige Überlegungen angestellt. So entspricht etwa dem Weg  $(f \circ F_1 \circ u)$  der Weg  $(F_2 \circ \tilde{f} \circ u)$ .

Da  $D_{u_0}F_1(\dot{u}(0)) = X$  ist  $\dot{u}(0) = (D_{u_0}F_1)^{-1}(X)$ .

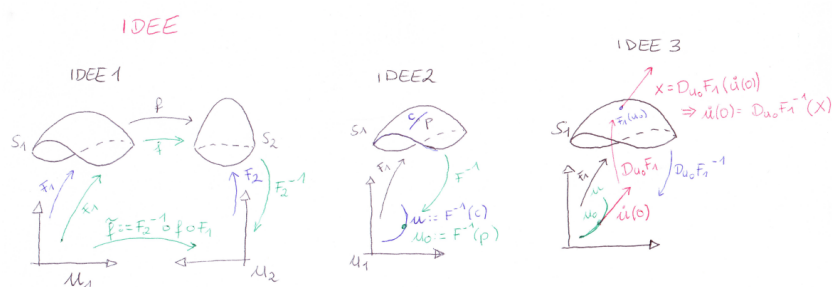


Abbildung 7.2: Veranschaulichungen der Überlegungen zum Differential über die Parametrisierungen

## 7.2 Betrachtung der Theorie

Man berechnet sich mit diesen Überlegungen schließlich, dass

$$d_p f(X) = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} = \dots = D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f}) \circ (D_{u_0} F_1)^{-1}(X)$$

Vereinfacht gesagt startete man also damit, das Differential als Geschwindigkeit der "hinübergeschossenen" Kurve auf der anderen Fläche zu betrachten. Durch Umformungen (bzw. über Umwege der Karten) kann man aber auch den Tangentialvektor in die Parametrisierung der ersten Fläche "hinunterschießen", befördert diese dann mit Hilfe von  $\tilde{f}$  in die Karte der zweiten Fläche und schießt diesen mit  $F_2$  wieder hinauf in die Tangentialebene der zweiten Fläche.

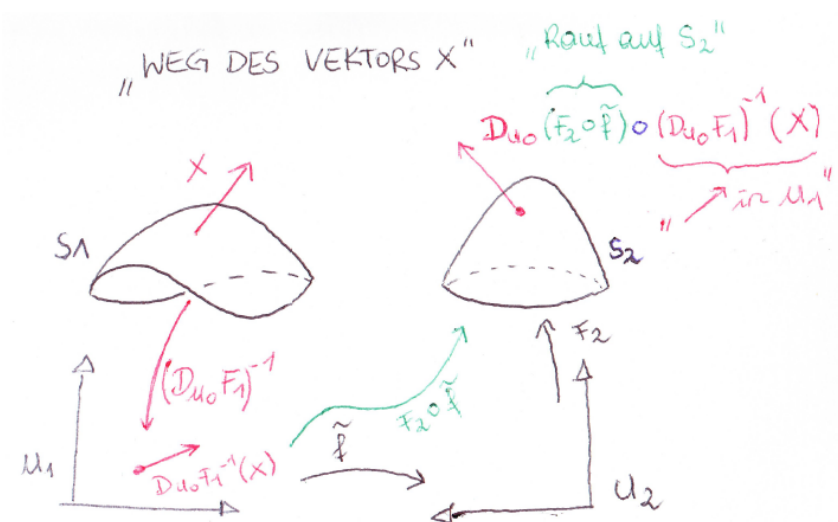


Abbildung 7.3: "Weg des Vektors" Veranschaulichung zum Differential

Formal gesehen ist in der umgeformten Definition keine Kurve mehr vorhanden, das heißt, dass  $d_p f$  nicht von der Wahl der Kurve abhängig ist,

## 7 Differential zwischen regulären Flächen

sondern nur von der Wahl des Tangentialvektors. Dass die Wahl der Karte keinen Unterschied macht, wissen wir bereits, da Kartenwechsel immer Diffeomorphismen sind.

