universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Schulische Aspekte von Fourierreihen

verfasst von / submitted by

Hanae Miura BA

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt: / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 338
Studienrichtung lt. Studienblatt: / degree programme as it appears on the student record sheet:	Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Doz. Dr. Franz Embacher

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Arbeit an der Diplomarbeit und der Studienzeit unterstützt haben.

Allen voran möchte ich mich bei Prof. Embacher für seine hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik sowie professionelle Betreuung bedanken.

Auch meinen Freunden und Kommilitonen Georg, Manuel, Elisabeth, Saori, Kana, Fedora und Maria, die mich durch mein Studium begleitet haben und jederzeit Hilfe boten, wo es nötig war, möchte ich einen großen Dank aussprechen.

Ein besonderer Dank geht an meine Eltern, die das Studium ermöglicht haben und meinem Freund Alex, der mich stets unterstützt hat.

Musik ist die versteckte arithmetische Tätigkeit der Seele, die sich nicht dessen bewusst ist, dass sie rechnet. (Gottfried Wilhelm Leibniz)

Abstract

Die vorliegende Diplomarbeit hat das Ziel, Fourierreihen bzw. trigonometrische Polynome für den Unterricht an der HTL bzw. AHS passend aufzubereiten. Dazu werden aus Lehrplänen und Grundkompetenzen Lernziele erschlossen und Unterrichtsvorschläge sowie mögliche Aufgaben entwickelt. Im Bereich der Fourierreihe wurden auch Lehrbücher für die HTL ([SPS+12], [PSWSS14] und [TK01]) sowie Hochschullehrbücher ([ES11], [But12], [Heu92], [Chi16] und [LP16]) herangezogen, um ihre Angehensweisen zu vergleichen. Die Arbeit ist an Lehrpersonen gerichtet, die Fourierreihen bzw. trigonometrische Polynome in ihrem Unterricht behandeln wollen. Sie soll aufzeigen, welche Verbindungen zwischen den beiden Thematiken existieren und welche Aufgabenstellungen möglich sind.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Ich lernte die Fourierreihen das erste Mal kennen, als ich in einem Seminar die Aufgabe erhielt, einen Workshop zu kreieren, der Mathematik mit Musik verbinden soll. Im Zuge dessen erfuhr ich, dass man Klänge in Grund- und Obertöne zerlegen kann und dass auch unser Ohr so arbeitet. Aufgrund meines Zweitstudiums Konzertfach Harfe an der Musik und Kunst Privatuniversität der Stadt Wien war eine Verbindung von Musik und Mathematik schon seit langer Zeit ein großes Thema für mich. Allerdings hatte ich bis dahin noch nichts gefunden, das eine starke Verbindung der beiden Gebiete so eindrucksvoll untermalen konnte wie Fourierreihen. Ich empfand und empfinde es immer noch als schwierig, eine wahrhafte Interdisziplinarität aufzuzeigen, sodass weder die Mathematik der Musik, noch die Musik der Mathematik untergeordnet wird. Ich will nicht sagen, dass Fourierreihen dieses Ideal komplett erfüllen, denn so wie die Mathematik nicht nur eine Ansammlung von Zahlen ist, ist die Musik nicht nur eine Ansammlung von Tönen. Die Fourierreihen kann man allerdings nur zum Zusammensetzen bzw. Analysieren von Tönen bzw. Klängen im physikalischen Sinn gebrauchen. Dennoch denke ich, dass es ein guter Ansatzpunkt war und insbesondere für die vorliegende Diplomarbeit stört die Dominanz der Mathematik nicht.

Ausgehend von diesem Interesse an Fourierreihen wollte ich mich damit auseinandersetzen, wie Fourierreihen im schulischen Kontext behandelt werden. Es stellte sich allerdings bald heraus, dass Fourierreihen als Thematik nur in der HTL, nicht in der AHS behandelt werden. Da ich aber in meiner Arbeit auf beide Schulformen eingehen wollte, habe ich mich dazu entschlossen, im Kapitel der AHS das Hauptaugenmerk auf trigonometrische Polynome zu legen, die sehr wohl auch in der AHS unterrichtet werden und deren Behandlung viele Möglichkeiten bietet, um eine spätere Weiterführung in Richtung Fourierreihe (etwa auf der Universität) zu erleichtern oder einen Ausblick in diese Richtung zu ermöglichen. Außerdem ist es für jegliche Auseinandersetzung mit Fourierreihen notwendig, trigonometrischen Polynome gut handhaben zu können. Das erste Kapitel kann also auch als Grundstein für das zweite Kapitel betrachtet werden, wobei es in letzterem um die Erarbeitung der Fourierreihen in der HTL geht.

Prinzipiell habe ich versucht, die Lehrinhalte, die zu den jeweiligen Themen dazugehören, in Unterrichtsvorschäge und exemplarische Fragestellungen zu gießen. Dabei sollen die Lernziele abgedeckt werden, die ich am Anfang jedes Kapitels formuliert habe. Bei der Formulierung der Lernziele habe ich mich sowohl an den Lehrplan als auch an den Grundkompetenzenkatalog gehalten und möglichst versucht, den kleinsten gemeinsamen Nenner zu erfassen. Im zweiten Kapitel habe ich einige Lehrbücher als Input hinzugenommen, um auch darauf Bezug nehmen zu können. Im ersten Kapitel habe ich das nicht gemacht, da die in Österreich gebräuchlichen Lehrbücher nicht das Ziel verfolgen, auch einen Grundstein für die Behandlung der Fourierreihen zu legen. Außerdem sind Lehrplan und Grundkompetenzenkatalog relativ eindeutig und einheitlich für die AHS, was für den Lehrplan der HTL (BHS) nicht zutrifft.

Bzgl. der AHS werde ich den Schwerpunkt auf Eigenschaften von Funktionen legen, insbesondere auf Symmetrie und Periodizität. Neben Parametern von Funktionsgleichungen wird analysiert, wie sich Überlagerungen (Summen) von trigonometrischen Polynomfunktionen auf die Eigenschaften der Ergebnisfunktionen auswirken. Schlussendlich werde ich auch trigonometrische Polynome aus der Sicht der Differenzial- und Integralrechnung betrachten, um abschließend einen Ausblick auf die Approximation von Funktionen gewährleisten zu können.

Bzgl. der HTL werde ich einige Einführungsmöglichkeiten präsentieren, um dann auf die Berechnung der Fourierkoeffizienten einzugehen, die je nach Periode und Symmetrie leicht voneinander abweichen. Abschließend habe ich einige Unterrichts- und Übungsvorschläge zur spektralen und komplexen Form der Fourierreihe entwickelt.

Die technologischen Hilfsmittel beschränken sich in beiden Kapiteln auf GeoGebra.

Ich hoffe, dass meine Arbeit eine Unterstützung für Lehrpersonen bieten kann, die sich dieser Materie nähern wollen.

2 Trigonometrische Polynome in der AHS: Unterrichtsvorschläge

2.1 Lehrplan und Grundkompetenzenkatalog

Die Behandlung trigonometrischer Polynome kann man großteils dem Gebiet der Funktionalen Abhängigkeiten zuordnen, auch wenn es einzelne Punkte in anderen Gebieten gibt, die ebenfalls in einem Zusammenhang mit trigonometrischen Polynomen stehen.

Im Grundkompetenzenkatalog[1] sind insbesondere Periodizität (Phasenverschiebung), Achsensymmetrie und Amplitudenmanipulation durch die Parameter, sowie der Kontextbezug und die Anwendung der genannten Eigenschaften zur Erstellung eines Funktionsgraphen verankert. (FA 1.5, FA 6.1, FA 6.2 - FA 6.5)

Des Weiteren kann man das Verständnis von Funktionen als mathematische Modelle (FA 1.7) sowie den Zusammenhang zwischen Sinus und Cosinus über die Ableitung (FA 6.6) hinzufügen.

Wenn man zum (Oberstufen-)Lehrplan[2] weitergeht, ist einerseits mit dem Bildungsbereich Natur und Technik eine Basis für die Kontextualisierung der trigonometrischen Polynome als Schwingungen und Überlagerungen von Schwingungen gegeben. Auch das Postulat des fächerübergreifenden oder anwendungsorientierten Lernens wird mit trigonometrischen Polynomen (im Kontext von Schwingungen) ermöglicht. Der fächerübergreifende Aspekt wird weiters im Grundkompetenzenkatalog durch die Nennung bestimmter (physikalischer) Größen und Einheiten, u.a. der Frequenz, angedeutet. Sie beschreiben Kontexte, in denen "überfachliche" Kompetenzen entwickelt werden sollen.([VA] S.19-22)

Der Großteil der Teilaspekte, die ich für die AHS abhandeln möchte, sind laut Lehrplan in der 6. Klasse angesiedelt. Winkelfunktionen, Symmetrie und Periodizität werden auch im Grundkompetenzenkatalog angesprochen. Auch die Schwebung ist eine Form eines (einfachen) trigonometrischen Polynoms mit nur 2 Summanden und kann auf diese Weise im Mathematikunterricht behandelt werden.
In der 7. Klasse wird der Begriff des Grenzwerts behandelt, wo man beispielsweise mit der Visualisierung der Approximation einer Dreiecksschwingung durch trigonometrische Polynome (ohne dabei Fourierreihen oder das Integrieren anzusprechen) zum besseren Verständnis des Approximationsprozesses beitragen kann. Ebenso kann die Tatsache, dass ungerade und gerade Funktionen durch die Ableitung aneinander gebunden sind, durch trigonometrische Polynome gut veranschaulicht werden.
In der 8. Klasse wird das Integral behandelt, wo etwa die Verschiebbarkeit der Integrationsgrenzen bei periodischen Funktionen (also auch bei trigonometrischen Polynomen) dazugehört.

[1] [VA], gültig ab Maturatermin 2018
[2] [?], Stand Dezember 2017

Diese Teilaspekte, die sich aus dem Grundkompetenzenkatalog und dem Lehrplan ergeben, gilt es im Folgenden in Form von Unterrichtsvorschlägen zu bearbeiten.

2.2 Lernziele

Aus der Betrachtung in Kapitel 2.1 ergeben sich für mich folgende Lernziele, die ich mit den Unterrichtsvorschlägen bewirken möchte.

1. Die SuS verstehen den Begriff der Achsen- und Punktsymmetrie.
2. Die SuS verstehen Funktionen als mathematische Modelle und können damit verständig arbeiten.
3. Die SuS verstehen den Begriff der Periodizität und kennen die Phasenbeziehung zwischen Sinus und Cosinus.
4. Die SuS können die oben genannten Begriffe zur Erstellung eines Funktionsgraphen anwenden.
5. Die SuS wissen, was man durch die Änderung der Parameter a und b der Funktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ bewirken kann und können dieses Wissen zur Erstellung eines Funktionsgraphen anwenden.
6. Die SuS wissen, was man durch die Änderung der Parameter c und d der Winkelfunktion $f(x) = \sin(x + d) + c$ bewirken kann.
7. Die SuS kennen einfache Beispiele für Überlagerungen von Schwingungen.
8. Die SuS können ungerade und gerade Funktionen unterscheiden und verstehen, dass die Ableitung einer ungeraden Funktion stets gerade ist und umgekehrt.
9. Die SuS wissen, dass das bestimmte Integral bei trigonometrischen Polynomen konstant bleibt, wenn man über ein Vielfaches einer Periode integriert.
10. Die SuS verstehen den Begriff der Approximation intuitiv und haben eine Vorstellung davon, dass durch das Aufsummieren mehrerer Funktionen eine andere Funktion angenähert werden kann.

In den folgenden Kapiteln werden Unterrichtsvorschläge beschrieben, anhand derer diese Lernziele erarbeitet werden können.
Die ersten drei Kapitel Symmetrie, Periodizität und Überlagerungen sind in der 6.Klasse zu verorten, das letzte Kapitel zur Integral- und Differentialrechnung sowie der Approximation lässt sich nur in der 8.Klasse behandeln (und auch dort nur als Ausblick).

2.3 Symmetrie

Die Lernziele, die im folgenden Kapitel erreicht werden sollen, sind die folgenden:

1. Die SuS verstehen den Begriff der Achsen- und Punktsymmetrie.

2. Die SuS verstehen Funktionen als mathematische Modelle und können damit verständig arbeiten.

Es werden einige achsensymmetrische und bezüglich des Ursprungs punktsymmetrische Funktionsgraphen an die Wand projiziert. Die SuS sollen leise in Einzel- oder Partnerarbeit Gemeinsamkeiten der Funktionen finden. Es soll sowohl eine umgangssprachliche, als auch mathematische Beschreibung gefunden werden.

Nachdem die Ergebnisse verglichen wurden, wird

$$f(x) = f(-x) \ \ \forall x$$

und

$$-f(x) = f(-x) \ \ \forall x$$

sowie der Satz

"Alle Funktionen, die einen achsensymmetrischen Graphen haben, heißen gerade, alle Funktionen, die einen bezüglich des Ursprungs punktsymmetrischen Graphen haben, heißen ungerade."

an die Tafel geschrieben. So kann man nun über gerade und ungerade Funktionen sprechen, anstatt über Funktionen mit achsensymmetrischen und punktsymmetrischen Graphen.

Umgangssprachlich kann davon gesprochen werden, dass der Funktionsgraph an der senkrechten Achse gespiegelt ist (achsensymmetrisch) bzw. dass der Graph nach einer Drehung um 180° (mit dem Ursprung als Rotationszentrum) immer noch gleich aussieht (punktsymmetrisch).

Im Folgenden werden Aufgaben angegeben, die man zur Festigung der besprochenen Begriffe Achsensymmetrie und Punktsymmetrie verwenden kann. Es geht aber auch darum, Funktionen als mathematische Modelle zu verstehen und ihre Graphen sowie die Funktionsgleichung verständig lesen zu können.

Dabei können die SuS außerdem Fallunterscheidungen bei Funktionsdefinitionen und Funktionen, die nicht für ganz $\mathbb{R}$ oder abschnittsweise definiert sind, kennenlernen. Danach geht es darum, anhand der Funktionsgleichung selbst nachweisen zu können, dass bestimmte Funktionen gerade oder ungerade sind.

Aufgabe 2.1 *Welche der folgenden Funktionsgraphen sind achsen- bzw. punktsymmetrisch?*

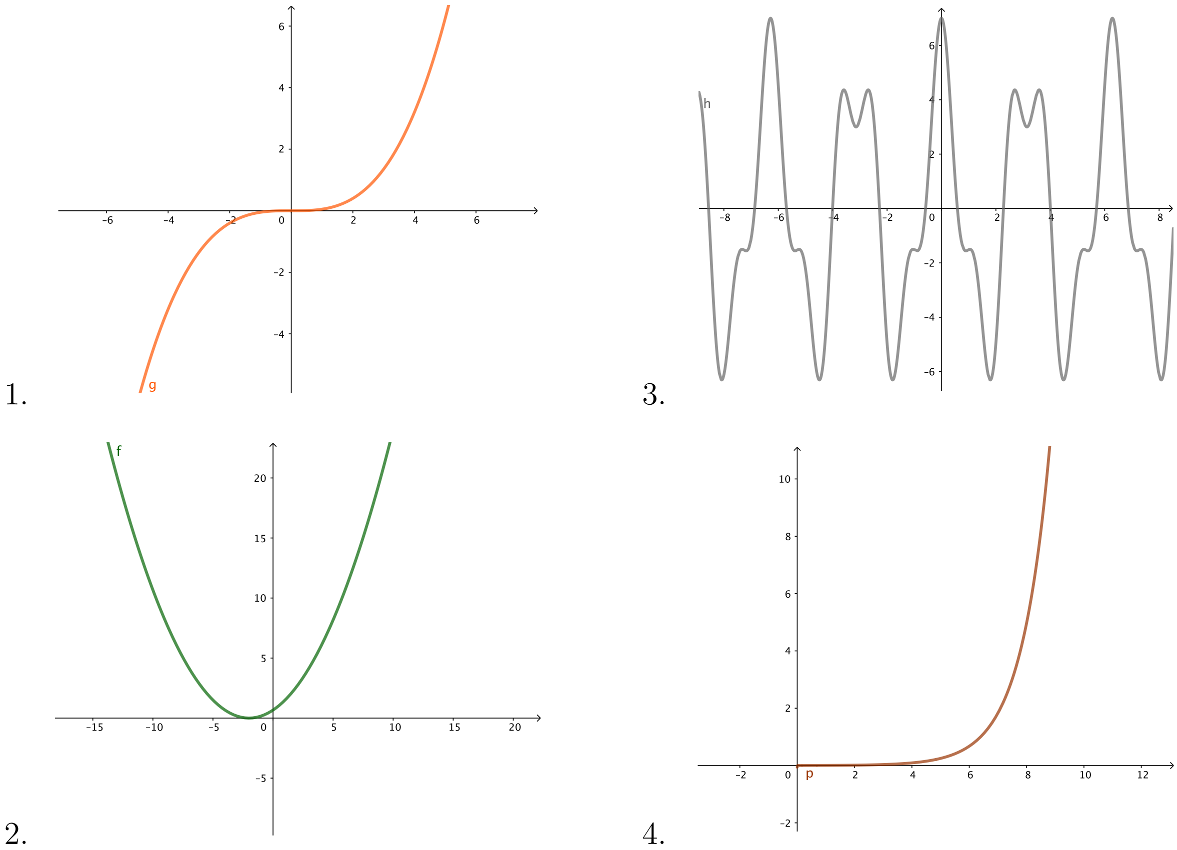


Abbildung 1: Verschiedene Funktionsgraphen

Aufgabe 2.2 *Ordne den beiden periodischen Funktionen $f(x)$ und $r(x)$(s. Abb. 2) die passenden Funktionsgleichungen $g_n(x)$ zu. Sie sind alle für das Intervall $(-1, 1)$ in der folgenden Form definiert (und dann periodisch fortgesetzt).*

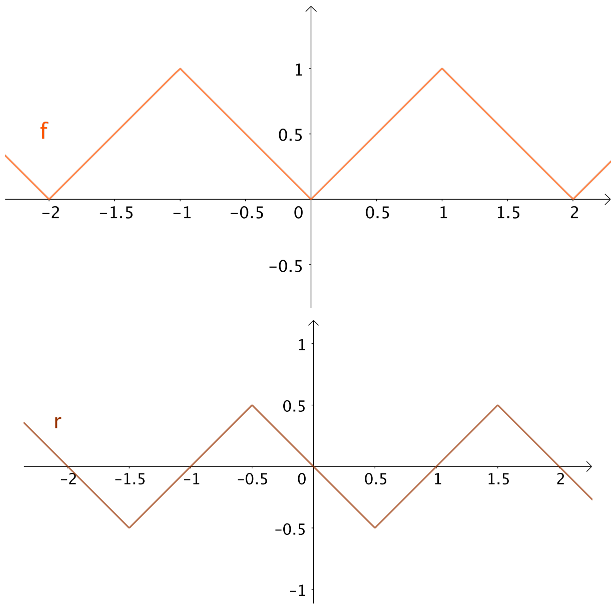


Abbildung 2: Dreiecksschwingungen

1. $g_1(x) = \sin x$
2. $g_2(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ |x| & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$
3. $g_3(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < -0.5 \\ -x & \text{für } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ x-1 & \text{für } x > 0.5 \end{cases}$
4. $g_4(x) = |x|$
5. $g_5(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < -0.5 \\ x & \text{für } |x| \leq 0.5 \\ x-1 & \text{für } x > 0.5 \end{cases}$
6. $g_6(x) = \cos x$

Aufgabe 2.3 *Gib für jede der Funktionen an, ob sie gerade, ungerade oder keines von beiden sind.*

1. $f_1(x) = \sin x$
2. $f_2(x) = 4x - 2$
3. $f_3(x) = x^2 + 1$
4. $f_4(x) = \cos x$
5. $f_5(x) = (x-1)^2$
6. $f_6(x) = \cos(2x)$

Aufgabe 2.4 *Gib für jede der Funktionen an, ob sie gerade, ungerade oder keines von beiden sind.*

1. $f(x) = x^{2k+1}$ *für* $k \in \mathbb{N}$
2. $f(x) = x^{6k}$ *für* $k \in \mathbb{N}$
3. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
4. $f(x) = \cos(5x)$

Des Weiteren kann nun besprochen werden, welche Eigenschaften ungerade bzw. gerade Funktionen haben, und wie diese mathematisch beschrieben werden können.

Aufgabe 2.5 *Welche der 6 Eigenschaften können geraden bzw. ungeraden Funktionen allgemein zugeschrieben werden? Überlege dir einige Beispielsfunktionen und untersuche, welche Eigenschaften auf diese zutreffen. Versuche dann auch deine Entscheidung zu begründen.*

1. *Der Graph der Funktion verläuft durch den Ursprung.*
2. $f(x) + b$ *mit beliebigem* $b \in \mathbb{R}$ *ist immer noch gerade/ungerade.*
3. *Die Funktion ist periodisch.*
4. *Die Ableitung der Funktion ist eine gerade Funktion.*
5. $f(x + b)$ *mit beliebigem* $b \in \mathbb{R}$ *ist immer noch gerade/ungerade.*
6. *Der Graph der Funktion verläuft nicht durch den Ursprung.*

Nachdem die Unterscheidung zwischen den Eigenschaften gerade und ungerade gefestigt wurde, kann man sich einer vertiefenden Frage zuwenden, die vielleicht bereits davor bei der Bearbeitung der Aufgaben aufgetaucht ist: Welche Eigenschaften haben all jene Funktionen, die weder gerade noch ungerade sind?

Zu Beginn muss, etwa in einer Plenumsdiskussion, von den SuS erkannt werden, dass die Summe gerader Funktionen stets eine gerade und die Summe ungerader Funktionen stets eine ungerade Funktion ergibt. (Sofern es sich nicht um die Summe von $f_1(x)$ und $f_2(x) = -f_1(x)$ handelt.)
Das lässt sich am einfachsten erreichen, indem man Potenzfunktionen betrachtet. Nachdem in Aufgabe 2.4 festgestellt wurde, dass die (einzelnen) Potenzfunktionen mit geraden Potenzen immer gerade, jene mit ungeraden Potenzen aber ungerade sind, kann man die SuS fragen, was passiert, wenn man sie zu Polynomfunktionen zusammenaddiert. Addiert man nur gerade bzw. ungerade Potenzfunktionen zusammen, behalten die Ergebnisfunktionen die Symmetrieeigenschaften ihrer Summanden.

Sei aber beispielsweise $f(x) = \cos(5x) + x$ genannt. Diese Funktion ist weder gerade noch ungerade. Aber was lässt sich aussagen, wenn man die Summanden für sich betrachtet? Die SuS sollten hier bereits in der Lage sein zu erkennen, dass $f_1(x) = \cos(5x)$ gerade und $f_2(x) = x$ ungerade ist.

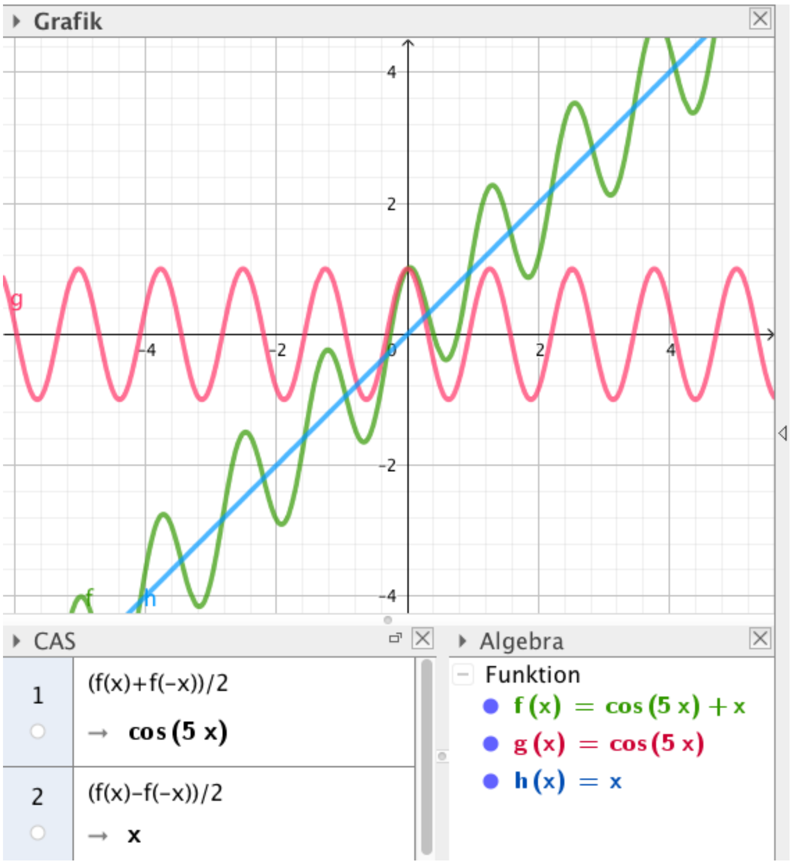


Abbildung 3: $f(x) = \cos 5x + x$

Falls es in der jeweiligen Klasse möglich ist, kann der CAS-Teil aus Abb. 3, also der allgemeine Weg zu den Summanden, besprochen werden, da dies stark zum Verständnis von Funktionen als mathematische Modelle beitragen würde. So werden aus Funktionen Objekte, zu denen es bzgl. der Addition inverse Elemente gibt, wie auch bei Zahlen.

Eine Begründung für die Zerlegung einer beliebigen Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil kann so erfolgen:
Sei $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$, wobei f_g der gerade Anteil der Funktion f und f_u der ungerade Anteil ist. So gilt:

$$f_g(x) = f_g(-x) \tag{1}$$

und

$$f_u(x) = -f_u(-x) \tag{2}$$

damit ist

$$f(x) - f(-x) = f_g(x) + f_u(x) - f_g(-x) - f_u(-x) = f_u(x) - f_u(-x) = 2 \cdot f_u(x) \tag{3}$$

und

$$f(x) + f(-x) = f_g(x) + f_u(x) + f_g(-x) + f_u(-x) = f_g(x) + f_g(-x) = 2 \cdot f_g(x) \tag{4}$$

Diese Zerlegung ist sogar eindeutig. Das folgt aus 3 und 4, kann aber auch so eingesehen werden: Wenn $f(x) = f_{g1}(x) + f_{u1}(x) = f_{g2}(x) + f_{u2}(x)$, dann gilt

$$f_{g1}(x) + f_{u1}(x) = f_{g2}(x) + f_{u2}(x) \tag{5}$$

also

$$f_{g1}(x) - f_{g2}(x) = f_{u2}(x) - f_{u1}(x) \tag{6}$$

Da eine Summe von geraden Funktionen stets gerade und eine Summe von ungeraden Funktionen stets ungerade ist (wie bereits oben besprochen), ist die linke Seite eine gerade Funktion, wohingegen die rechte Seite eine ungerade Funktion ist. Eine Funktion kann aber nur dann gleichzeitig gerade und ungerade sein, wenn sie die Null ist, also $f_{g1}(x) = f_{g2}(x)$ und $f_{u2}(x) = f_{u1}(x)$ gilt.

Falls den SuS keine genauere Begründung der Zerlegung zugemutet werden kann, kann von der Lehrperson zumindest gesagt werden, dass jede Funktion eindeutig in eine gerade und ungerade Funktion zerlegt werden kann. Als Beispiel kann die Darstellung der Exponentialfunktion als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion gezeigt werden (Abb. 4). (Da diese selbst weder gerade noch ungerade ist, bietet sie sich besonders gut an.)

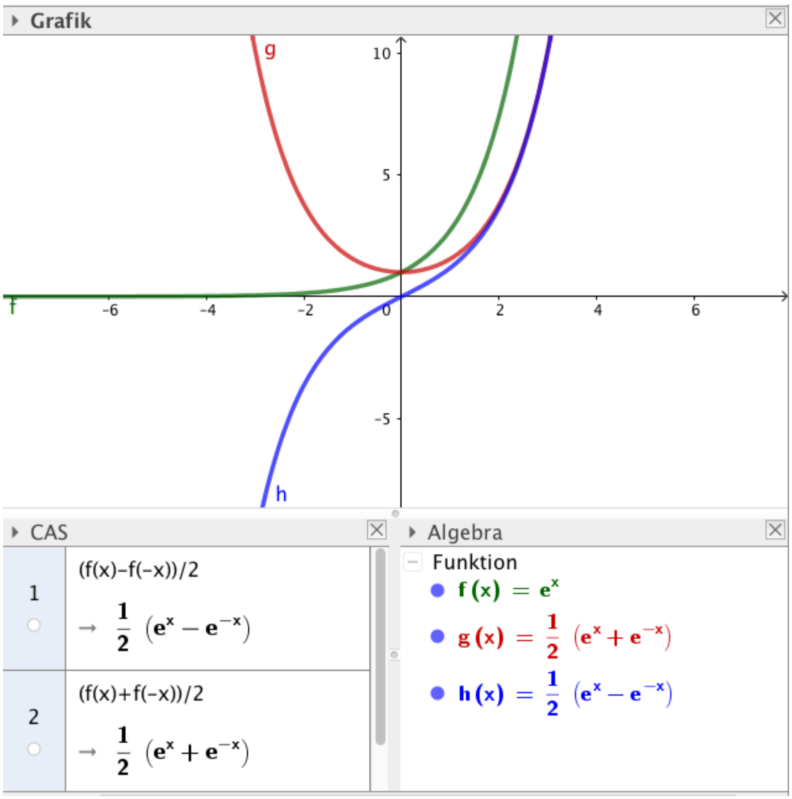


Abbildung 4: Zerlegung einer Exponentialfunktion in einen geraden und ungeraden Teil

2.4 Periodizität

Die Lernziele, die im folgenden Kapitel erreicht werden sollen, sind die folgenden:

1. Die SuS verstehen den Begriff der Periodizität und kennen die Phasenbeziehung zwischen Sinus und Cosinus.

2. Die SuS wissen, wie man Periodizität, Achsen- und Punktsymmetrie zur Erstellung eines Funktionsgraphen anwenden kann.

3. Die SuS wissen, was man durch die Änderung der Parameter a und b der Funktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ bewirken kann, und können dieses Wissen zur Erstellung eines Funktionsgraphen anwenden.

4. Die SuS wissen, was man durch die Änderung der Parameter c und d der Winkelfunktion $f(x) = \sin(x + d) + c$ bewirken kann.

2.4.1 Einführung

Eine wichtige Eigenschaft trigonometrischer Polynome ist die Periodizität, wobei ich hier insbesondere auf periodische Funktionsgleichungen, den Begriff der periodischen Fortsetzung und auf die Manipulation von trigonometrischen Funktionen eingehen möchte.

Definition 2.1 *Eine Periode einer Funktion $f(x)$ ist eine Zahl $L > 0$, für die gilt:*

$$f(x) = f(x + L) \ (= f(x - L)) \ \forall x \tag{7}$$

Auch hier bietet es sich an, eine graphische Vorstellung zu entwickeln: Man kann den SuS Abb.5 zeigen und fragen, was diese Funktionen alle gemeinsam haben, bzw. worin sie sich unterscheiden.

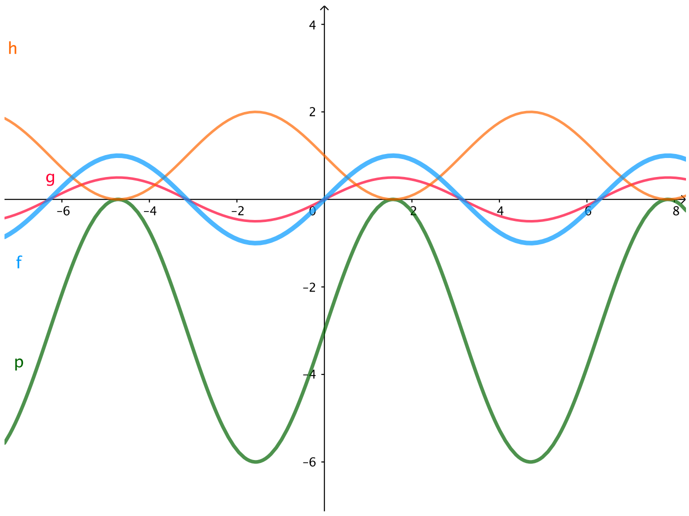


Abbildung 5: Sinusfunktionen 1

Um zu verdeutlichen, dass nicht nur trigonometrische Funktionen periodisch sein können, kann man etwa folgende Abbildung (6) zeigen. Um nicht den Anschein zu erwecken, dass sie alle gleich relevant für den Schulunterricht sind, kann man sagen, dass manche öfter und manche seltener vorkommen werden.

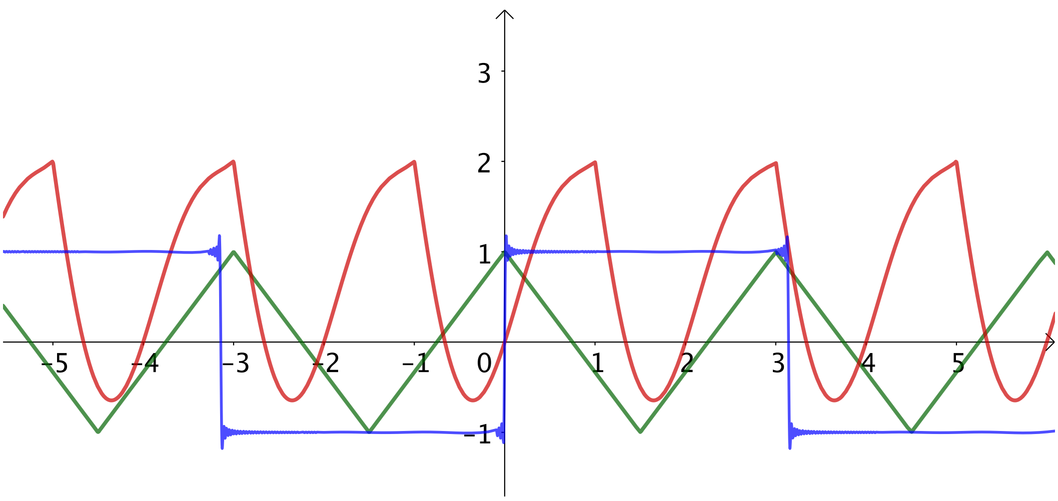


Abbildung 6: Verschiedene periodische Funktionen

Vorerst ohne darüber nachzudenken, welche Funktionsgleichungen diesen Graphen zugrunde liegen, soll der Begriff der Periodizität verstanden werden.

Da nun Periodizität, Achsen- und Punktsymmetrie besprochen wurden, können folgende Aufgaben gestellt werden:

Aufgabe 2.6 *Zeichne Funktionsgraphen mit den folgenden Eigenschaften (mit der Hand):*

1. *f ist periodisch, ungerade und geht durch* $(4, 0)$
2. *g ist nicht periodisch, aber gerade.*
3. *h ist periodisch mit Periode 3, gerade und geht durch* $(3, 1)$ *und* $(0, 1)$
4. *j ist periodisch mit Periode 2, weder gerade noch ungerade und hat ein globales Maximum bei* $(1, 4)$

Anschließend kann man dazu übergehen, die Funktionen, die bis dahin nur über ihren Graphen erfasst wurden, auch in der Form einer Funktionsgleichung zu erfassen. Dazu sei vorerst klar gemacht, dass periodische Funktionen in einem bestimmten Intervall, dessen Länge einer Periode der Funktion entspricht, angegeben werden können, um dann zu sagen, dass die angefügte Phrase "periodisch fortgesetzt" eine periodische Funktion daraus macht.

Also etwa

$$f_{gerade}(x) = |x| \text{ für } x \in (-1, 1), \text{ periodisch fortgesetzt auf } \mathbb{R} \tag{8}$$

wäre die Funktionsgleichung für die folgende Dreiecksschwingung:

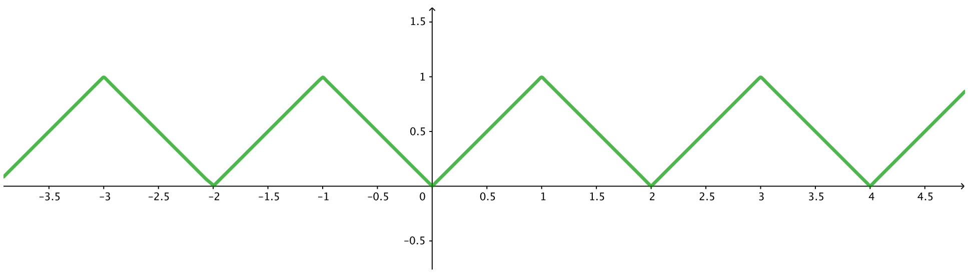


Abbildung 7: Einfache Dreiecksschwingung

Nun kann man zeigen, dass es verschiedene Dreiecksschwingungen gibt, wie dies auch bei anderen Funktionsarten der Fall ist. Erwartet wird die Erkenntnis, dass durch die Variation der bereits in Kapitel 2.3 besprochenen Symmetrie oder der "Höhe" bzw. der

"Breite" der jeweiligen Dreiecke (man kann auch bereits von Periodendauer und Amplitude sprechen) viele verschiedene Dreiecksschwingungen erzeugt werden kann.

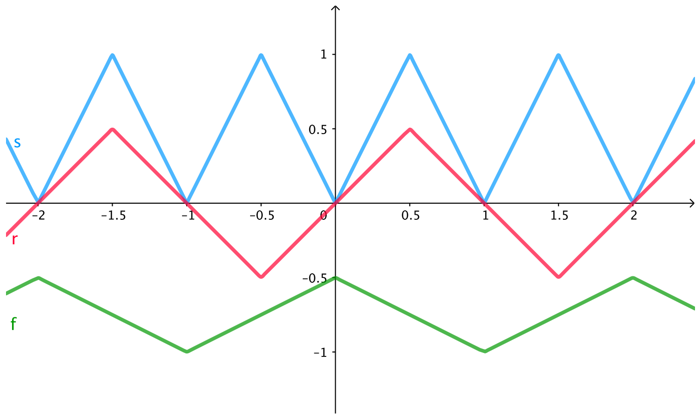


Abbildung 8: 3 Dreiecksschwingungen

Aufgabe 2.7 *Welche Funktionsgleichungen können eine Dreiecksfunktion beschreiben? (Es gibt mehrere richtige Antworten)*

1. $g(x) = |2x|$, *für* $x \in [-0.5, 0.5]$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

2. $g(x) = \begin{cases} x, \text{ für } x \in [-0.5, 0.5] \\ -(x+1), \text{ für } x \in [-1.5, -0.5] \end{cases}$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

3. $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \text{ für } x \in [-1, 0] \\ +\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \text{ für } x \in [0, 1] \end{cases}$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

4. $g(x) = -\frac{1}{2}x$, *für* $x \in [0, 1]$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

5. $g(x) = x$, *für* $x \in [-1, 1]$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

6. $g(x) = 2x$, *für* $x \in [-0.5, 0.5]$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

7. $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, \text{ für } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{3}x \text{ für } x \in [0, 1] \end{cases}$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

8. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 0.5 \text{ für } x \in [-1, 0] \\ -\frac{1}{2}x - 0.5 \text{ für } x \in [0, 1] \end{cases}$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

9. $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$, *für* $x \in [-1, 0]$, *periodisch fortgesetzt auf* $\mathbb{R}$

Nachdem durch diese Aufgabe die Komplexität allgemeiner periodischer Funktionen veranschaulicht wurde, kann man dazu übergehen, die beiden trigonometrischen Funktionen(s. Abb.9), mit denen wir uns auseinandersetzen wollen, zu vergleichen.

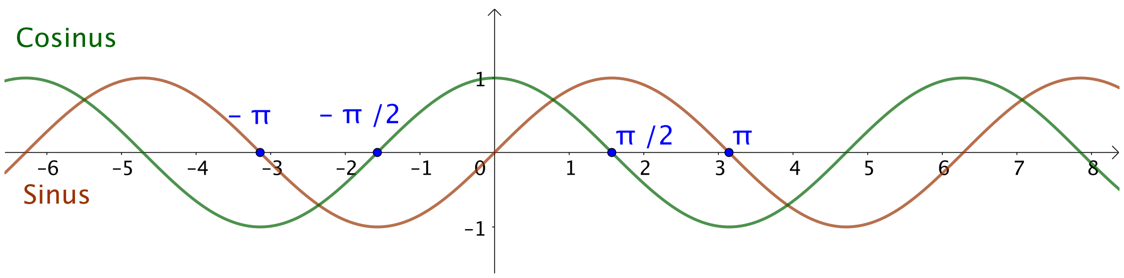


Abbildung 9: Sinus- und Cosinusfunktion

Hier muss man noch nicht ansprechen, dass $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ gilt. Die Feststellung, dass die Perioden der beiden Funktionen ebenso wie die Amplituden gleich sind, und die kleinste Periode 2π beträgt, reicht vorerst aus.

2.4.2 Parameter

Dieses Kapitel sollte basierend auf GeoGebra und den Möglichkeiten, die Schieberegler in GeoGebra bieten, in Einzel- oder Partnerarbeit erarbeitet werden.

Zuerst kann man die SuS anhand von GeoGebra ausprobieren lassen, welche unabhängigen Parameter zur Sinusfunktion $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ existieren.

Wenn die SuS herausgefunden haben, dass es 4 unabhängige Parameter gibt, kann man vorerst 3 davon mit Schiebereglern in GeoGebra genauer analysieren. (s. Abb. 10)

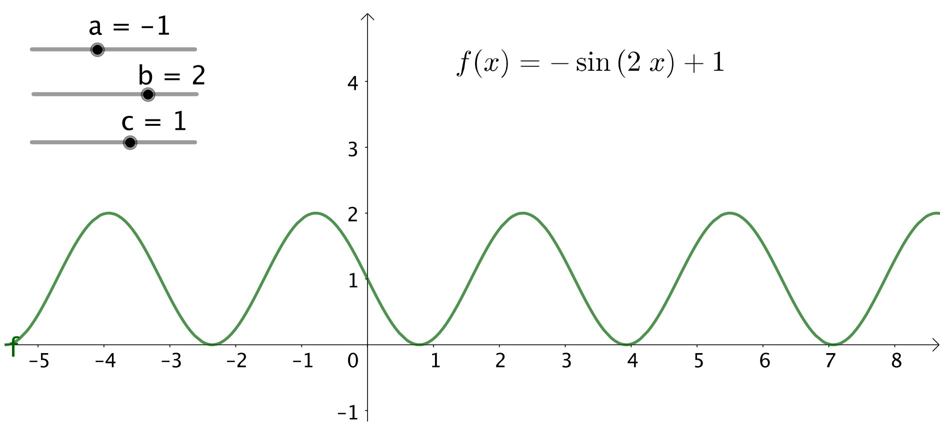


Abbildung 10: Sinus manipulieren mit Schiebereglern

Aufgabe 2.8 *Erarbeite die folgenden Aufgaben zu $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + c$.*
Untersuche mit GeoGebra!