### 7.3 Präsentation und Methodik

Generell kann es für das Verständnis von Beweisen oft sinnvoll sein, anstatt eines formalen Beweises eine Beweisskizze zu geben. Hierbei ist es wichtig, dass für die Motivation des Beweises zuerst die zentrale Problemstellung aufgezeigt wird und an bereits vorhandene Techniken angeknüpft wird, wie man dieses Problem lösen könnte. Durch das gemeinsame Überlegen und eigenständige Mitdenken wird nicht nur bereits vorhandenes Wissen wieder aktiviert, sondern auch eine aktive Auseinandersetzung mit der Problemstellung bei den Zuhörerinnen und Zuhörern gefördert.

Eine Methode, dies in ein Referat oder einen Vortrag einzubauen, ist das gezielte Wiederholen von bisherigen Strategien, um sich gemeinsam eine Beweisskizze zu machen. Ein Übersichtsraster kann dabei behilflich sein. Bei diesem (egal ob per Beamer, auf der Tafel, Plakat oder Flipchart) empfiehlt es sich, Texte und Formeln sparsam zu verwenden und bevorzugt mit Grafiken zu arbeiten und den Versuch zu wagen, auf mathematische Korrektheit zu Gunsten der Anschaulichkeit etwas zu verzichten. Dies dient zum Schaffen von Verständnis, jedoch nicht zum Einüben von mathematisch korrektem Arbeiten.

### 7.3.1 Beispiel Übersichtsraster

Um beispielsweise eine Beweisskizze gemeinsam zu erarbeiten, wie dies im Unterkapitel 7.2.1 versucht worden ist, empfiehlt es sich, bereits gewonnene Erkenntnisse und Strategien nochmals zusammenzufassen und zu veranschaulichen.

Zur Sicherung der Wiederholung empfiehlt es sich, diesen in Form von Arbeitsblättern auszuteilen, bzw. mit Arbeitsblättern, welche von den Zuhörerinnen und Zuhörern noch ergänzt werden müssen, gemeinsam das bereits Gehörte zu erarbeiten.

Eine mögliche Variante dieses Rasters findet sich auf der nächsten Seite. Danach ist eine Variation des ersten Rasters angegeben, welche ein aktiveres Verhalten von Zuhörerinnen und Zuhörern fordert. Im dritten Schritt wird versucht, diese Problemstellungen und Lösungsansätze grafisch zu veranschaulichen.

In welcher Reihenfolge (gleichzeitig, nacheinander) versucht wird, mit verschiedenen Unterlagen Ideen nochmals durchzubespochen (eventuell nur grafisch, ...) muss nach dem Lernerfolg der Gruppe individuell beurteilt werden.

## 7 Differential zwischen regulären Flächen

<b>Problem</b>	<b>Lösung</b>	<b>Erkenntnis</b>
Reguläre Flächen beschreiben	Parametrisierungen	viele reguläre Flächen können nicht durch eine Parametrisierung erfasst werden $\Rightarrow$
mehrere Parametrisierungen überlappen sich	zeigen, dass viele Eigenschaften unabhängig von der Wahl der Parametrisierung sind	lokale Parametrisierungen sind diffeomorph
Abbildungen auf/ von / zwischen regulären Flächen	Umwege über Parametrisierungen machen	Problem kann in bekannte Vektorräume verlagert werden
Reguläre Flächen sind keine Vektorräume	Tangentialebenen sind Vektorräume	versuchen, Tangentialebenen an Punkte von regulären Flächen bestmöglich anzulegen
Definition einer Tangentialebene auf regulären Flächen	Kurven verwenden	intuitiv verständlich anhand von Beispielen $\Rightarrow$ Sinnhaftigkeit?
Sinnhaftigkeit und Eindeutigkeit der Tangentialebene als Menge von Geschwindigkeitsvektoren von Kurven auf $S$ nachrechnen	Umwege über die Parametrisierungen machen	alle Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einer Ebene

### 7.3 Präsentation und Methodik

Beispiel für dasselbe Arbeitsblatt mit Arbeitsaufträgen während einer gemeinsamen Diskussion.