1. *Was passiert, wenn die Parameter negativ oder 0 sind? Untersuche für jeden Parameter einzeln!*
2. *Erstelle 3 Sinusfunktionen mit zumindest teilweise unterschiedlichen Parametern, die alle die selben Nullstellen haben. Welche Werte dürfen die jeweiligen Parameter annehmen?*
3. *Bei welchen Werten der einzelnen Parameter kannst du dir ganz sicher sein, dass der Graph der Sinusfunktion durch den Ursprung geht?*
4. *Manipuliere die Sinusfunktion so, dass das globale Maximum* 3 *und das globale Minimum* -3 *ist. Wie setzt du welchen Parameter? Wieviele Möglichkeiten gibt es?*
5. *Gib mindestens 2 weitere mögliche Antworten auf den vorangegangenen Aufgabenpunkt, diesmal aber ohne die Voraussetzung, dass das Minimum* -3 *ist. Wieviele Möglichkeiten gibt es?*
6. *Verallgemeinere die Erkenntnis von Punkt 4, und formuliere einen Merksatz, wie du die Amplitude einer Sinusfunktion verändern kannst.*
7. *Platziere genau 5 Hügel (Maxima) und 5 Täler (Minima) im Intervall* $[0, 2\pi]$. *Es soll kein Hügel oder Tal genau am Rand des Intervalls liegen. Welche Parameter musst du wie setzen? Gibt es mehrere Möglichkeiten? Wenn ja, welche und wieviele?*
8. *Manipuliere die Funktion so, dass die Abstände zwischen den Nullstellen jeweils* 1 *betragen. Nachdem du eine ungefähre Schätzung mit den Schiebereglern erarbeitet hast, überlege auch, welche konkrete Zahl der zuständige Parameter annehmen muss.*

Nachdem die Bedeutung der Parameter a, b und c erarbeitet wurde, gehen wir zum letzten Parameter d über. (Ebenfalls mit GeoGebra-Unterstützung, diesmal aber mit 4 Schiebereglern.)

Aufgabe 2.9 *Es sei $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + d) + c$. Untersuche mit GeoGebra!*

1. *Finde mindestens zwei unterschiedliche Werte für den Parameter d, bei denen der Funktionsgraph von $f(x)$ genau gleich aussieht.*
2. *Mache nun durch Manipulation vom Parameter d die Funktion $g(x) = \cos(x)$ aus $f(x)$ (s.oben) . Welchen d-Wert brauchst du?*
3. *Mache durch Manipulation von d aus $\sin(2x)$ die Funktion $\cos(2x)$. Welchen d-Wert brauchst du?*
4. *Nimm die Funktion, die du in Aufgabe 2.8 Punkt 8 konstruiert hast, und versuche diese um 1 nach rechts zu verschieben. Welchen Wert nimmt d an?*
5. *Sei $b = 1$. Um wieviel verschiebt sich der Graph, wenn du $d = 2\pi$ setzt?*
6. *Sei $b = 1$. Um wieviel verschiebt sich der Graph, wenn du $d = \frac{\pi}{2}$ setzt?*
7. *Betrachte nun $a \cdot \sin(2\pi(x + d_2)) + c$. Inwiefern würde es Sinn machen, eine trigonometrische Funktion so anzuschreiben, statt $f(x) = a \cdot \sin(x + d) + c$?*
8. *Gehe nun alle Punkte von Aufgabe 2.8 für $a \cdot \sin(bx + d) + c$ durch. Was muss man jeweils ergänzen?*
9. *Gehe nun alle Punkte von Aufgabe 2.8 auch für die Cosinusfunktion $a \cdot \cos(bx + d) + c$ durch. Wo sind Unterschiede zur Sinusfunktion erkennbar?*
10. *Manipuliere $\sin(x)$ und $\cos(x)$ so, dass sie jeweils durch die Punkte $(1,\ \pi + 1)$, $(0,\ 1)$ und $(-1,\ 1 - \pi)$ gehen.*

Nachdem man diese Aufgaben erarbeitet hat, kann man frontal eine kurze Begriffserklärung einfügen, und den Unterschied zwischen Kreisfrequenz und Frequenz darlegen:
Die SuS sollten hier schon wissen, dass man durch das Variieren eines Parameters die Periodenlänge steuern kann. (Wenn bei $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + d) + c$ mehr Wiederholungen in einer Zeiteinheit passieren soll, muss $|b|$ größer werden.) Nun kann man sagen, dass die Frequenz allgemein angibt, wie viele Wertwiederholungen einer Funktion in einer Zeiteinheit, also etwa in einer Sekunde stattfinden.
Die Kreisfrequenz gibt auch an, wie viele Wertwiederholungen in einer Sekunde stattfinden, allerdings in 2π-Einheiten. Bei $\sin(x)$ beträgt damit die Kreisfrequenz $\omega = 1$.
Nach dieser Erklärung kann man die SuS fragen:

Aufgabe 2.10 *Ist unser b in $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + d) + c$ eine Kreisfrequenz oder eine Frequenz? Wie kommt man von diesem b zur anderen "Frequenzart"?*

Aufgabe 2.11 *Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(a \cdot x + b)$ mit $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Wähle die richtige(n) Aussage(n) aus.*

- ☐ *Vergrößere b. Je größer b wird, desto weiter nach rechts (in Richtung der positiven x-Achse) wird der Graph von f verschoben.*
- ☐ *Vergrößere b. Je größer b wird, desto weiter nach links (in Richtung der negativen x-Achse) wird der Graph von f verschoben.*
- ☐ *Je kleiner $|a|$ wird, desto kürzer wird die Periode von $f(x)$.*
- ☐ *Je kleiner $|a|$ wird, desto länger wird die Periode von $f(x)$.*
- ☐ *Je kleiner $|a|$ wird, desto kleiner wird die Frequenz von $f(x)$.*
- ☐ *Je kleiner $|a|$ wird, desto größer wird die Frequenz von $f(x)$.*
- ☐ *Vergleiche $f_1(x) = \sin(a_1 \cdot x)$ und $f_2(x) = \sin(a_2 \cdot x)$. Wenn a_1 eine ungerade natürliche Zahl ist und a_2 eine gerade natürliche Zahl ist, so sind f_1 und f_2 2π-periodisch.*
- ☐ *Vergleiche $f_1(x) = \sin(a_1 \cdot x)$ und $f_2(x) = \sin(a_2 \cdot x)$. Wenn sowohl a_1 als auch a_2 eine gerade natürliche Zahl ist, so sind sie beide 2π-periodisch.*

Aufgabe 2.12 *Erstelle eine Cosinusfunktion mit den folgenden Eigenschaften (es gibt mehrere Möglichkeiten):*

1. *Periode $= 1$, Amplitude$= \pi$, Punkt $(2, 2) \in f(x)$*
2. *Punkte $(-1, \pi)$, $(0, -\pi) \in f(x)$*
3. *Punkte $(\pi, -4)$, $(0, -4) \in f(x)$ und ein Maximum in $(\frac{\pi}{2}, 0)$*
4. *Periode$= \pi$, Punkt $(\frac{\pi}{3}, \pi) \in f(x)$*

Wenn die Bedeutung der Parameter erarbeitet ist, kann man zu den Abbildungen zurückgehen, die bereits am Anfang dieses Kapitels gezeigt wurden:

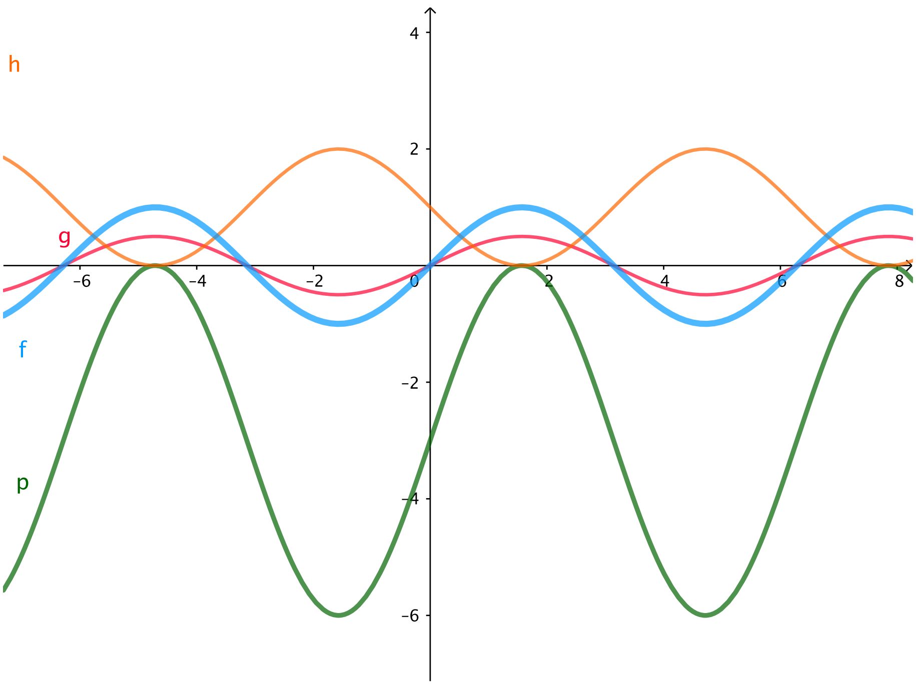


Abbildung 11: Sinusfunktionen 1

Aufgabe 2.13 *Betrachte die Abb. 11. Die blaue Kurve ist der Graph der Funktion* $f(x) = \sin(x)$. *Alle anderen Funktionen (orange:* $h(x)$, *rot:* $g(x)$ *und grün:* $p(x)$*) haben die Form* $r(x) = a_r \cdot \sin(b_r \cdot x) + c_r$. *Ordne die Parameter* a_h, a_g, a_p, b_h *usw. der 3 Sinuskurven der Größe nach an!*

Aufgabe 2.14 *Nun wurden alle Funktionen wieder leicht manipuliert bis auf die blaue Funktion* $f(x) = \sin(x)$ *(s. Abb. 12). Alle anderen Funktionen haben die Form* $r(x) = a_r \cdot \sin(b_r \cdot x + d) + c_r$. *Ordne die Parameter* a_h, a_g, a_p b_h *usw. der 3 Sinuskurven (orange:* $h(x)$, *rot:* $g(x)$ *und grün:* $p(x)$*) der Größe nach an! Wir gehen von* $2\pi \geq d > 0$ *aus.*

Abschließend sei noch folgendes angerissen: Es kann sein, dass die folgende Thematik bereits bei Aufgabe 2.9 aufgekommen ist, aber falls nicht (wovon ich eher ausgehe), kann frontal die folgende Gleichheit demonstriert werden, um noch einmal zu verdeutlichen, dass bei trigonometrischen Funktionen verschiedene Ausdrücke dasselbe darstellen können:

$$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}) = -\cos(x - 3 \cdot \frac{\pi}{2}) \tag{9}$$

$$\sin(x - \pi) = \sin(-x) = -\sin x = -\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}) = \cos(x - 3 \cdot \frac{\pi}{2}) \tag{10}$$

Zusätzlich kann die Schreibweise $f(x) = a\sin(b(x+d_b))+c$ in einem Vortrag behandelt und in diesem besprochen werden, dass die Sinusfunktion zwar im Kompetenzenkatalog nicht auf diese Weise angeschrieben wird, wobei dies aber möglich wäre. Dabei ist die praktische Seite des Ganzen, dass sich die Funktion stets um $|d|$ verschiebt. Es ist wohl Geschmackssache, welche Schreibweise man wählt.

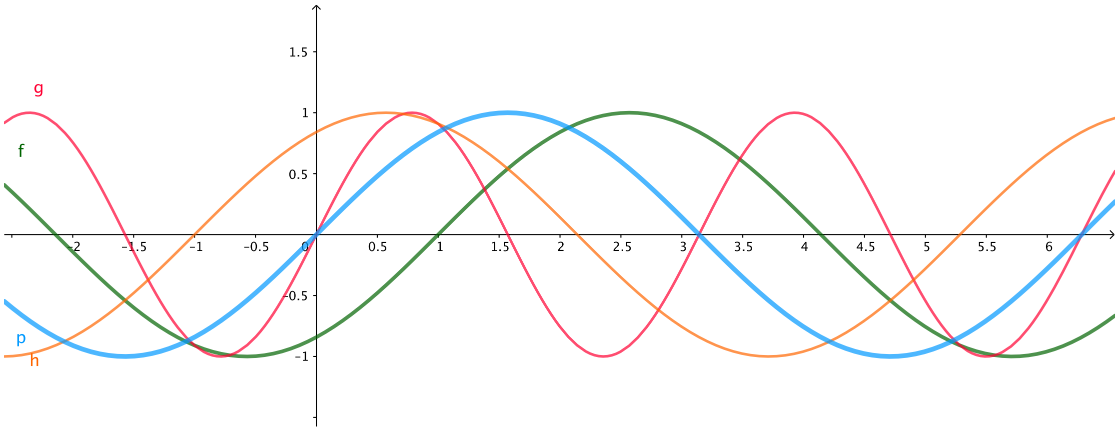


Abbildung 12: Sinusfunktionen 2

2.5 Überlagerungen

Das Lernziel, das in diesem Kapitel erreicht werden soll, ist das folgende:

1. Die SuS kennen einfache Beispiele der Überlagerung von Schwingungen.

Nachdem in den vergangenen Kapiteln 2.3 und 2.4 zwei wichtige Eigenschaften von Funktionen abgehandelt wurden, geht es nun daran, einfache trigonometrische Polynome zu betrachten, die insbesondere als Überlagerung von Schwingungen interpretiert werden sollen.

Erste Schritte in diese Richtung hatten wir bereits in Kapitel 2.4 unternommen, als wir die Summe ungerader und gerader Funktionen betrachtet haben. Wenn man diese Potenzfunktionen auf trigonometrische Funktionen ummünzt, sind das bereits einfache trigonometrische Polynome. Am einfachsten kann man das mit der Überlagerung von zwei gleichen Schwingungen, also etwa $\sin x + \sin x = 2\sin x$, veranschaulichen:

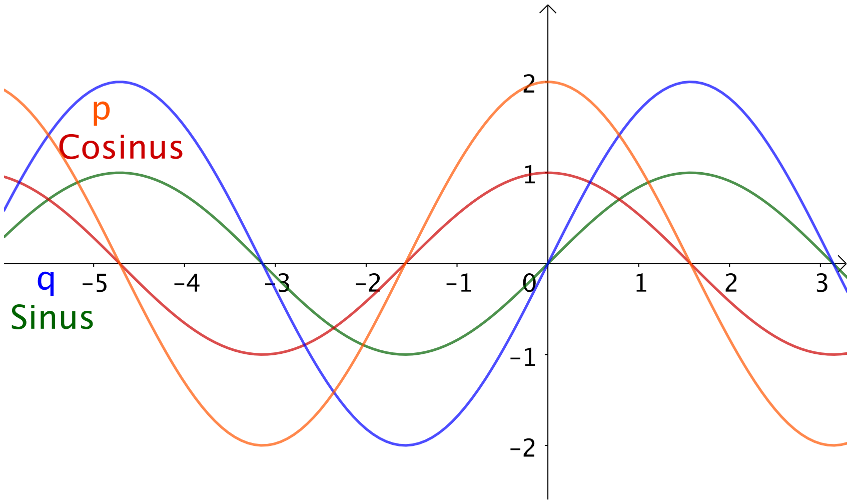


Abbildung 13: $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sowie $q(x) = 2 \cdot \sin(x)$ und $p(x) = 2 \cdot \cos(x)$

Um ds Verständnis zu festigen, kann man durch aus auch die Überlagerung von $\sin(x)$ und $\sin(5x)$ bzw. ähnliche Aufgabenstellungen erarbeiten lassen, indem man $\sin x$ und $\sin(5x)$ an die Wand projeziert und die SuS skizzieren lässt, wie nun die Summe aussehen könnte.

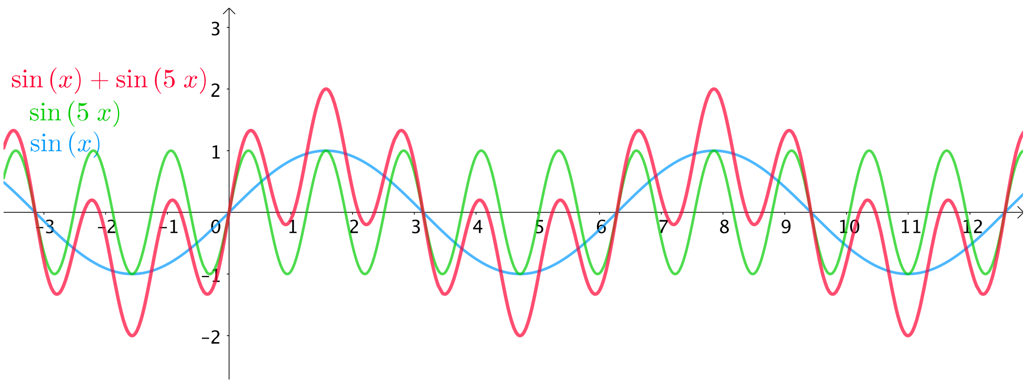


Abbildung 14: Überlagerung von $\sin(x)$ und $\sin(5x)$

Aufgabe 2.15 *Skizziere die folgenden Überlagerungen!*

1. $\sin(x) + \sin(3x)$
2. $\cos(x) + \cos(2x)$

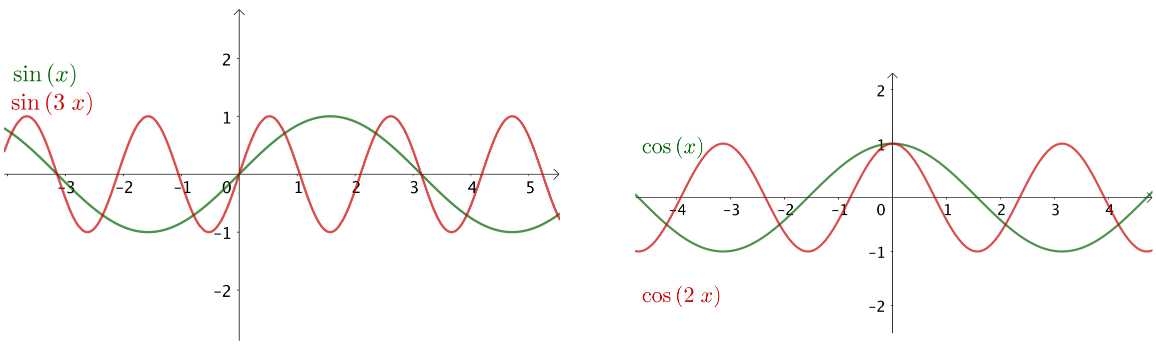


Abbildung 15: Graphische Hilfestellungen zur Überlagerung von Funktionen

Als Begründung, warum wir meistens $\sin(bx)$ mit $b \in \mathbb{N}$ betrachten, kann man auf die Obertöne verweisen. Eventuell könnte man auf die Erkenntnis von Kapitel 2.4, Aufgabe 2.11 verweisen. Es ist nämlich so, dass die kleinste Periode bei 2π bleibt und die Funktionen handlicher sind, wenn man $b \in \mathbb{N}$ setzt.

Was hier ebenfalls besprochen werden kann, ist das Phänomen der Schwebung: Man könnte etwa die folgende Aufgabe stellen:

Aufgabe 2.16 *Gegeben sind $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$, ..., $f_{10}(x) = \sin(10x)$. Wähle 2 von ihnen aus und versuche durch Addition der beiden Funktionen, möglichst viele verschiedene Maximum- und Minimumstellen zu erzeugen.*

Das Spannende an der Sache ist, dass man mit der Summe von nur 2 relativ einfachen Schwingungen doch so einen komplexen Klang erzeugen kann.

2.6 Approximation, Integral und Ableitung

Die Lernziele, die im folgenden Kapitel erreicht werden sollen, sind die folgenden:

1. Die SuS können ungerade und gerade Funktionen unterscheiden und verstehen, dass die Ableitung einer ungeraden Funktion stets gerade ist und umgekehrt.

2. Die SuS wissen, dass die Integrationsgrenzen bei trigonometrischen Polynomen verschoben werden können, solange man über eine ganze Periode integriert.

3. Die SuS verstehen den Begriff der Approximation zumindest intuitiv und haben eine Vorstellung davon, dass durch die Summe mehrerer Funktionen eine andere Funktion angenähert werden kann.

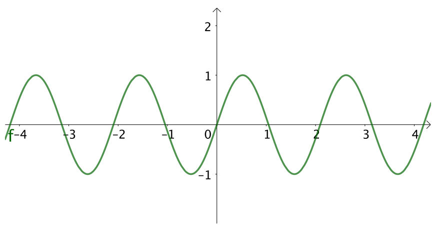
2.6.1 Differenzialrechnung

Sobald die Differenzialrechnung und die Integralrechnung erarbeitet wurden, kann man die Frage aufwerfen, ob Eigenschaften wie Symmetrie und Periodizität "vererbt" werden.

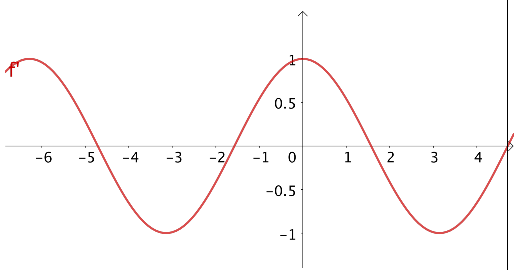
Aufgabe 2.17 *Wähle die richtige(n) Aussage(n) aus. Im Zweifelsfall skizziere einen entsprechenden Funktionsgraphen und überlege anhand dessen.*

- ☐ *Sei f eine periodische Funktion. Dann ist f' auch periodisch.*
- ☐ *Sei f gerade. Dann ist f' auch gerade.*
- ☐ *Sei f ungerade. Dann ist f' auch ungerade.*
- ☐ *Sei f eine trigonometrische Funktion. Dann ist f' keine trigonometrische Funktion.*
- ☐ *Sei f gerade, aber nicht konstant. Dann ist f' ungerade.*
- ☐ *Sei f ungerade. Dann ist f' gerade.*

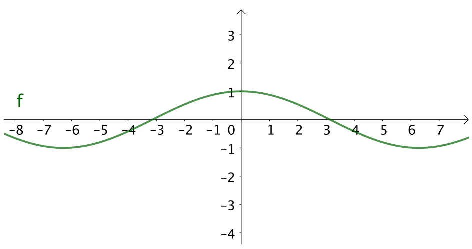
Aufgabe 2.18 *Ordne jedem Funktionsgraphen (1.-3.) jeweils den entsprechenden Ableitungsgraphen (4.-6.) zu.*



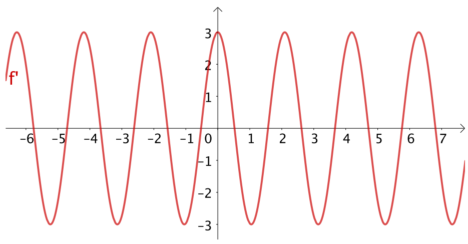
1.



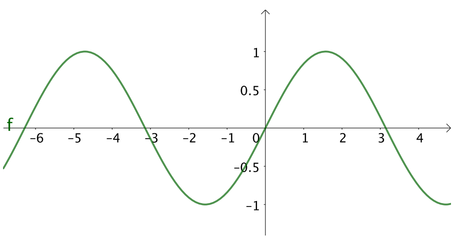
4.



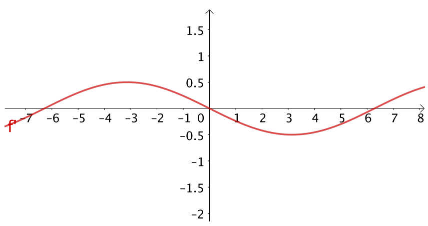
2.



5.



3.



6.

Hinsichtlich der Ableitung einer periodischen Funktion kann man auch mit GeoGebra in Erfahrung bringen, dass es einen wesentlichen Unterschied macht, ob man $f(x) = \sin(ax)$ mit $|a| < 1$ ableitet, oder mit $|a| > 1$.
Mit der Kettenregel ergibt sich $f'(x) = a \cdot \cos(x)$. Falls $|a| < 1$, wird die Amplitude der folgenden Ableitungsfunktion immer kleiner und falls $|a| > 1$, immer größer, und falls $|a| = 1$ bleibt die Amplitude natürlich gleich. (Abb. 2.6.1 ist ein Beispiel für $a = 2.45$) Mit dem Schieberegler lassen sich aber auch die Fälle $|a| = 1$ und $|a| < 1$ visualisieren.

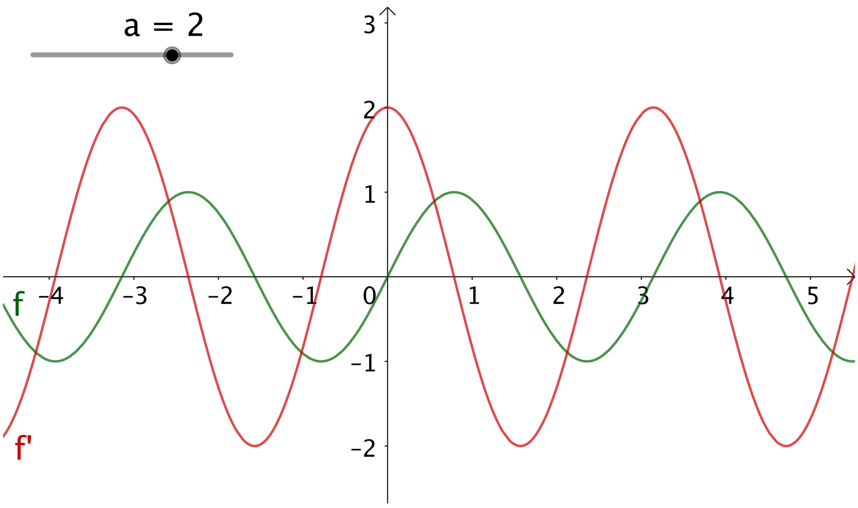


Abbildung 16: $f(x) = \sin(ax)$ und $f'(x)$ mit einem Schieberegler für $a = 2$

Man kann den Sachverhalt auch veranschaulichen, indem man 2 Schieberegler verwendet und die Tangente an einem beliebigen Punkt auf $f(x)$ einzeichnet. Sobald die Tangente nicht mehr die Steigung 1 hat, hat die Ableitungsfunktion eine andere Amplitude als die Ursprungsfunktion.

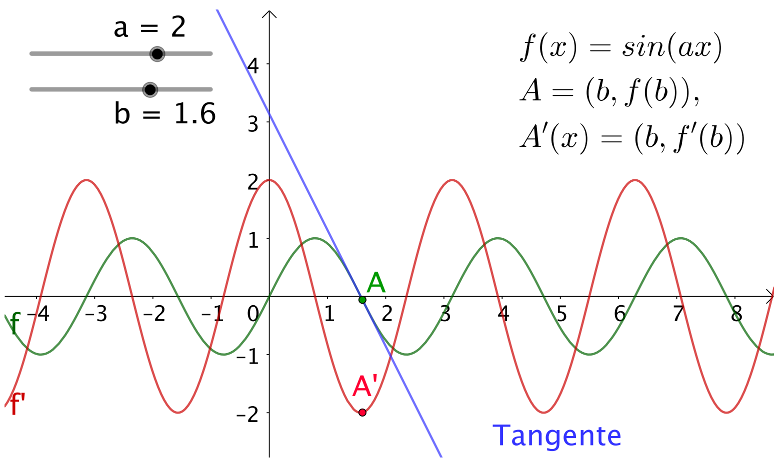


Abbildung 17: $f(x) = \sin(ax)$ und $f'(x)$ sowie die Tangente an f(x) an der Stelle $x = 1.5$ mit einem Schieberegler für a=2

2.6.2 Integralrechnung

Nach der Ableitung kann als nächstes das Integral betrachtet werden. Im Sinne der Umkehroperation kann man die Fragen von Kapitel 2.6.1 andersherum noch einmal stellen. Weiters sind auch folgende Aufgaben möglich:

Aufgabe 2.19 *Finde ungerade Stammfunktionen einer geraden Funktion. Welche Stammfunktionen einer ungeraden Funktion sind gerade?*

Was "neu" sein kann, ist die Behandlung der Integrationsgrenzen. Um die Wichtigkeit von Integrationsgrenzen zu demonstrieren, kann man etwa folgende Aufgabe stellen:

Aufgabe 2.20 *Welches der folgenden Integrale hat den Wert 0? Skizziere und überlege.*

1. $\int_{-\pi}^{0} \sin(x)$

2. $\int_{0}^{2\pi} \sin(x)$

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)$

4. $\int_{0}^{\pi} \cos(x)$

5. $\int_{-2\pi}^{2\pi} \cos(x)$

6. $\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{2\pi}{16}} \sin(x)$

7. $\int_{1.2}^{2\pi+1.2} \sin(x)$

8. $2 \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(x)$

Man kann auch in Erinnerung rufen, dass es außer den trigonometrischen Polynomen noch andere periodische Funktionen gibt, wie zB. die Dreiecksfunktion (vgl. Kapitel 2.4):

Aufgabe 2.21 *Es ist $f(x) = |2x| - 1$ für $-1 < x < 1$ (periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$). (vgl. Abb. 18). Welches Integral hat denselben Wert wie $\int_{-1}^{1} f(x)$?*

☐ $\int_{-0.62}^{0.62} f(x)$

☐ $\int_{-0.62}^{1.62} f(x)$

☐ $\int_{-0.62}^{1.38} f(x)$

☐ $\int_{-1.5}^{1.5} f(x)$

☐ $\int_{-0.5}^{0.5} f(x)$

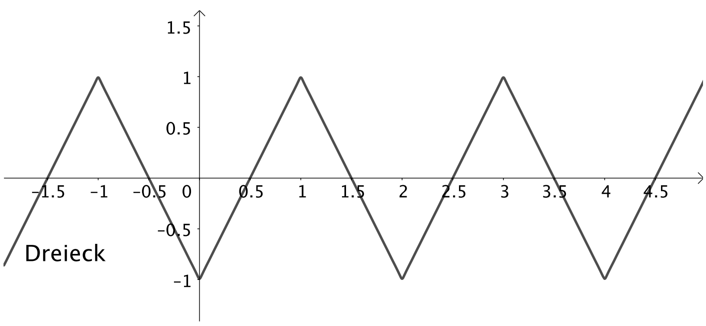


Abbildung 18: Dreiecksfunktion

2.6.3 Approximation

Am Ende des vorangegangen Kapitels wurde die Dreiecksfunktion behandelt, an welche man die Approximation auf Wunsch ansetzen kann. Der Schritt böte sich an, nachdem man die Dreiecksfunktion bereits durch die Summe von $3-4$ Cosinusfunktionen relativ gut annähern kann. Es ist auch ein spannender Effekt, eine solch "eckige" Funktion mit geschmeidigen Cosinusfunktionen annähern zu können. Man kann außerdem erwähnen, dass periodische Vorgänge als Impulse häufig in der Elektrotechnik vorkommen, wo das Ersetzen von Funktionen durch trigonometrische Polynome die Arbeit immens erleichtert.

Dazu zeigt man vorerst einen Graphen der Fourierreihe einer Dreiecksfunktion (zB. Abb. 18) und verrät den SuS, dass sich jener Graph aus der Summe trigonometrischer Funktionen ergibt. Man kann die SuS an die Überlagerung von Schwingungen erinnern, indem man einige Überlagerungen von Schwingungen anhand von GeoGebra (s. Abb. 19 und Abb.20) zeigt, und die SuS skizzieren lässt, wie die Summe der beiden Funktionen aussehen könnte.

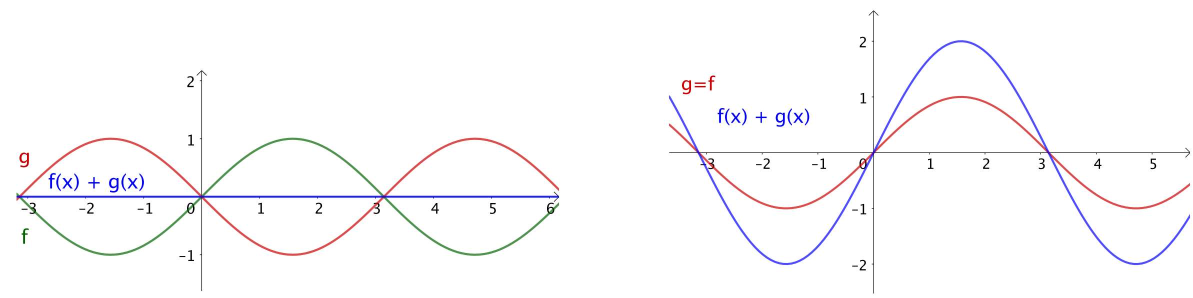


Abbildung 19: links: Überlagerung von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = -\sin(x)$ sowie rechts: $f(x) = g(x) = \sin(x)$

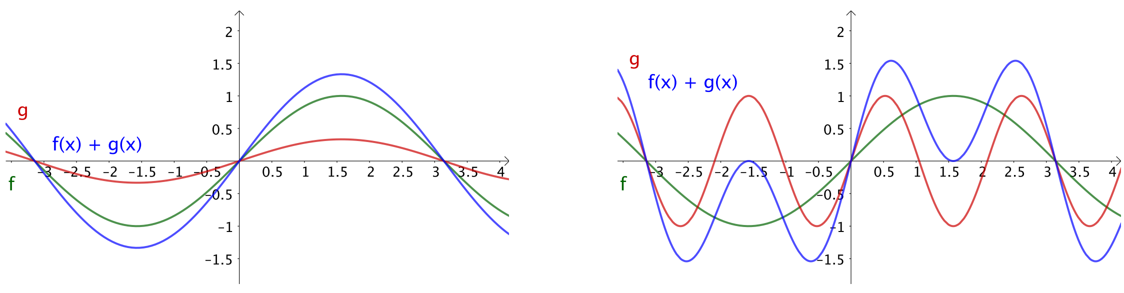


Abbildung 20: links: $\sin(x) + \dfrac{1}{3}\sin(x)$ rechts: $\sin(x) + \sin(3x)$

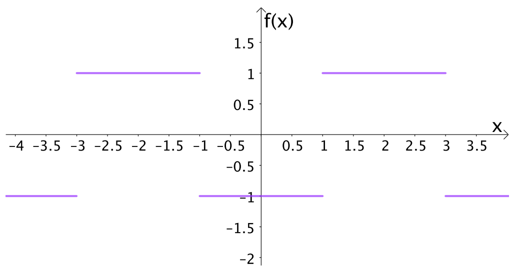
In Abb. 19 sieht man links die Auslöschung und rechts die Verstärkung von Schwingungen, in Abb. 20 links die Überlagerung zweier Schwingungen mit verschiedenen Amplituden und rechts die Überlagerung zweier Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen (jeweils in blau die Überlagerung von rot und grün).

Nach diesem Input sollen sich die SuS mit GeoGebra selbst daran versuchen, eine Rechteck-, Dreieck-, Parabel- und Sägezahnschwingung durch eine Summe von trigonometrischen Funktionen anzunähern.

Das muss natürlich mit Hilfe von GeoGebra passieren. Etwa mit folgenden Aufgabenstellungen kann den SuS nachgeholfen werden:

Aufgabe 2.22 *Zeichne den Funktionsgraphen der folgenden Funktionen mit GeoGebra, erstelle für die jeweiligen Koeffizienten a bis j Schieberegler (mit Schrittgröße 0.01) und versuche mit je einer dieser Funktionen die Dreieck- (vgl. Abb. 18), Rechteck- (vgl. Abb. 21 links), Parabel- (vgl. Abb. 21 rechts) und Sägezahnschwingungen (vgl. Abb. 22) nachzubauen. Amplitude und Periode müssen nicht mit der Vorlage übereinstimmen.*

1. $f(x) = -a_1 \cdot \cos(x) - a_3 \cdot \cos(3x) - a_5 \cdot \cos(5x) - a_7 \cdot \cos(7x)$
2. $f(x) = a_0 - a_1 \cdot \cos(x) - a_2 \cdot \cos(2x) + a_3 \cdot \cos(3x) - a_4 \cdot \cos(4x)$
3. $f(x) = a_1 \cdot \sin(x) - a_2 \cdot \sin(2x) + a_3 \cdot \sin(3x) - a_4 \cdot \sin(4x) + a_5 \cdot \sin(5x) - a_6 \cdot \sin(6x)$
4. $f(x) = -a_1 \cdot \cos(x) + a_3 \cdot \cos(3x) - a_5 \cdot \cos(5x) + a_7 \cdot \cos(7x) + a_9 \cdot \cos(9x) + a_{11} \cdot \cos(6x)$



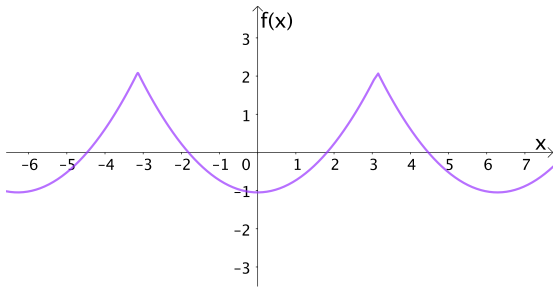


Abbildung 21: Rechteck- und Parabelschwingung zum Nachbasteln

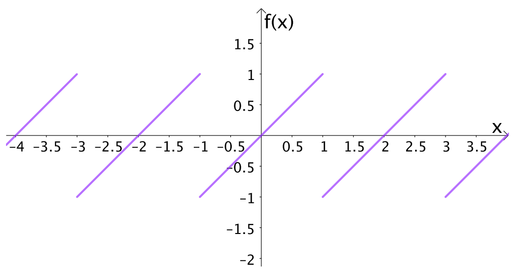


Abbildung 22: Sägezahnschwingung zum Nachbasteln

Zum Spaß könnte man noch Begriffe wie die Katzenmonsterfunktion (ähnlich wie die Approximation der Rechtecksfunktion, allerdings ohne Koeffizientenminderung) oder ähnliches einführen und die SuS probieren lassen, diese Funktionen nachzubauen. Mit Katzenmonster ist die in Abb. 23 dargestellte Funktion gemeint (sie sieht ein wenig wie eine Katze mit 2 Tatzen aus).

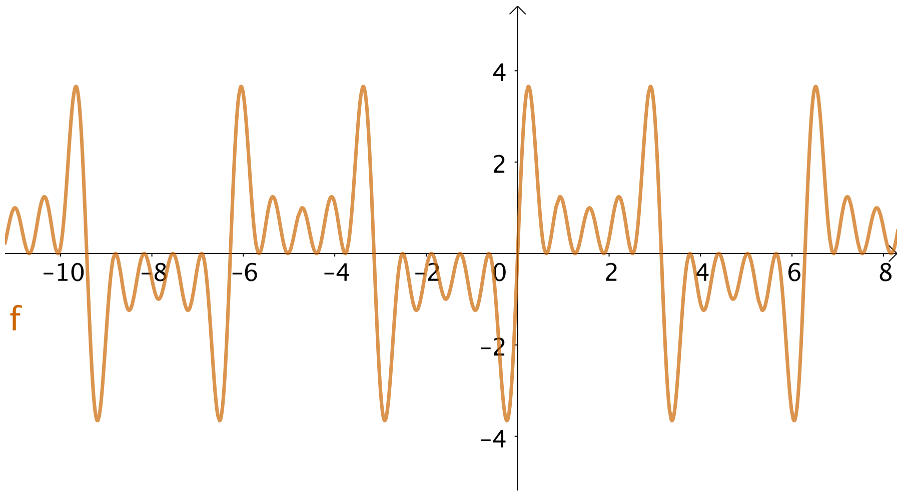


Abbildung 23: "Katzenmonsterfunktion"

Was unbedingt im Gedächtnis der SuS bleiben sollte, ist die Vorstellung einer Approximation: Je öfter die Bauanschrift wiederholt wird, desto näher kommt das Ergebnis an das Original heran.

Man kann auch alltagsnahe Beispiele des "Nachbauens" nennen, um es besser veranschaulichen zu können: etwa Kochrezepte, das Nacherzählen von Geschichten oder das Spielen von Musiknoten. Die Gütekriterien bei so einem Nachbau sind von Gebiet zu Gebiet unterschiedlich.

Auch in der Mathematik können Dinge nachgebaut werden. In der Mathematik gibt es allerdings genaue Kriterien, wann so ein Nachbau ein "echter" Nachbau ist. (In der Realität gibt es so etwas meist nicht, etwa: wenn mehr als 80 Prozent der Noten stimmen, wird man das Stück richtig nachgespielt haben oder wenn die Zutaten alle stimmen, wird das Rezept richtig umgesetzt worden sein.)

Die Arbeitsweise muss einem Schema unterliegen und das Ergebnis immer besser werden, wenn man dieses befolgt. Daraus folgt dann auch, dass mit der Zeit der Unterschied zwischen dem Ergebnis und dem Ziel sehr sehr klein werden muss. In der Realität wird man es kaum schaffen, so "gute" Resultate zu erzielen. (Man denke nur daran, ein Gericht genau so zuzubereiten wie das Rezept es vorsah.)