<b>Problem</b>	<b>Lösung</b>	<b>Erkenntnis</b>
Reguläre Flächen Beschreiben		viele reguläre Flächen können nicht durch eine Parametrisierung erfasst werden $\Rightarrow$
	zeigen, dass viele Eigenschaften unabhängig von der Wahl der Parametrisierung sind	
Abbildungen auf/ von / zwischen regulären Flächen		
	Tangentialebenen sind Vektorräume	
Definition einer Tangentialebene auf regulären Flächen		intuitiv verständlich anhand von Beispielen $\Rightarrow$ Sinnhaftigkeit der Definition?
	Umwege über die Parametrisierungen machen	

## 7 Differential zwischen regulären Flächen

Das nächste Arbeitsblatt kann auch zur grafischen Ergänzung genutzt werden.<sup>2</sup>

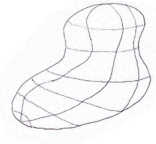
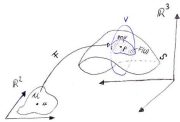
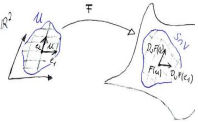
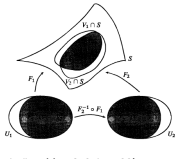
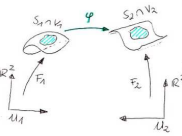
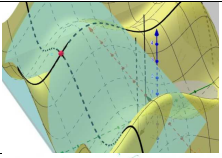
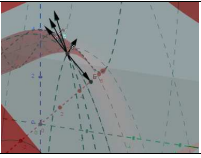
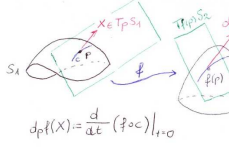
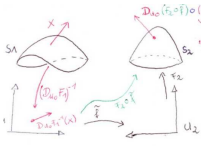
Problem	Lösung	Erkenntnis
		
	 (bei Bär, Abb. 78, Seite 102)	
Abbildungen auf/ von / zwischen regulären Flächen? Was bedeutet hier Glattheit?		
		
 $d_p f(x) = \frac{d}{dt} (f \circ c) \Big _{t=0}$		

Abbildung 7.4: Vorschlag: Grafisches Arbeitsblatt zum Raster

<sup>2</sup>Bei dieser Abbildung wurde die Abbildung 78 aus Bär verwendet, die bei ihm auf Seite 102 zu finden ist.



# 8 Literatur- und Abbildungsverzeichnis

Christoph ABLEITINGER, "Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele", in: Journal für Mathematik-Didaktik 33:87-111, (2012)

Christian BÄR, "Elementare Differentialgeometrie", 2. Auflage, (Berlin/New York 2010)

Leone BURTON, "Mathematics and their Epistemologies - and the Learning of Mathematics.", in: European Research in Mathematics Education I, (Osnabrück 1999)

Astrid FISCHER, "Vorstellungen zur Linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und -ergebnisse von Studierenden", (Dortmund 2005)

Gunnar FRIEGE, Gunter LIND, "Allgemeine und fachspezifische Problemlösekompetenz", in: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, Jg. 9, Hg. Knut NEUMANN, Stefan RUMANN, (Kiel 2003)

## 8 Literatur-und Abbildungsverzeichnis

Konstantinos KANAKOGLU, "The notion of abstract manifold: a pedagogical approach", (Thessaloniki 2012)

Nathan PINSKY, "Mathematical Knowledge for Teaching and Visualizing Differential Geometry", in: HMC Senior Theses Paper 49, (Claremont 2013)

Anna SFARD, "On the dual nature of mathematical concepts: reflections on processes and objects as different sides of the same coin", in: Educational Studies in Mathematics, (Niederlande 1991)

Keith WEBER, "Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge", in: Educational Studies in Mathematics 48, (Niederlande 2001)

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Visualisierung der Vorgehensweise . . . . .	6
3.1	Veranschaulichung zweidimensionaler Bewohner . . . . .	9
4.1	Visualisierung der Definition 4.1.1 . . . . .	14
4.2	Vorstellung homöomorphe Flächen . . . . .	15
4.3	Visualisierung der Garantie der linearen Unabhängigkeit . . . . .	16
4.4	Visualisierung Einheitskreis . . . . .	19
4.5	Vorschlag für mögliche Flächen . . . . .	21
4.6	Beispiel einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	22
4.7	Ebene durch Ursprung mit Richtungsvektoren $(1, 1, 1)^T$ und $(1 0 0)^T$ . . . . .	25
4.8	Visualisierung von $F(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2)^T)$ . . . . .	26
4.9	Vorstellung Karte und lokale Parametrisierung . . . . .	29
4.10	Kugelkoordinaten . . . . .	31
4.11	Längen- und Breitengrade . . . . .	32
4.12	karthesische Koordianten und Polarkoordinaten . . . . .	33
4.13	Geraden in verschiedenen Koordinatensystemen . . . . .	33