3 Fourierreihe in der HTL: Unterrichtsvorschläge

3.1 Lehrplan und Grundkompetenzenkatalog

In den Höheren Technischen Lehranstalten ist die Wahrscheinlichkeit, Fourierreihen im Unterricht behandeln zu "müssen", sehr viel größer als in der AHS. Allerdings ist hier eine weitere Differenzierung nötig, worauf ich später noch eingehen möchte. Der Grundkompetenzenkatalog der BHS ist zweigeteilt und umfasst Teil a, der sich wiederum in den Begriffekatalog[htlb] und die Kompetenzen[htlc] teilt, sowie einen Teil b, der schulformspezifische Kompetenzen definiert (u.a. [htla], [htl17]). Bei Teil b werde ich nur die Kompetenzen für die HTL in Augenschein nehmen.

Auch im Grundkompetenzenkatalog für die HTL sind die wichtigsten Aspekte im Bereich der funktionalen Zusammenhänge zu verorten. Der Begriffekatalog in Teil a nennt hier insbesondere die geraden und ungeraden Funktionen, wo man, wie bereits in Kapitel 2 besprochen, durchaus Bezüge zu trigonometrischen Polynomen und damit auch zu Fourierreihen herstellen kann.
Im Kompetenzenkatalog von Teil a sind in 3.10 etwa die Graphen und Eigenschaften der Sinus- und Cosinufunktion verankert und in 4.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen.
In Teil b der HTL ([htl17]) ist die allgemeine Sinusfunktion inklusive der Begriffe Amplitude, Kreisfrequenz, Nullphasenwinkel, Frequenz, Schwingungs-/Periodendauer, Phasenverschiebung und Zeigerdiagramm sowie Folgen und Reihen inklusive Grenzwert und Konvergenz verankert. Einige dieser Begriffe, wie etwa Folgen und Reihen sowie Konvergenz, Kreisfrequenz und Nullphasenwinkel sind im Grundkompetenzenkatalog der AHS nicht auffindbar.
Besonders hervorzuheben ist der Punkt B-T2-3.3, laut dem man u.a. "Funktionen mit den Gleichungen $y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ und $y = a \cdot \cos(b \cdot x) + d$ zur anwendungsbezogenen Modellierung verwenden" ([htl17], S.2) muss. Auch "zugehörige Rechnungen mittels Technologieeinsatz" müssen durchgeführt, und "im Kontext" interpretiert und argumentiert werden.([htl17], S.2) Der Kommentar zu dieser Kompetenz ergänzt: "Funktionen können auch abschnittsweise definiert sein."([htl17], S.2)

Widmet man sich nun den Lehrplänen, so findet man eine große Auswahl vor. ([lpla]) Ich habe mir für meine Arbeit alle gültigen Lehrpläne (Stand Dezember 2017) der fünfjährigen Höheren Lehranstalten sowie der vierjährigen Fachschulen durchgelesen. Unter den letztgenannten war in keinem Lehrplan eine Erwähnung der Fourierreihen zu finden, aber in Ersteren waren durchaus verschiedene Kontextualisierungen auffindbar, die ich im Folgenden erläutern möchte.

Von den insgesamt 29 Lehrplänen, die fachrichtungsmäßig von "Art and Design" bis zu "Wirtschaftsingenieure - Technisches Management" und zu "Elektrotechnik" reichten, war in acht Lehrplänen eine eindeutige Nennung der Fourierreihen zu finden. Es sei allerdings angemerkt, dass einige Lehrpläne große Ähnlichkeiten aufweisen. Die Fachrichtung der Wirtschaftsingenieure etwa unterscheidet sieben Lehrpläne, die einander in groben Zügen ähnlich sind.

In den acht Lehrplänen, in denen Fourierreihen vorkommen, sind vier mehr oder weniger unterschiedliche Ausprägungen vertreten. Die Höheren Lehranstalten für Flugtechnik, Gebäudetechnik und Maschinenbau haben alle im 7. Semester einen großen Analysisblock angesetzt, wo u.a. Funktionenreihen, also Taylor- und Fourierreihen vorkommen. Die Bildungs- und Lehraufgabe, die hier formuliert wird, lautet "Funktionen in Taylorreihen und periodische Funktionen in Fourierreihen entwickeln" (u.a. [lpld]). Diese drei Lehrpläne haben auch mit insgesamt 13 bzw. im betreffenden 7. Semester zwei Wochenstunden Angewandte Mathematik dieselbe Stundenanzahl.

Ebenfalls in drei Lehrplänen vertreten ist die Variante, die Fourierreihen im 8. Semester ansiedelt. In den Höheren Lehranstalten für Biomedizin- und Gesundheitstechnik, Elektronik und Technische Informatik sowie für Mechatronik sollen im 8. Semester Taylorreihen und Fourierreihen behandelt werden. Die Bildungs- und Lehraufgaben, die hier formuliert werden, lauten "Funktionen in Taylorreihen entwickeln und damit näherungsweise Funktionswerte berechnen" und "periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome approximieren und die Fourierkoeffizienten interpretieren."(u.a. [lplb]) Es sei auch erwähnt, dass im 9. Semester Integraltransformationen angesetzt werden, wobei Fourier- bzw. Laplace-Transformation nicht namentlich genannt werden. Allerdings kann man vermuten, dass diese Stoffanreihung einen Aufbau auf vorangegangenes Wissen intendiert. Hier ist die Mechatronik mit ihren insgesamt 14 Wochenstunden eine Ausnahme, aber sowohl diese, als auch die beiden anderen Lehrpläne, die insgesamt 15 Wochenstunden vorgeben, haben in den betreffenden Semestern 2 Wochenstunden Angewandte Mathematik eingeplant.

Nun komme ich zu den beiden Varianten, die jeweils nur von einem Lehrplan vertreten werden: Der eine Lehrplan, nach dem in der Höheren Lehranstalt für Elektrotechnik unterrichtet wird, weist große Ähnlichkeiten mit dem bereits genannten Lehrplan für Elektronik und Technik auf. Im 8. Semester sind diese sogar ident, und nur im 9. Semester ist hier auch als Bildungs- und Lehraufgabe die Fourier-Transformation festgeschrieben: "die kontinuierliche Fourier-Transformation auf aperiodische Zeitfunktionen anwenden und die Fourier-Transformierte interpretieren."([lplc]) Die Wochenstunden sind mit insgesamt 14 und im betreffenden Semester zwei gleich verteilt wie für die Höhere Lehranstalt für Mechatronik.

Der letzte Lehrplan ähnelt dem ersten Lehrplan, den ich vorgestellt habe: Hier ist die Behandlung der Fourierreihen ebenfalls im 7. Semester angesetzt. Allerdings sind hier sowohl die Lehrinhalte als auch die Bildungs- und Lehraufgaben konkreter formuliert. Der Lehrstoff nennt außer den immer wiederkehrenden beiden Funktionenreihen auch explizit die Taylorpolynome und die Approximation von Funktionenreihen durch trigonometrische Polynome sowie allgemein Interpolationspolynome. Die Bildungs- und Lehraufgabe nennt neben "Funktionen in Taylorreihen entwickeln und damit näherungsweise Funktionswerte berechnen" auch "periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome approximieren und die Fourierkoeffizienten interpretieren" sowie das Berechnen von "Interpolationsgpolynomen n-ten Grades".([lple])

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass der Ausdruck "periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome approximieren und die Fourierkoeffizienten interpretieren" in fünf der acht Lehrpläne vertreten ist und bei den restlichen drei "periodische Funktionen in Fourierreihen entwickeln" lautet. In vier Lehrplänen liegt die Weiterführung zur Integraltransformation nahe, und in jedem der acht Lehrpläne kommen die Fourierreihen gekoppelt mit den Taylorreihen vor, stets in der Reihenfolge Taylorreihe - Fourierreihe.

Im Folgenden möchte ich den kleinsten gemeinsamen Vielfachen dieser Anforderungen behandeln.

3.2 Lernziele

Aus den Betrachtungen aus Kapitel 3.1 ergeben sich für mich folgende Lernziele, die ich erreichen möchte.

1. Die SuS kennen einige Beispiele aus Alltag und Technik, indenen die Fourierreihe anwendbar ist.
2. Die SuS können Fourierreihen als Überlagerungen von Schwingungen interpretieren.
3. Die SuS verstehen den Begriff der Approximation und können sich vorstellen, dass durch die Summe mehrerer Funktionen eine andere Funktion angenähert werden kann.
4. Die SuS kennen Unterschiede und Ähnlichkeiten von Taylorpolynomen und Fourierreihen.
5. Die SuS können Fourierkoeffizienten für integrierbare periodische Funktionen mit technologischen Hilfsmitteln berechnen und wissen, warum die Koeffizienten so berechnet werden.
6. Die SuS können die Fourierkoeffizienten einer Fourierreihe in einem Stabdiagramm eintragen.
7. Die SuS wissen Bescheid wie sich bestimmte Eigenschaften der Ursprungsfunktion (Symmetrie, (Un-)Stetigkeit) auf die Fourierreihe, die sie approximiert, auswirken (Sinus-/Cosinus-Fourierreihe, Approximationsgeschwindigkeit).
8. Die SuS können die Fourierkoeffizienten von nicht 2π-periodischen Funktionen bilden.

9. Die SuS können die Berechnung der Fourierkoeffizienten von symmetrischen Funktionen vereinfachen, indem sie die Integrationsgrenzen passend wählen und das Integral dann verdoppeln etc.

10. Die SuS wissen, was sich an der Fourierreihe ändert, wenn man die Ursprungsfunktion entlang der x- oder y-Achse verschiebt.

11. Die SuS können bestimmte Beziehungen von Winkelfunktionen (zB. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$) als Fourierreihe veranschaulichen und verstehen.

12. Die SuS kennen den Unterschied bzw. die Vor- und Nachteile der spektralen und nicht-spektralen Form der Fourierreihe und das Amplitudenspektrum.

13. Die SuS können komplexe Fourierreihen mit technologischen Hilfsmitteln berechnen und kennen den Zusammenhang zur reellen Form.

Diese Lernziele werden in den folgenden Kapiteln auf verschiedene Teilaspekte aufgeteilt. In den einzelnen Kapiteln werden dann Unterrichtsvorschläge beschrieben, um diese Teilaspekte zu erarbeiten. Zusätzlich zu den Unterrichtsvorschlägen sollen auch vorhandene Lehrbücher für HTL und Hochschule vorgestellt werden, um einen Überblick darüber zu verschaffen, wie diese den Stoff behandeln. Dabei habe ich drei Lehrbücher der (Angewandten) Mathematik für die HTL herangezogen: "Mathematik 4/5 HTL" von Pauer, Scheirer-Weindorfer, Simon und Stadler ([PSWSS14]) sowie "Mathematik mit technischen Anwendungen 4" von Sidlo, Puhm, Steinmair, Camilo, Pollack-Drs und Wymlatil ([SPS+12]) ebenso wie "Ingenieur-Mathematik" von Timischl und Kaiser ([TK01]).
Gleichzeitig habe ich mir auch Hochschullehrbücher, die in diese Thematik einführen, angesehen, um für Input auf unterschiedlichen Niveaus zu sorgen. Dabei meine ich konkret "Fouriertransformation für Fußgänger" von Butz ([But12]), "Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaften" von Chipot ([Chi16]), "Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik" von Embacher ([ES11]), "Funktionalanalysis" von Heuser ([Heu92]), "Mathematische Methoden in der Physik" von Lang und Puckert ([LP16]), "Mathematik mit Simulationen lehren und lernen" von Ross ([Ros11]) sowie "Laplace-Transformation" von Weber und Ulrich. ([WU07])

3.3 Einführungsmöglichkeiten

3.3.1 Literaturrecherche

In den drei Lehrbüchern für die HTL sind spannenderweise drei sehr unterschiedliche Einführungen zur Thematik zu finden. Meist waren die Einführungen nicht eindeutig abgegrenzt vom Rest, sodass ich für mich persönlich die Trennlinie bei der Berechnung von Fourierkoeffizienten zog.

Timischl und Kaiser beginnen mit der Aussage, dass es "als eine der Grundaufgaben der Analysis bezeichnet werden" kann, "eine beliebige periodische Funktion durch eine Reihe von Sinusfunktionen (...) darzustellen."([TK01] S.101) Dann wird anhand vom Graphen wiederholt, dass die Überlagerung periodischer Funktionen wiederum periodisch ist, um dann die Frage nach der "Umkehroperation" der Überlagerung zu formulieren. Besonders auffallend ist, dass viele Begriffe bereits vor der Berechnung der Fourierkoeffizienten eingeführt werden: Sinus-Cosinus-Form oder Unstetigkeitsstelle, ebenso wie Amplituden-Phasenform (spektrale Form) und der Zusammenhang zwischen Grund- und Oberschwingung bzw. der Begriff der Ordnung, aber auch etwa (Linien-)Spektrum und Klirrfaktor werden hier bereits vorgestellt. ([TK01] S.101-102) Die Frage stellt sich, ob hier nicht zu viel Stoff in kurzer Zeit angesprochen wird und ob nicht die Begründung, warum diese Thematik denn nun behandelt wird, eher zu kurz kommt.

Pauer et al. beginnen das Kapitel der Fourierreihen mit dem Unterkapitel "trigonometrische Polynome" und führen eben diese als kontextbezogene Funktionen ein, die "jedem Zeitpunkt t den Schalldruck $g(t)$ an unserem Ohr zuordnen."([PSWSS14] S.231) Sie beschränken sich also beim Aufzeigen der Verwendungszwecke auf die Akustik, ohne etwa auf Prismen und Lichtspektren einzugehen, was die beiden anderen Lehrbücher tun. Ebenfalls auffallend ist, dass die Autoren hier mit der Amplituden-Phasenform (spektrale Form) anfangen und erst später erwähnen, dass diese Form auch auf Sinus und Cosinus ohne Extra-Phase aufgeteilt werden kann. Neben der Feststellung, dass diese beiden Schreibweisen austauschbar sind, wird etwa die Bedeutung von Amplitude, Kreisfrequenz und Periodizität bei Tönen behandelt. Die Frage nach der "Zerteilung" eines Klanges ist ebenfalls zu finden, wobei die Summe von drei trigonometrischen Funktionen graphisch veranschaulicht wird. Besonders auffallend ist, dass hier von Anfang an die Kreisfrequenz mit $\frac{2\pi}{T}$ angeschrieben wird, was einerseits sinnvoll ist, andererseits etwas unübersichtlich erscheint. Dieses Lehrbuch ist weiters das einzige von den dreien, welches zumindest erwähnt, dass bei den Fourierreihen nur Terme mit ganzzahligen Kreisfrequenzen betrachtet werden. ([PSWSS14] S.231-232)

Sidlo et al. nennen in ihrer Einführung die "Signaltechnik oder (...) digitale Erzeugung von Tönen"([SPS$^+$12] S.28) als Verwendungszweck der Fourierreihen. Die Einführung beinhaltet die Erwähnung von stückweise definierten periodischen Funktionen ebenso wie Symmetrieeigenschaften von Funktionen und die Wiederholung der Wirkung von Parametern auf periodische Funktionen und die Erwähnung, dass das Integral von punkt- oder achsensymmetrischen Funktionen leichter berechnet werden kann. Auch die Eigenschaften von Sinus- und Cosinusfunktion werden wiederholt. Dieses Lehrbuch bietet die längste Einführung von den drei betrachteten Lehrbüchern. Besonders auffallend ist auch, dass die Autoren hier sehr viel von Rechtecks-, Dreiecks-, Trapezkurven und anderen stückweise stetigen periodischen Funktionen sprechen (u.a. auch Einweggleichrichtung), weshalb sie bereits im Laufe der Einführung die Approximation der Rechteckskurve durch die Überlagerung von (einfachen) Schwingungen graphisch veranschaulichen können. Ich denke, dass das zum Verständnis des Approximationsbegriffs beiträgt und außerdem Verwunderung darüber mit sich bringt, dass solche Kurven durch Sinusschwingungen angenähert werden können.

Als kurzer Input sollen noch die Wege erläutert werden, die so manche Hochschulschriften gewählt haben: Heuser beispielsweise fängt mit Pythagoras an und gibt eine kurze historische Übersicht, wer alles an der Entwicklung der Fourieranalyse beteiligt war. Dadurch erfährt das Publikum, dass die Beschäftigung mit Fourierreihen dazu geführt hat, dass der Funktions-, Integral- und Konvergenzbegriff stark überdacht wurde. Die Herleitung der Fourierreihe beruht dann bei ihm auf der Lösung einer partiellen Differentialgleichung, die die Auslenkung einer Saite beschreibt. ([Heu92] S.21-23) Diese historische Komponente könnte SuS faszinieren und bietet auch Einblick in die Geschichte der Mathematik.
Chipot hingegen tastet sich anhand des quadratischen Mittels (Konvergenz in der L_2-Norm) heran, welche Funktion eine 2π-periodische Funktion f am besten annähert, also für welches trigonometrische Polynom g das quadratische Mittel

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - g(x))^2 \mathrm{ds}$$

minimal wird. ([Chi16] S. 99-100) Das ermöglicht auch die Betrachtung von Funktionen, die nicht stückweise stetig sind. Das wird man allerdings höchstwahrscheinlich nicht in der HTL besprechen.
Oft wird auch, wie eben bei Sidlo et al., ein kurzer Überblick über die periodischen Funktionen gegeben. Lang und Pucker sprechen einerseits davon, dass die Fourierreihe in unterschiedlichen Kontexten eingesetzt werden kann, wenn es etwa um die "Temperaturverteilung auf einem Metallring" ([LP16] S. 489) geht (wohl eine Anspielung an die Arbeit von Fourier), und andererseits auch von der "Fouriersynthese", die als Umkehroperation der Fourieranalyse gelten soll. Danach sprechen sie das Integral von periodischen Funktionen an. ([LP16] S. 489-490)
Besonders viele Kontextualisierungen nennt Butz, wobei er sich eher auf die Fouriertransformation bezieht. Er spricht von Akustik, Elektronik und Optik und u.a. von der "Analyse von Schwingungen einer Violinsaite oder auch einer Brücke"([But12] S. 1) oder der Filterung von Messsignalen und sagt offen, dass in den meisten Fällen nur ein paar Knöpfe gedrückt werden müssen, um diese Technik anzuwenden. Da dies aber zu "Bedienungsfehler, Fehlinterpretation und Frustration" ([But12] S. 1) führe, wolle er mit seinem Buch für mehr Verständnis sorgen. Auch er fängt mit der Symmetrieeigenschaft von Funktionen an, setzt aber relativ rasch mit der Definition der Fourierreihe fort. ([But12] S. 4-5)

Zusammenfassend möchte ich festhalten, dass ein Überblick über Einsatzmöglichkeiten von Fourierreihen gut zu diesem Thema passt, wobei ich offen halten möchte, ob es besser ist, sich auf die Akustik bzw. Elektrotechnik zu konzentrieren oder das ganze Spektrum an möglichen Einsatzgebieten vorzustellen. Ich denke, hier kommt es auch auf die Arbeitszeit an. Je mehr Stunden zur Verfügung stehen, desto eher würde ich dazu plädieren, mit einer Übung zur sinnvollen Interpretation eines Graphen zu beginnen, bei der Achsen Verschiedenes darstellen können. So kann man dann auch im Laufe der konkreten Berechnungen immer wieder auf diese Kontextualisierungen zurückkommen und fragen, was die jeweiligen Parameter in der angewandten Situation bedeuten. Es ist klar, dass die Akustik als Beispiel praktisch ist, aber ich denke, es ist auch wichtig, einige andere Interpretationsmöglichkeiten (Signaltechnik, Licht) zu kennen.

Was meines Erachtens außerdem sinnvoll ist, ist eine Gegenüberstellung von Fourierreihen mit der Überlagerung von trigonometrischen Funktionen. Die Begriffe Synthese und Analyse sind sehr gut aufeinander abgestimmt, aber auch die Überlagerung und das Zerteilen von periodischen Funktionen oder Schwingungen verdeutlichen, dass man so durch das Verständnis der Fourierreihe tieferen Einblick in periodische Funktionen erhaschen kann. Jedenfalls möchte ich durch diese Gegenüberstellung eine Motivation für die Behandlung der Thematik erreichen.

Eine einführende Wiederholung von dem Stoff, der mit der Thematik zu tun hat, insbesondere die trigonometrischen Polynome und Eigenschaften von Funktionen, kann sich anbieten, wobei ich offen halten möchte, ob diese auch in die Richtung Rechtecks- und Dreiecksschwingungen gehen sollte und ob sie ungerade und gerade trigonometrische Polynome sowie Potenzfunktionen behandeln sollte. Keines der betrachteten Schulbücher geht auf Potenzfunktionen ein, wobei ich aber denke, dass eine Wiederholung dessen sinnvoll sein kann. Hier möchte ich auf Kapitel 2 verweisen.

Durch die Behandlung von Rechteck- und anderen Schwingungen kann die Vorstellung der Approximation und die Faszination, händisch "einfach" zeichenbare Funktionen (wie etwa die Dreiecksfunktion) auch mit GeoGebra annähern zu können, vermittelt werden. Außerdem übt man so den Umgang mit abschnittsweise definierten Funktionen. Daher möchte ich dazu plädieren, diese bereits in der Einführung zu erwähnen, um später darauf aufbauen zu können.

Ob man nun mit der spektralen Form (oder auch Amplitude-Phase-Form) beginnen sollte und bereits hier die Kreisfrequenz erwähnen sollte, sind zwei Fragen, die schwierig zu beantworten sind, weil im Prinzip beides möglich wäre.
Ich denke, Ersteres passt deswegen zu einem späteren Zeitpunkt besser, da man mit der allgemeinen Form die Sinus- und Cosinus-Fourierreihen besser erklären kann. Außerdem sind hier einige Erklärungen, warum die beiden Formen dasselbe aussagen, möglich, und wenn man alle nennen will, braucht man mehr Zeit und Platz als man es in der Einführung gewährt ist.
Bei der Kreisfrequenz macht es meiner Meinung nach mehr Sinn, bereits in der Einleitung bzw. bei der Wiederholung trigonometrischer Polynome darauf einzugehen, dass die eigentliche Frequenz ohne einer Division nicht erkennbar ist bzw. bei 2π-periodischen Funktionen meist ein anderer Frequenzbegriff praktischer ist. Dies passt gut zu trigonometrischen Polynomen und lässt sich im Zuge dessen auch gut behandeln.

3.3.2 Unterrichtsvorschlag

Die Lernziele, die im folgenden Kapitel erreicht werden sollen, sind die folgenden:

1. Die SuS kennen einige Beispiele aus Alltag und Technik, indenen die Fourierreihe anwendbar ist.

2. Die SuS können Fourierreihen als Überlagerungen von Schwingungen interpretieren.

3. Die SuS verstehen den Begriff der Approximation und können sich vorstellen, dass durch die Summe mehrerer Funktionen eine andere Funktion angenähert werden kann.

4. Die SuS kennen Unterschiede und Ähnlichkeiten von Taylorpolynomen und Fourierreihen.

Als Einstieg bzw. Vorbereitung zur Behandlung der Thematik kann auf die verschiedenen Kontexte, in denen Schwingungen vorkommen, hingewiesen werden. Insbesondere in der Optik und der Akustik, aber auch im Bereich der Signalverarbeitung ist es gut vorstellbar, dass man sich damit auseinandersetzen muss, welche Resultate erzielt werden, wenn man bestimmte Schwingungen bzw. periodische Funktionen überlagert.

Aufgabe 3.1 *Recherchiere, um welche Wellen/Schwingungen es sich handelt.*

1. *Die Welle hat eine Wellenlänge 10km (und eine Frequenz von 30kHz)*
2. *Die Welle hat eine Wellenlänge 550nm*
3. *Die Schwingung hat eine Frequenz von 440Hz*
4. *Betrachte Abb 24*

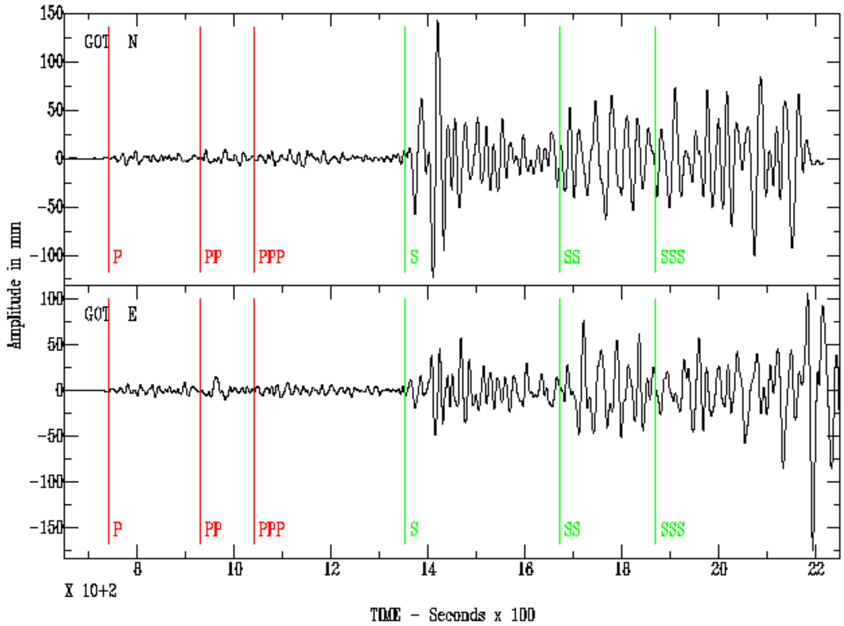


Abbildung 24: Graph zu Punkt 4 [wik]

Es kann weiters sinnvoll sein, als Einstieg die periodischen Funktionen und die Überlagerung von ihnen zu wiederholen. Hier möchte ich auf Kapitel 2.5 hinweisen, wo bereits einfache Beispiele präsentiert wurden. Auch in der HTL bietet es sich an, die SuS mit GeoGebra experimentieren zu lassen, um folgenden Fragen zu beantworten:

Aufgabe 3.2 *Kreuze die richtigen Aussagen an!*

- ☐ *Die Summe gerader Funktionen ist wieder gerade*
- ☐ *Die Summe ungerader Funktionen ist wieder ungerade*
- ☐ *Die Summe von ungeraden und geraden Funktionen, beide nicht* 0*, kann ungerade sein.*
- ☐ *Die Summe von ungeraden und geraden Funktionen, beide nicht* 0*, kann gerade sein.*

Aufgabe 3.3 *Versuche, verschiedene Funktionen der Form* $f_n(x) = sin(nx)$ *mit* $n \in (0, 20)$ *so zu summieren, dass der Graph von* f *wie jener in Abb.25 aussieht.*

Aufgabe 3.4 *Versuche, verschiedene Funktionen der Form* $f_n(x) = sin(nx)$ *mit* $n \in (0, 5)$ *so zu summieren, dass der Graph von* f *wie jener in Abb. 26 aussieht.*

Aufgabe 3.5 *Nähere die Rechteckschwingung g als Summe von Funktionen der Form* $f_n(x) = a \cdot sin(nx)$ *mit* $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ *an. (s. Abb.27)*

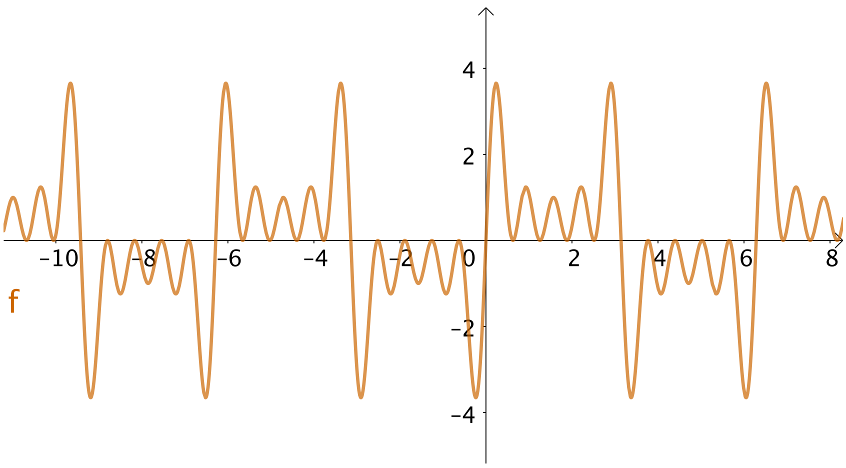


Abbildung 25: "Katzenmonsterfunktion"

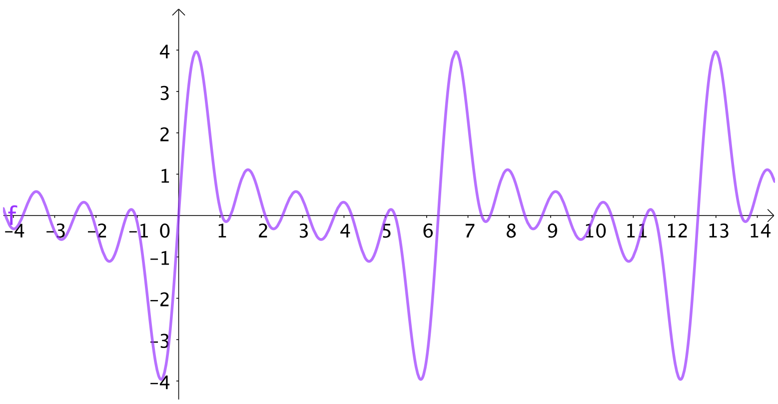


Abbildung 26: "Hände"

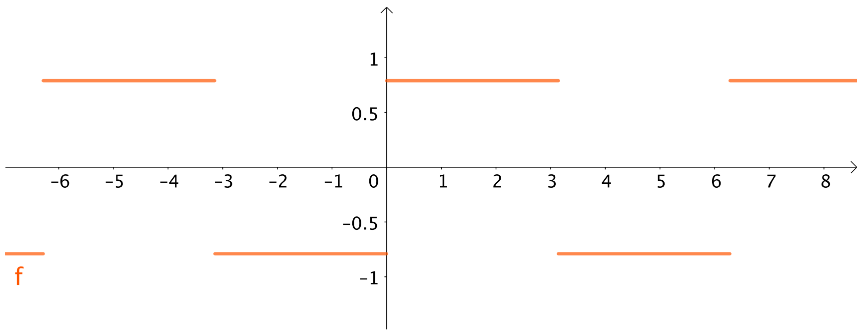


Abbildung 27: "Rechteckschwingung"

In diesem Zusammenhang kann man dann die Fourierreihe der Rechteckschwingung (oder einer Dreieckschwingung) zeigen und sagen, dass solche unendlichen Summen von Funktionen auch unter den Begriff der Reihe fallen, wie auch unendliche Summen von Zahlen. So nennt man insbesondere die (unendlichen) Summen trigonometrischer Funktionen dann Fourierreihen. Allgemein nimmt man also Sinus und Cosinusfunktion und setzt ein konstantes Glied (warum es manchmal $\frac{a_0}{2}$ ist, würde ich wie [TK01] S.103 erst später erklären) davor, sodass eine Verschiebung entlang der senkrechten Achse ermöglicht wird, und definiert:

Definition 3.1 $Fourierreihe(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$

wobei a_n, b_n die Fourierkoeffizienten sind. (Da alle drei betrachteten Lehrbücher a_n beim Cosinus ansetzen, habe auch ich dies so übernommen; im Prinzip wäre es egal (a_0 gehört dennoch zum Cosinusanteil).) Die SuS sollten hier bereits trigonometrische Polynome durchgenommen haben, sodass sie wissen, dass hier die a_n den geraden Anteil der Funktion steuern und die b_n den ungeraden. So kann man auch ansprechen, dass a_0 zum geraden Anteil gehört.

Hier würde ich dann nur den Aspekt der Approximation und die Beschränkung auf ganzzahlige Kreisfrequenzen erw‰hnen, ohne darauf einzugehen, wie die Fourierkoeffizienten berechnet werden. Ersteres meint, dass man auf diese Art und Weise andere Funktionen annähern kann und das sogar beliebig gut. Die Erinnerung und der Vergleich mit der Taylorreihe (frontal, evtl. mit der Frage nach einer unverbindlichen Vermutung, wie man nun die Koeffizienten bei der Fourierreihe berechnen könnte) kann hier auch gut dazupassen.

Aufgabe 3.6 *Erinnere dich an die Taylorreihe. Welche Aussagen sind richtig?*

1. *Um eine Taylorreihe einer Funktion bilden zu können, muss die Ausgangsfunktion periodisch sein.*
2. *Falls die gegebene Funktion eine gerade oder ungerade Funktion ist, lässt sich dies an der Taylorreihe der Funktion erkennen.*
3. *Bei der Taylorreihe werden die Koeffizienten durch ein Integral ausgedrückt.*
4. *Die Taylorreihe einer Cosinusfunktion hat unendlich viele Reihenglieder.*
5. *Bei der Taylorreihe ist es möglich, dass die Reihe nur innerhalb eines bestimmten Intervalls konvergiert.*

Nachdem man die Synthese (Zusammensetzen, Überlagerung) weitgehend erkundet hat, wird man die umgekehrte Richtung betrachten: Hier bieten sich als Veranschaulichung bzw. Kontextualisierung Akustik, aber auch Elektromagnetismus oder die Thematik der Signalverarbeitung an: Es geht darum, Überlagerungen zu analysieren und daraus die "Grundschwingungen" herauszufiltern.

Aufgabe 3.7 *Betrachte die folgenden Funktionsgraphen (Abb.28 und 29). Angenommen, es handelt sich hier um eine Überlagerung von trigonometrischen Funktionen, also eine Fourierreihe. Wie könnte die Funktionsgleichung dieser Funktionen aussehen?*

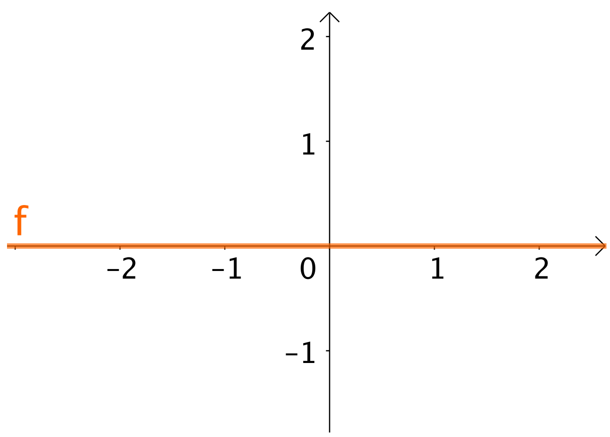


Abbildung 28: "Konstante Funktion"

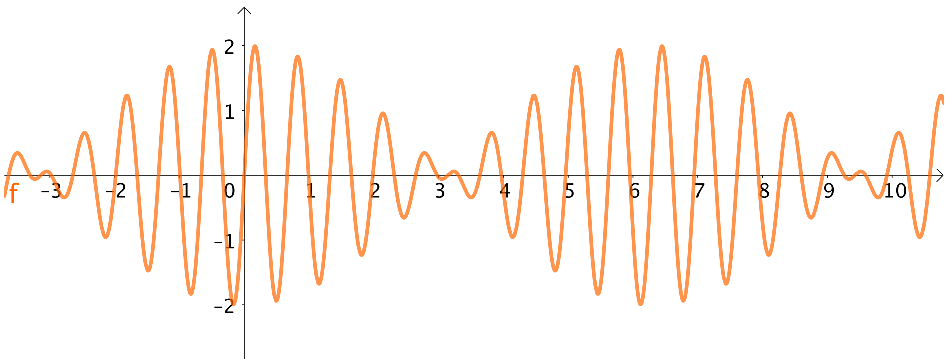


Abbildung 29: "Schwebung"

Allerdings erkennt man natürlich bald, dass es oft schwierig ist, die Zusammensetzung bloß durch das Hinschauen zu analysieren, was Anlass zur weiterführenden Beschäftigung mit Fourierkoeffizienten bietet.

3.4 Berechnung der Fourierkoeffizienten

3.4.1 Literaturrecherche

Die drei Lehrbücher, die ich bereits im vorangegangenen Kapitel herangezogen habe, zeigen eine reichhaltige Palette an Möglichkeiten, was die Erklärung und Herleitung der Fourierkoeffizienten betrifft, ebenso wie im Stoffumfang.

Pauer et al. begründen und kontextualisieren die Koeffizienten für die Phasenform (Spektralform), erwähnen aber bei der Einführung der allgemeinen Fourierkoeffizienten lediglich die partielle Integration, ohne etwas herzuleiten. Zum Term $\frac{a_0}{2}$ wird noch gesagt, dass es sich hier um den Mittelwert der Funktion handelt. Auf diese "Un-Begründung" auf S.232 wird dann auch auf S.235 bei der Berechnung der Fourierreihe verwiesen. Hier wird die T-periodische Variante angeführt. ([PSWSS14], S.231-237)
Nach der ersten kurzen Darlegung der Thematik (im Unterkapitel Trigonometrische Polynome) wird sofort ein Beispiel eingeschoben, das die Berechnung einer Annäherung der Rechteckschwingung zeigt (quasi einer Katzenmonsterfunktion). Prinzipiell finde ich es sehr gut, dass schon so früh ein Beispiel vorgerechnet wird, bevor noch zu tief in das Thema eingedrungen wird. Was dieses Lehrbuch als einziges von den mir Betrachteten tut, ist die Nennung des CAS als Hilfsmittel, mit dem bestimmte Aufgaben gelöst werden sollen. Allerdings (oder gerade deswegen) geht das Lehrbuch verglichen mit den anderen weniger ins Detail. Das Verschieben von Integrationsgrenzen kommt (möglicherweise weil die SuS alles mit CAS rechnen) nicht vor. Die Erkenntnis und der Beweis dafür, dass für gerade Funktionen die b_n stets 0 sind, wird beispielsweise nur in einer einzigen Aufgabe formuliert und die Begründung den SuS überlassen. Von Unstetigkeitsstellen wird gar nicht gesprochen. Ebenso ist nirgends von einem Spektrum die Rede. ([PSWSS14], S.231-237)

Evtl. kann man es so verstehen, dass die "fehlenden" Begriffe durch die Möglichkeit, alles in den CAS einzutippen, als nicht mehr so wichtig eingestuft werden, sodass man es als Zusatzbonus für Fleißige positioniert.

Timischl und Kaiser präsentieren bereits eine rechnerische Erklärung, warum $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$ ist. Auch die Bezeichnung Gleichanteil und die Veranschaulichung des Mittelwerts der Funktion wird hinzugefügt. Für a_n und b_n beschreiben sie den Vorgang nur mehr, ohne auf den wesentlichen Punkt aufmerksam zu machen, dass $\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) = 0$, wenn $n \neq m$ bzw. die Parallele beim Cosinus. Da hier mit der Periode 2π gearbeitet wird, wird des Weiteren auch die andere Schreibweise mit der eigentlichen Frequenz und einer beliebigen Periode T vorgezeigt, und nach einer Zusammenfassung die Möglichkeit der Intervallverschiebung beim Integral und der Zusammenhang zwischen der Minimierung der quadratischen Abweichung und den Fourierkoeffizienten angemerkt. Beim Letzteren wird auch der Unterschied zur Taylorreihe im Konvergenzverhalten erwähnt. Anschließend folgt ein langes Beispiel zum Rechtecksimpuls, im Zuge dessen bereits ein Spektrum aufgezeichnet und der Klirrfaktor berechnet wird. Erst danach wird auf die Unterteilung in gerade und ungerade Funktionen eingegangen. Beispiele zum eigenständigen Rechnen sind thematisch geordnet ganz zum Schluss angereiht, wobei das Lehrbuch prinzipiell so strukturiert zu sein scheint. ([TK01], S.103-111)

Sidlo et al. zeigen von den drei Lehrbüchern die Herleitung von a_0, a_n und b_n am ausführlichsten. Es wird auch die Herleitung der Taylorreihen angesprochen, und der Grundgedanke, dass man die Sache so anlegt, dass (fast) alle Summanden 0 werden, dargelegt. Dieses Lehrbuch ist auch das einzige, in dem die Tatsache, dass das bestimmte Integral von $\sin(nx) \cdot \cos(mx)$ bzw. von $\sin(nx) \cdot \sin(mx)$ oder von $\cos(nx) \cdot \cos(mx)$ mit $n \neq m$ stets 0 ist, erwähnt und sogar anhand eines Graphen veranschaulicht wird. So wie in allen Lehrbüchern bis jetzt wird $\frac{a_0}{2}$ als Mittelwert verstanden und die Möglichkeit, die Integrationsgrenzen zu verschieben, erwähnt. Auf die Entsprechung für beliebige Periodenlängen wird eingegangen, obwohl bereits am Anfang gesagt wurde, dass die Herleitung für 2π-periodische Funktionen gezeigt wird, das Gleiche aber auch für T-periodische Funktionen gilt. Danach wird ohne CAS die Rechteckschwingung angenähert, wobei auf Unstetigkeitsstellen, Spitzen (Gibb'sches Phänomen) und das Spektrum sowie die Symmetrie eingegangen wird. Abschließend werden Beispiele zum eigenhändigen Rechnen angeführt. ([SPS+12], S.66-72)

Es sei noch erwähnt, dass einzig Timischl und Kaiser bei den Angaben der Funktionen die Periode der jeweiligen Funktionen nicht angeschrieben haben. Bei den beiden anderen Lehrbüchern wurde die Periode stets angegeben, auch wenn es durch die Angabe offensichtlich war, da etwa die Funktion im Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert war.

Zusammenfassend kann man sagen, dass das Verständnis von a_0 als Mittelwert überall vorkam, ebenso wie die Umrechnung zwischen 2π- und T-periodischen Funktionen. Ebenfalls überall sind Beispiele vertreten, bei denen die Fourierkoeffizienten von bestimmten

Funktionen berechnet werden sollen, wobei das CAS als Hilfsmittel und Unterstützung zum besseren Verständnis nicht immer erwähnt wird. Ein Vergleich mit dem Skalarprodukt wird nirgends gebracht, obwohl Sidlo et al. den Grundgedanken behandeln. Prinzipiell möchte ich auch in diesem Kapitel versuchen, den kleinsten gemeinsamen Vielfachen anzustreben, wobei ich ausnahmsweise den Vergleich mit dem Skalarprodukt hinzufügen möchte, weil mir dieser so grundlegend erscheint.