## Abbildungsverzeichnis

4.14	Koordinatennetz der Polarkoordinaten im karthesischen Koordinatensystem . . . . .	34
4.15	Ellipsoid mit $S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 = 0\}$ . . . . .	38
5.1	Krümmung in Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ . . . . .	40
5.2	Gebirgslandschaft als Funktionsgraph mit Kurven als Wanderwege . . . . .	41
5.3	Ableitungen der Kurven in der Gebirgslandschaft . . . . .	43
5.4	Tangentialebene an eine Gebirgslandschaft . . . . .	44
5.5	Übersicht der zu behandelnden Abbildungen . . . . .	46
5.6	Veranschaulichung des Tricks . . . . .	51
5.7	Fahrplan- und Erkenntnistafel . . . . .	56
5.8	Diffeomorphismus Sphäre Ellipsoid . . . . .	59
6.1	Tangente als lineare Bestapproximation an eine Funktion von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	62
6.2	Mehrere Geschwindigkeitsvektoren von Kurven, die auf einer regulären Fläche verlaufen . . . . .	74
6.3	Veranschaulichung der Tangentialebene von Zylinder und Paraboloid, die mit Hilfe von Nullstellengebilden berechnet wurden. . . . .	76
7.1	Eindeutigkeitsproblem beim Differential aufgrund der Kurvenwahl . . . . .	81
7.2	Veranschaulichungen der Überlegungen zum Differential über die Parametrisierungen . . . . .	82

## Abbildungsverzeichnis

7.3	“Weg des Vektors“ Veranschaulichung zum Differential . . . .	83
7.4	Vorschlag: Grafisches Arbeitsblatt zum Raster . . . . .	88



# 9 Anhang

## 9.1 Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit stellt den Versuch da, eine fachdidaktische Aufarbeitung über die grundlegenden Kapitel der elementaren Flächengeometrie zu schreiben.

Flächengeometrie spielt in vielen Bereichen der Naturwissenschaften eine elementare Rolle. So begegnet man ihr beispielsweise in der Kartografie beim Versuch, die Land- und Wassermassen auf ebenen Plänen abzubilden, aber auch in der einsteinschen Relativitätstheorie. Eine zentraler Begriff hierbei ist die Krümmung einer Fläche. Um sich zu diesem vorzuarbeiten, muss man sich jedoch erstmal die Frage stellen, was es bedeutet, Geometrie auf Flächen zu betreiben und welche elementaren Werkzeuge, die einem aus der mehrdimensionalen Analysis zur Verfügung stehen, man verwenden und ummünzen könnte.

## 9 Anhang

Als Grundlage wurde das Buch "Elementare Differentialgeometrie" von Christian Bär herangezogen und die ersten Kapitel über reguläre Flächen Stück für Stück aufgearbeitet.

Hierzu wurde ein fachdidaktisches Konzept entwickelt, welches auf Problemstellungen und Motivationen aufbaut, Definitionen, Präpositionen und Beweise näher erläutert, diese durch anschauliche Beispiele versucht zu visualisieren und intuitiv zugänglich zu machen, Anknüpfungspunkte aus der mehrdimensionalen Analysis und der linearen Algebra aufzeigt und dann im nächsten Schritt wiederum mit Hilfe neu erarbeiteter Problemstellungen Motivationen für das jeweils nächste Kapitel bietet. Ebenfalls sind in jedem Kapitel methodische Vorschläge eingearbeitet, welche als Anstöße für Referate dienen können.

Der mathematisch inhaltliche Rahmen spannt sich in dieser Arbeit von der Frage, was eine reguläre Fläche überhaupt ist, über die Betrachtung von glatten Abbildungen bis hin zu Tangentialebenen und zum Begriff eines Differentials auf regulären Flächen.