So wie bereits im vergangenen Kapitel, habe ich mir Input aus Hochschulschriften geholt, die ich hier kurz erwähnen möchte.

Chipot zieht den Zugang, mit dem er bereits in der Einführung begonnen hat, durch und beweist, dass der quadratische Fehler minimal wird, wenn man die Fourierkoeffizienten so wählt, wie sie definiert werden. ([Chi16], S.100) Wir kennen diese Argumentationslinie bereits aus der Anmerkung von Timischl und Kaiser. ([TK01], S.104)
Auch Heuser setzt seinerseits seinen roten Faden fort und spricht die Anfangsbedingung der partiellen Differentialgleichung an, ohne der es eben unendlich viele mögliche Lösungen gäbe. Diese fixiert nach ihm dann auch die Fourierkoeffizienten. ([Heu92], S.100)
Die meisten Hochschullehrbücher begründen die Berechnung der Fourierkoeffizienten anhand des Vergleichs mit dem Skalarprodukt. Sehr spannend war es auch, dass sie alle als Beispiel zum Vorrechnen die Dreiecksschwingung gewählt haben, wohingegen die (Schul-)lehrbücher alle die Rechteckschwingung präsentieren. (zB. [LP16] S. 491, [But12] S.6-9, [ES11] S.354-357)

3.4.2 Unterrichtsvorschlag

Die Lernziele, die im folgenden Kapitel erreicht werden sollen, sind die folgenden:

1. Die SuS können Fourierkoeffizienten für integrierbare periodische Funktionen mit technologischen Hilfsmitteln berechnen und wissen, warum die Koeffizienten so berechnet werden.

2. Die SuS können die Fourierkoeffizienten einer Fourierreihe in einen Stabdiagramm eintragen.

3. Die SuS wissen Bescheid, wie sich bestimmte Eigenschaften der Ursprungsfunktion (Symmetrie, (Un-)Stetigkeit) auf die Fourierreihe, die sie approximiert, auswirken (Sinus-/Cosinus-Fourierreihe, Approximationsgeschwindigkeit).

4. Die SuS können die Fourierkoeffizienten von nicht 2π-periodischen Funktionen bilden.

5. Die SuS können die Berechnung der Fourierkoeffizienten von symmetrischen Funktionen vereinfachen, indem sie die Integrationsgrenzen passend wählen und das Integral dann verdoppeln etc.

6. Die SuS wissen, was sich an der Fourierreihe ändert, wenn man die Ursprungsfunktion an der x- oder y-Achse verschiebt.

7. Die SuS können bestimmte Beziehungen von Winkelfunktionen (zB. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$) als Fourierreihe veranschaulichen und verstehen.

Nachdem die Frage, wie man Fourierreihen einer Funktion erahnen oder aufstellen kann, bereits im vorangegangenen Kapitel gestellt wurde, kann man einen Schritt zurückgehen, und einen besonderen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen Sinus und Cosinus entdecken: Wenn man $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ betrachtet, ist in den meisten Fällen das Integral über das Produkt von Sinus- und Cosinusfunktionen 0. Man könnte den SuS also etwa die folgende Aufgabe stellen:

Aufgabe 3.8 *Untersuche das bestimmte Integral mit* $c = 0$ *in den Grenzen von* 0 *bis* 2π *von* $\sin(nx) \cdot \sin(mx)$, $\sin(nx) \cdot \cos(mx)$ *und* $\cos(nx) \cdot \cos(mx)$ *mit* $n,\ m \in \mathbb{N}$. *Finde heraus, in welchen Fällen* 0 *bzw. etwas anderes heraus kommt.*

Mir persönlich hat auch die graphische Darstellung und Veranschaulichung, die man etwa bei [SPS+12] sehen kann, gut gefallen: In dieser Abb. sieht man gut, dass innerhalb einer Periode die Flächen unter der x-Achse genau so groß sind wie die Flächen oberhalb. (s. Abb 3.4.2)

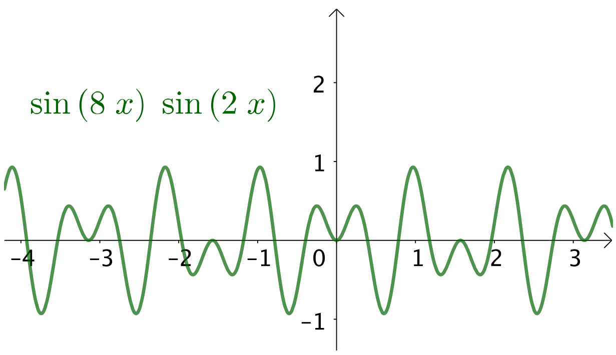


Abbildung 30: Funktionsgraph von $\sin(8x) \cdot \sin(2x)$, Reproduziert nach [SPS+12]

Im Laufe der Bearbeitung dieser Aufgabe könnte man natürlich auch darauf eingehen, dass der $\sin(nx)$ bzw. $\cos(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ über eine ganze Periode integriert stets 0 ergibt.

Danach wären 2 verschiedene Begründungen für die Berechnung von a_0 möglich.

Zum einen könnte man damit beginnen, die Funktion und die Fourierreihe über eine ganze Periode zu integrieren. Nachdem für alle n das Integral von $\sin(nx)$ bzw. $\cos(nx)$ über eine ganze Periode 0 ist, ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = a_0 \cdot 2\pi$$

woraus man die explizite Darstellung für a_0 formen kann.

Da bei der Berechnung der Koeffizienten a_n und b_n stets vor dem Integral der Faktor $\frac{1}{\pi}$ und nicht der Faktor $\frac{1}{2\pi}$, wie sich aus der obigen Berechnung ergeben würde, steht, definiert man das a_0 oft auch als

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

und schreibt dann bei der Definition der Fourierreihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Sofern die beiden Definitionen stimmig sind, ist beides möglich. Im Folgenden verfahre ich mit der Definition $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

Man könnte aber darauf aufmerksam machen, dass Sinus- und Cosinusfunkionen symmetrisch bzgl. der x-Achse (bzw. einer ihrer Parallelen) sind, um die Mittelwerteigenschaft von a_0 zur Begründung zu nutzen. Dazu könnte man folgende Aufgaben geben:

Aufgabe 3.9 *Versuche, die Funktionen aus Abb. 3.9 als Fourierreihe anzuschreiben.*

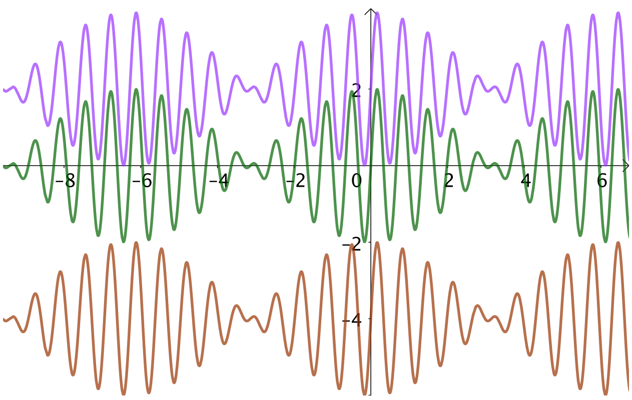


Abbildung 31: An der y-Achse verschobene Schwebungen

Aufgabe 3.10 *Betrachte die Funktionen von Aufgabe 3.9. Vermute oder zeichne den arithmetischen Mittelwert aller Funktionswerte über eine Periode ein.*

Aufgabe 3.11 *Berechne für die folgenden Funktionen den arithmetischen Mittelwert aller Funktionswerte in einer Periode. Verwende ein CAS-Programm.*

1. $f(x) = \sin(4x) + \cos(18x) + \sin(2x)$
2. $f(x) = 6 \cdot \sin(12x) + 4 \cdot \cos(10x) - \sin(4x)$
3. $f(x) = \sin(23x) - 7 \cdot \sin(2x)$

Man kann den wesentlichen Punkt (dass der Mittelwert bei einer Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen stets 0 beträgt) auch mit der Arbeit mit GeoGebra und Schiebereglern veranschaulichen (s. Abb.3.4.2, egal welche Koeffizienten man nimmt, der Mittelwert (rot eingezeichnet) bleibt bei 0).

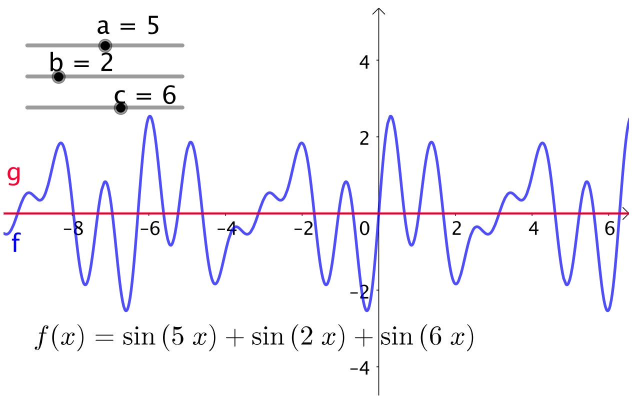


Abbildung 32: Mittelwerte von Funktionen

Dass man, wenn man eine Funktion durch eine Fourierreihe annähern möchte, zuerst einmal damit anfangen könnte, diesen Mittelwert der beiden Funktionen gleichzusetzen, ist wohl eine verständliche Überlegung. Da weiters die Fourierreihe großteils aus der Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen besteht, die alle keine Verschiebung des Mittelwerts ermöglichen, muss man also den Mittelwert als Zahl hinzuaddieren.

Nachdem man sich mit a_0 beschäftigt hat, wird man sich endgültig den Fourierkoeffizienten zuwenden. Ein Ansatz, mit dem ich anfangen würde, besteht aus einigen Zwischenstationen. Zuerst kann man die Fourierreihe mit der Taylorreihe vergleichen und sagen, dass man nun die Koeffizienten durch das Integrieren ermittelt. Dann kann man, falls es bereits besprochen wurde, auch darauf eingehen, dass es das Ziel ist, die Summe auf einen Term zu reduzieren. Jedenfalls muss vermittelt werden, dass $\int_0^{2\pi}(\cos(nx)\cdot\cos(mx))dx = 0$ für $n \neq m$ und $n, m \neq 0$ und $\int_0^{2\pi}(\sin(nx)\cdot\sin(mx))dx = 0$ für $n \neq m$.

Man könnte das etwa anhand von GeoGebra und Schiebereglern erarbeiten. In Abb. 33 sieht man, dass auch der Graph genau dann ausschließlich oberhalb der x-Achse liegt, wenn man $n = m$ setzt in $\cos(nx)\cdot\cos(mx)$.

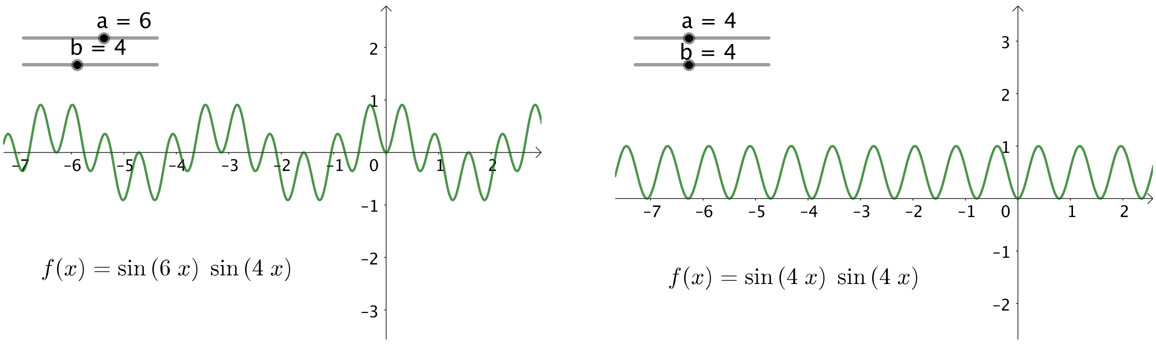


Abbildung 33: $\sin^2(4x)$ und $\sin(4x)\cdot\sin(6x)$

Bei dieser Gelegenheit kann man die Potenzen von Sinus- und Cosinusfunktion behandeln und sagen, dass

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \cos(2x)$$

und

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \cos(2x)$$

um auch die Fälle veranschaulichen zu können, in denen das Integral (mit Integrationskonstante = 0) nicht 0 ist.

Aufgabe 3.12 *Zeichne die folgenden Funktionen mit Schiebereglern für n und m in GeoGebra und untersuche, wann* $\int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)dx = 0$ *gilt.*

1. $f(x) = \sin(nx),\ g(x) = \sin(mx)$
2. $f(x) = \cos(nx),\ g(x) = \cos(mx)$

Danach kann man die Berechnung der Fourierkoeffizienten anhand eines Beispiels vorzeigen (evtl. auch frontal).

Aufgabe 3.13 *Gegeben ist* $f(x) = 2 \cdot \sin(3x) + 4 \cdot \sin(4x) + 2 \cdot \cos(3x)$. *Speichere* $f(x)$ *so im Algebra-Fenster von GeoGebra ein. Schließe nun das Algebra-Fenster und versuche mit dem CAS-Fenster wieder auf die Spur zu kommen, welche Funktion du eingegeben hast. Wir wissen nur mehr, dass die Funktion in etwa wie* $f(x) = b_3 \cdot \sin(3x) + b_4 \cdot \sin(4x) + a_3 \cdot \cos(3x)$ *aussah.*

1. *Für welche* n *ist* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(3x)dx = 0$*?*
2. *Für welche* n *ist* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(4x)dx = 0$*?*
3. *Für welche* n *ist* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(3x)dx = 0$*?*
4. *Was erhälst du, wenn du* n *so wählst, dass* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(3x)dx \neq 0$ *ist?*
5. *Für welches* n *ist* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)dx = 2\pi$*? Rechne mit CAS nach.*
6. *Mit welchen Rechnungen erhältst du die drei Koeffizienten* b_3, b_4 *und* a_3*?*

Danach kann man ein etwas realitätsnäheres Beispiel geben wie das Folgende:

Aufgabe 3.14 *Eine periodische Funktion ist mit* $f(x) = |x|$ *für* $-\pi < x < \pi$ *definiert und periodisch fortgesetzt (gerade Dreiecksfunktion). Wir wollen diese Funktion mit dem trigonometrischen Polynom* $g_3(x) = a_1 \cdot \cos(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + a_3 \cdot \cos(3x) + a_4 \cdot \cos(4x) + a_5 \cdot \cos(5x) + b_1 \cdot \sin(x) + b_2 \cdot \sin(2x) + b_3 \cdot \sin(3x) + b_4 \cdot \sin(4x) + b_5 \cdot \sin(5x)$ *annähern.*

1. *Für welche* a_n *bzw.* b_n *kommt* 0 *heraus? Wie kannst du das begründen?*
2. *Wie sieht die Fourierreihe fünfter Ordnung dieser Dreiecksfunktion aus?*

Bei der Begründung würde ich einerseits auf die geraden und ungeraden Funktionen verweisen (keine Sinus-Terme) und evtl. auch darauf, dass $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) = \dfrac{2\cos(n\pi) - 2}{n^2}$ und $2\cos(n\pi) - 2 = 0$ ist für n gerade.

Zusammenfassend ergibt sich (für stetige Punkte der Funktion und für eine 2π-periodische Funktion):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Wobei $a_n = 0$ für ungerade Funktionen und
$b_n = 0$ für gerade Funktionen gilt.

Nun kann man zur Übung einige ähnliche Beispiele von den SuS rechnen lassen.

Aufgabe 3.15 *Eine periodische Funktion ist mit $f(x) = x^2$ für $-\pi < x < \pi$ definiert und periodisch fortgesetzt. Wir wollen diese Funktion mit dem trigonometrischen Polynom $g_5(x) = \sum_{n=1}^{5}(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \cos(nx))$ annähern.*
Wie sieht die Fourierreihe fünfter Ordnung dieser Funktion aus?

Man kann hier auch einige Beispiele zu Integrationsgrenzen einstreuen.

Aufgabe 3.16 *Welches Integral hat denselben Wert wie $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) \cdot x^2 dx$?*

1. $\int_0^{2\pi} \cos(3x) \cdot x^2 dx$
2. $\int_0^{\pi} \cos(3x) \cdot x^2 dx$
3. $2 \cdot \int_{-\pi}^{0} \cos(3x) \cdot x^2 dx$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \cdot x^2 dx$

Aufgabe 3.17 *Eine periodische Funktion ist mit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{für } -\pi < x \leqq 0 \end{cases}$$

für $-\pi < x < \pi$ *definiert und periodisch fortgesetzt (ungerade Rechtseckfunktion). Wir wollen diese Funktion mit dem trigonometrischen Polynom* $g_5(x) = \sum_{n=1}^{5} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \cos(nx))$ *annähern.*
Wie sieht die Fourierreihe siebter Ordnung dieser Funktion aus? Vergleiche den Graphen mit der der Fourierreihe fünfter Ordnung.

Was man nun langsam einführen kann, ist eine graphische Darstellung der Koeffizienten in einem Stabdiagramm. Dieser kann zum Amplitudenspektrum erweitert werden, sobald die Amplitudenform erarbeitet wurde. Das "Koeffizientenspektrum" bietet sich nur bei reinen Sinus- oder Cosinusreihen an, da sonst die Übersichtlichkeit verloren geht. Prinzipiell ist es nicht so aussagekräftig, aber um den Koeffizientenabfall zu veranschaulichen, kann aber zur Veranschaulichung des Koeffizientenabfalls verwendet werden.

Man kann also gleich die Rechteckschwingung aus Aufgabe 3.17 aufgreifen und sagen, dass man die Werte der Koeffizienten auch auf folgende Weise veranschaulichen kann.

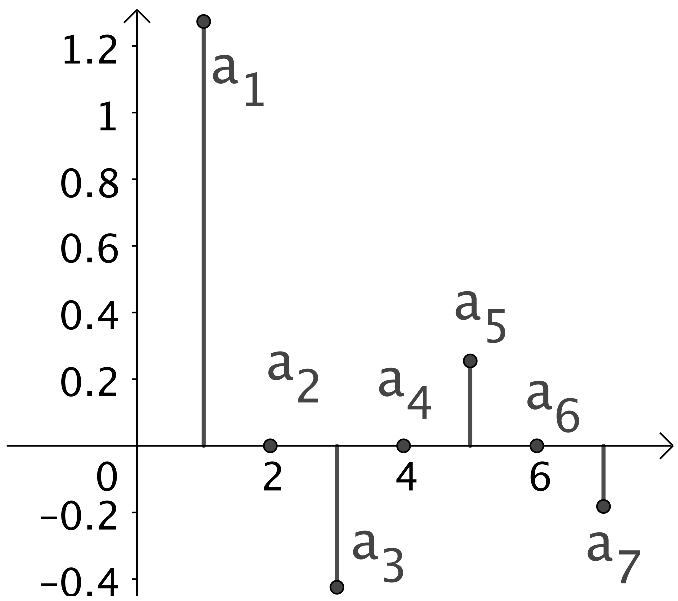


Abbildung 34: Koeffizienten in einem Stabdiagramm

Der Vergleich mit den beiden bereits behandelten Fourierreihen (Dreieck und Parabel) machen den langsameren Abfall der Beträge der Koeffizienten $\neq 0$ bei der Rechtecksfunktion deutlich. Nun kann man die SuS beauftragen, diese Stabdiagramme zu zeichnen. (Diese Graphen lassen sich leichter mit der Hand zeichnen als mit GeoGebra.)

Nun kann man zu weiteren Funktionen übergehen, die nicht 2π-periodisch, sondern T-periodisch sind. Im Prinzip gibt es keinen großen Unterschied, es geht nur darum, dass man nun $\sin(\frac{2\pi n}{T})$ statt $\sin(nx)$ betrachtet. Bei a_0 ist es immer noch der Mittelwertgedanke, der dahinter steckt, weshalb sich dort im Integral nichts tut. In der HTL kann man fast davon ausgehen, dass der Unterschied zwischen der Kreisfrequenz und der "normalen" Frequenz bekannt ist. Prinzipiell gibt eine Frequenz an, wie oft eine Wiederholung in einer Sekunde (Zeiteinheit) passiert. Die Kreisfrequenz gibt an, wie oft eine Kreisumdrehung in der Sekunde stattfindet. Hier könnte man auch einführend die Aufgaben aus Kapitel 2 erarbeiten lassen, wie etwa Aufgabe 2.10.

Bei der Berechnung der Koeffizienten müssen noch die Integrationsgrenzen und die Konstante vor dem Integral angepasst werden (Integral über die ganze Periode, also von 0 bis T bzw. von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$).

$$a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot\cos(nx)dx \qquad \text{für } n = 1,2,3\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot\sin(nx)dx \qquad \text{für } n = 1,2,3\dots$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

Wobei $a_n = 0$ für ungerade Funktionen und
$b_n = 0$ für gerade Funktionen gilt.

Es ist einfach zu sehen, dass die Berechnung der Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen Funktion nur ein Spezialfall der obigen Formel ist.

Nun kann man also auch Beispiele rechnen, die nicht 2π-periodisch sind.

Aufgabe 3.18 *Eine periodische Funktion ist mit $f(x) = x$ für $-1 < x < 1$ definiert und periodisch fortgesetzt (Sägezahnfunktion). Wir wollen diese Funktion mit der Fourierreihe $g_3(x) = \sum_{n=1}^{5}(a_n\cdot\cos(nx) + b_n\cdot\sin(nx))$ annähern.*
Wie sieht die Fourierreihe fünfter Ordnung dieser Funktion aus?

Man kann auch einen Sprung in das Aufstellen von Funktionsgleichungen machen:

Aufgabe 3.19 *Blicke zurück zu Rechtecks- und Dreiecksfunktionen, die wir bereits behandelt haben. Wie könnte eine Funktionsgleichung einer ungeraden Rechteck- bzw. Dreiecksfunktion aussehen? Stelle je 2 Funktionsgleichungen auf.*

Damit kann man gleich an der eigens entwickelten Funktionsgleichung ansetzen:

Aufgabe 3.20 *Nimm eine deiner Funktionsgleichungen von Aufgabe 3.19, und entwickle sie in eine Fourierreihe fünfter Ordnung.*

Man kann hier auch ansprechen, wie sich die Fourierreihe ändert, wenn man den Funktionsgraphen entlang der x- bzw. y-Achse verschiebt. Für die y-Achse braucht man nur an die Mittelwertsüberlegung erinnern, um erkenntlich zu machen, dass eine Addition eines Skalars zur ursprünglichen Funktion genau dasselbe bei der Fourierreihe bewirkt.

Was passiert also bei einer Verschiebung entlang der x-Achse? Hier braucht man nur die grundlegende Überlegung, dass $f(x-a) = f(x) + a$ ist.

Gegen Ende dieses Kapitels würde ich noch einmal die Approximationsgeschwindigkeit aufgreifen und diese genauer betrachten.

Aufgabe 3.21 *Blicke zurück zu den Beispielen, die wir bereits behandelt haben und kreuze an, welche der folgenden Aussagen allgemeine Gültigkeit haben.*

- ☐ *Wenn man von a_0 absieht, werden die Koeffizienten kleiner, je größer das n wird.*
- ☐ *Die Koeffizienten werden größer, je größer das n wird.*
- ☐ *Es gibt Unterschiede darin, wie schnell sich die Fourierreihe an die ursprüngliche Funktion annähert.*
- ☐ *Die Koeffizienten fallen/steigen stets linear.*

Aufgabe 3.22 *Es gibt Funktionen wie die Rechtecksfunktion oder Sägezahnfunktion, bei denen Fourierreihen langsamer konvergieren. Welche Unterschiede fallen dir auf, wenn du die Funktionsgraphen der beiden Funktionen mit denen der Dreiecksfunktion oder der Parabelfunktion vergleichst?*

Hier sollte dann erkenntlich werden, dass die Funktionsgraphen nicht in einem Strichzug zeichenbar sind, bzw. unstetig sind. Die SuS sollten erkennen, dass Unstetigkeitsstellen die Approximation verlangsamen. Analytische Funktionen oder Splinefunktionen, wie Strang sie erwähnt, würde ich den SuS vorenthalten. ([Str10] S.370) An diesen Unstetigkeitsstellen tauchen Oszillationen in der Fourierreihe auf: diese Gegebenheit nennt man Gibbs-Phänomen.

Um die Unstetigkeitsstellen in den Vordergrund zu rücken, könnte man die folgende Aufgabe stellen:

Aufgabe 3.23 *Bilde die Fourierreihen $f_1,\ f_2$ zu den folgenden beiden Funktionen g_1 und g_2. Was fällt dir auf?*

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } 0 < x \leqq \pi \\ -1 & \textit{für } \pi < x \leqq 2\pi \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } 0 < x < \pi \\ -1 & \textit{für } \pi \leqq x \leqq 2\pi \end{cases}$$

Aufgabe 3.24 *Berechne $f_1(\pi)$ und $f_2(\pi)$ aus der Aufgabe 3.23. Was erhälst du?*

Die Fourierreihe konvergiert also nicht in allen Punkten gegen die Ursprungsfunktion. An den Unstetigkeitsstellen konvergiert sie gegen das arithmetische Mittel des rechts- und linksseitigen Grenzwerts. Das bedeutet, zwei Funktionen, die sich nur an abzählbar unendlich vielen Punkten unterscheiden (also an den Unstetigkeitsstellen), können die selbe Fourierreihe haben.

Sei also t_k die Fourierreihe k-ter Ordnung und $f(x)$ die ursprüngliche Funktion. Dann gilt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} t_k(x) = \begin{cases} f(x) \text{ für } f \text{ in } x \text{ stetig} \\ \dfrac{f_-(x) + f_+(x)}{2} \text{ für } f \text{ in } x \text{ unstetig} \end{cases}}$$

Abschließend kann man noch darauf eingehen, warum die Fourierkoeffizienten die beste Wahl sind, wenn man die Funktion mit trigonometrischen Polynomen annähern möchte: Der quadratische Fehler.
Mit ansteigender Ordnung k konvergiert der quadratische Fehler zwischen Fourierreihe fr_k und der Ursprungsfunktion $f(x)$ gegen 0. Es gilt also $\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - fr_k(x)|^2 dx = 0$.

3.5 Komplexe und spektrale Form

3.5.1 Literaturrecherche

Auch hier waren insbesondere der Stoffumfang, aber auch die Reihung der Themen von Lehrbuch zu Lehrbuch unterschiedlich. Möglicherweise waren die Divergenzen bei diesem Themenblock sogar am größten.
Pauer et al. gehen gar nicht auf Klirrfaktor und die komplexe Form ein, was die beiden anderen Lehrbücher sehr wohl tun. Auch die spektrale Form kommt im eigentlichen Kapitel der Fourierreihe gar nicht vor. Die Autoren beschränken sich auf eine Erwähnung im "Vorkapitel" über trigonometrische Polynome, auf die ich bereits am Anfang eingegangen bin. Sie fangen damit an, die trigonometrischen Polynome als Klänge zu kontextualisieren und führen diese von Anfang an in der spektralen Form $g(t) = A \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \alpha)$ ein. $\frac{2\pi}{T}$ wird als Kreisfrequenz vorgestellt, der "Phasenwinkel" α wird jedoch gar nicht namentlich erwähnt. Dann wird anhand des Additionstheorems $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)$ begründet, dass A_k und α_k berechenbar sind (noch ohne Berechnungsweg).([PSWSS14], S.231-232) Anschließend wird im zweiten Schritt ([PSWSS14], S.234) die Amplituden-Phasen-Form eingeführt, wo auch die Umrechnung anhand des Summensatzes (s. oben) hergeleitet wird (nur von Amplituden-Phasen-Form in die Nicht-spektrale Form). In den folgenden (wenigen) Beispielen wird lediglich verlangt, die Amplituden-Phasen-Form in eine Form mit Sinus und Cosinus umzurechnen. Es wird auch nicht erläutert, dass $\tan \alpha_k = \frac{a_n}{b_n}$, womit dieses Lehrbuch alleine dasteht. Ebenso fehlt das Amplitudenspektrum in diesem Kapitel gänzlich, wobei sie ohne viel Begründung im darauffolgenden 2-seitigen Kapitel zur Fouriertransformation gebracht wird. ([PSWSS14], S.238)

Timischl und Kaiser hingegen führen die Amplituden-Phasenform und den Klirrfaktor bereits am Anfang des Kapitel der Fourier-Reihen ein. Bei der Amplituden-Phasenform ist erkennbar, dass die Berechnung der Amplitude und des Amplitudenspektrums im Vordergrund steht. Es wird zwar ϕ_n (Phasenlage/Nullphasenwinkel/Phase) ebenso wie die Amplituden-Phasenform vorgestellt, aber in den Beispielen ist stets das Amplitudenspektrum gefragt. Daneben sprechen die Autoren auch von der Ordnung bzw. den Harmonischen. Es wird auch erklärt, dass die Entwicklung der Fourierreihe oft als harmonische Analyse bezeichnet wird. Der Klirrfaktor wird als "Maß für den Oberschwingungsgehalt" ([TK01] S.102) eingeführt und die Gleichheit mit dem Verhältnis des Effektivwerts aller Oberschwingungen zu dem aller Harmonischen erwähnt (aber nicht gezeigt). In den nachgereihten Beispielen, die erst nach dem Theorieteil beginnen, wird der Klirrfaktor verlangt. ([TK01] S.102) Von der komplexen Form der Fourierreihe ist dann erst bei der Fouriertransformation die Rede. ([TK01] S.192)

Sidlo et al. fangen erst später an, über die Amplituden-Phasen-Form zu sprechen. Es fallen Begriffe wie Amplitude, Phasenwinkel und Zeigerdiagramm, die alle als wohlbekannt vorausgesetzt werden, und die Erklärung, wie von a_n und b_n zu A_n und ϕ_n umgerechnet wird, wird mit einer Zeichnung erledigt. Im Anschluß wird das Amplitudenspektrum angesprochen und ebenso wie die Bezeichnung Linienspektrum und das Phasenspektrum (ohne Beispiel) eingeführt. Danach gibt es einen kurzen Abschnitt über den Klirrfaktor und wenige Beispiele dazu, wobei er als "Maß für den Anteil der Oberschwingungen an der gesamten Schwingung" bzw. "Maß für Verzerrungen "([SPS+12] S.74) eingeführt wird. Zuletzt geht es um die komplexe Form der Fourierreihe, wobei die Erklärung relativ detailliert ausgestaltet ist. (Sie greifen u.a. zurück auf die Euler'sche Formel und leiten c_n her, begründen darauf, dass es nun negative n geben kann, und rechnen ein Beispiel vor.) Die Zahl der Beispiele, die die SuS dazu rechnen sollen, fällt sehr gering aus. ([SPS+12] S.73-78)

Um nun kurz auf die Hochschulschriften zu sprechen zu kommen, sei gesagt, dass auch hier eine Varietät des Stoffumfangs vorliegt. Chipot erwähnt die spektrale Form gar nicht und die komplexe nur am Rande ([Chi16], S.109), wo $\cos(kx) = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ und $\sin(kx) = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}$ in die reelle Form der Fourierreihe eingesetzt wird. Bei Heuser hingegen wird die spektrale Form nur kurz erwähnt und die explizite Nennung der komplexen ausgelassen. ([Heu92] S.24) Embacher führt die spektrale Form, anders als etwa Sidlo et al., als Cosinus ein, wobei derselbe Ansatz wie bei Chipot nahegelegt wird als Beweis dafür, dass die Umformung gilt. ([ES11] S.361-363) Butz verfolgt die Motivation, auch negative Frequenzen miteinzubeziehen. Darauf folgt allerdings die gleiche Begründung wie bereits bei den beiden ersten Autoren. ([But12] S.11-13) Auf die spektrale Form kommt er nicht explizit zu sprechen.

3.5.2 Unterrichtsvorschlag

Die Lernziele, die im folgenden Kapitel erreicht werden sollen, sind die folgenden:

1. Die SuS kennen den Unterschied bzw. die Vor- und Nachteile der spektralen und nicht-spektralen Form der Fourierreihe und das Amplitudenspektrum.

2. Die SuS können komplexe Fourierreihen mit technologischen Hilfsmitteln berechnen und kennen den Zusammenhang zur reellen Form.

In die spektrale Form der Fourierreihe lässt sich am besten einführen, indem man aus der Summe von Sinus und Cosinus mit gleicher Frequenz einen Cosinus bzw. einen Sinus macht. Hier ist es am einfachsten, auf die Additionstheoreme und das Zeigerdiagramm zu verweisen (vgl. Abb. 35).

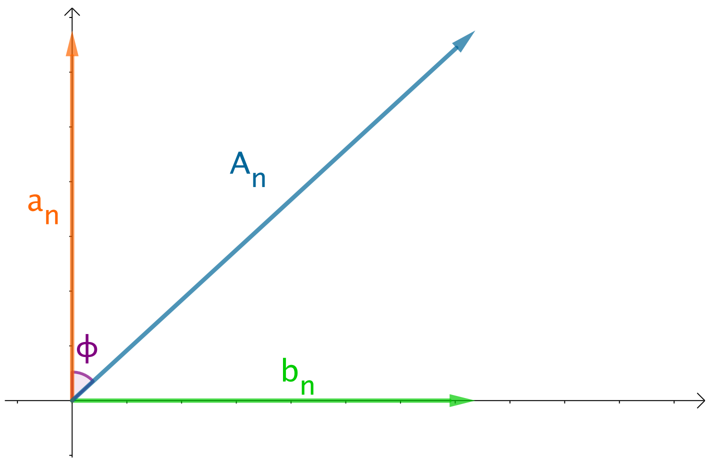


Abbildung 35: Zeigerdiagramm

Vorerst kann man die Amplitude der Schwingung, die aus der Überlagerung entsteht, errechnen, da Sinus und Cosinus im Zeigerdiagramm um genau 90 Grad verschoben sind (rechtwinkliges Dreieck). Es ergibt sich also $a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) = A_n \cdot \cos(nx - \phi_n)$, wobei $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ist. Nun kann man auf die Summensätze verweisen. Wenn man $a'_n = \cos\phi_n$ und $b'_n = \sin\phi_n$ in die Formel $\cos(x - \phi_n) = \cos x \cdot \cos\phi_n + \sin x \cdot \sin\phi_n$ einsetzt, ergibt sich

$$a'_n \cdot \cos(nx) + b'_n \cdot \sin(nx) = \cos(nx - \phi_n).$$

Da hier allerdings die Amplitude fehlt, setzt man $a_n = A_n \cdot \cos\phi_n$ und $b_n = A_n \cdot \sin\phi_n$. Man kann ϕ_n auch am Zeigerdiagramm als $\tan\phi_n = \frac{b_n}{a_n}$ identifizieren.

Um das Verständnis zu fördern, könnte man die folgende Aufgabe geben:

Aufgabe 3.25 *Welche Unterschiede ergeben sich, wenn man Sinus und Cosinus in einen Sinus zusammenfassen würde? Zeichne das Zeigerdiagramm.*

Dann muss man diese Überlegung für alle n anstellen (bei a_0 kann man entweder begründen, dass sich der Mittelwert der Funktion nicht ändern kann, oder in die Formel für A_n einsetzen und ausrechnen, wobei $b_0 = 0$ gesetzt wird), sodass sich Folgendes ergibt: (Hier für den Sinus)

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(nx + \phi)}$$

Danach kann man das Koeffizientenspektrum, das wir bereits angesprochen haben, zum Amplitudenspektrum erweitern. Im Prinzip kann man die SuS die Aufgaben, die bereits im Kapitel 3.4.2 behandelt wurden, mit der Aufgabenstellung, eine Fourierreihe in der spektralen Form zu finden, noch einmal rechnen lassen.

Nun möchte ich weitergehen zur komplexen Form. Diese lässt sich am besten von der Euler'schen Formel ableiten. Wegen $e^{n \cdot ix} = \cos(nx) + i \cdot \sin(nx)$ erhält man

$$e^{n \cdot ix} + e^{-n \cdot ix} = \cos(nx) + i \cdot \sin(nx) + \cos(-nx) + i \cdot \sin(-nx)$$

und wegen $\cos x = \cos(-x)$ und $\sin x = -\sin(-x)$ ergibt sich daraus

$$e^{n \cdot ix} + e^{-n \cdot ix} = 2 \cdot \cos(nx)$$

und schlussendlich $\cos(nx) = \dfrac{e^{n \cdot ix} + e^{-n \cdot ix}}{2}$.

Aufgabe 3.26 *Stelle* $\sin(x)$ *mit* e^{nix} *und* e^{-nix} *dar. Achte darauf, was mit i passiert.*

Wenn man diese erarbeiteten Sinus- und Cosinusdarstellungen in die reelle Form der Fourierreihe einsetzt, erhält man

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}).$$

Es sei noch angemerkt, dass $\frac{x}{i} = -ix$, da eine Division durch eine imaginäre Zahl die Multiplikation mit der komplex Konjugierten bedeutet. Man kann weiters dasselbe auch wie folgt anschreiben:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(e^{n \cdot ix} \cdot (a_n + i \cdot b_n) + e^{-n \cdot ix} \cdot (a_n - i \cdot b_n))$$

Wenn man hier $c_n = a_n + i \cdot b_n$ und $c_{-n} = a_n - i \cdot b_n$ definiert, kann man die Summe von $n = -\infty$ bis ∞ spannen, was eines der vorteilhaften Dinge bei komplexen Zahlen ist. (Hier fügt sich auch a_0 der Formel.)

Nun stellt sich die Frage, wie man diese c_n berechnen kann. Im Prinzip muss man nur zwei Mal einsetzen: Als erstes die Integrale für a_n und b_n, und dort wiederum die Euler'sche Formel für Sinus und Cosinus. Es ergibt sich also für c_n

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)dx - i \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)dx),$$

und wenn man $\cos nx = \dfrac{e^{nix} + e^{-nix}}{2}$ und $\sin nx = \dfrac{e^{nix} + e^{-nix}}{2}$ einsetzt, erhält man

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{2}(e^{nix} + e^{-nix} - i \cdot \frac{e^{nix} - e^{-nix}}{i})dx$$

und weiters

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{2}(e^{nix} + e^{-nix} - e^{nix} + e^{-nix})dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-nix}dx,$$

also

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-nix}dx}$$

Aufgabe 3.27 *Wie lässt sich c_{-n} berechnen?*

Nun können wir also auch komplexe Fourierreihen berechnen, die eine einheitlichere Berechnungsformel als die reelle Form besitzen. Auch hier kann ich zurückverweisen auf die Beispiele aus Kapitel 3.4.2, wobei ich mich an die Grundtendenz der Schulbücher halten und nicht unbedingt sehr viele Beispiele dazu rechnen würde, da der Unterschied beim Rechnen, insbesondere wenn man CAS verwendet, hauptsächlich bei den unterschiedlichen Formeln liegt.

Abschließend würde ich einen Ausblick gewähren, indem die SuS kurz zu einem Gedankenexperiment eingeladen werden, was passieren könnte, wenn man die Periode einer Funktion immer größer macht. Man kann auch sagen, dass die Analyse der Funktionen, die wir bis jetzt behandelt haben, noch eine Fortsetzung besitzt, die ich allerdings nicht mehr in meiner Arbeit behandeln werde. Interessierte können etwa bei Butz ab S. 33 weiterlesen ([But12]).

4 Fazit

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Denkansatz Fourierreihen zu einigen Aufgabenideen führt, zu denen man sonst möglicherweise nicht gekommen wäre. Außerdem kann man das Fundament für das Verständnis der Fourierreihen durchaus bereits in der AHS legen, welches besonders durch die Einstellung der Lehrperson seine Wirkung entfaltet.

In der AHS erhalten die Funktionseigenschaften Symmetrie und Periodizität einen weiteren Kontext, um ihr Wirken zu demonstrieren. Besonders die Zerteilung unterschiedlichster Funktionen in je eine gerade und ungerade Teilfunktion beinhaltet bereits den Gedanken, Funktionen zu unterteilen, und ist gleichzeitig der AHS leicht zumutbar (vgl. Kapitel 2.3, Abschnitt am Ende). Die Idee, durch die Manipulation verschiedener Parameter unterschiedliche Funktionsgraphen zu erzeugen, ist ein hinführender Gedanke für Fourierreihen und zugleich ein guter Weg, die Lehrinhalte wie die Abhängigkeit der Funktion von den Parametern zu veranschaulichen (vgl. Kapitel 2.4.2). Wenn man dann auch noch die Überlagerung von Funktionen bespricht, hat man eigentlich schon den Grundstein für einen Ausblick in Richtung Approximation gelegt. Mit Schiebereglern und vorgegebenen Funktionsgleichungen kann man durchaus von den SuS abverlangen, die Parameter a_n so zu setzen, dass die Überlagerung einer Dreiecks- oder Rechtecksfunktion ähnelt (vgl. Aufgabe 2.22).

In der HTL habe ich auch Lehrbücher unter die Lupe genommen, die unterschiedliche Wege gingen. Auffallend waren die Differenzen im Stoffumfang, aber auch die verschiedenen Herangehensweisen bzw. Kontextualisierungen. Pauer et al. fielen mit ihrem kompakten Stoffumfang und der Erwähnung von CAS in den Aufgaben auf ([PSWSS14]), wohingegen Timischl und Kaiser viel Stoff relativ knapp zusammengefasst vermittelten ([TK01]).
In der Einführung bot sich die Möglichkeit an, verschiedene Kontexte darzubieten (vgl. Aufgabe 3.1) oder an Taylorreihe oder Überlagerung zu erinnern. Im darauffolgenden Kapitel zum eigentlichen Aufstellen der Fourierreihe habe ich zuerst a_0 eingeführt, wobei ich die Mittelwerteigenschaft hervorgehoben habe (vgl. Abb. 3.9). Auch die Tatsache, dass das Integral über ein Produkt von $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$ für $n \neq m$ stets 0 ist, lässt sich anhand eines Schiebereglers nachvollziehen (vgl. Abb. 33). Nachdem die Berechnung von bestimmten Koeffizienten mit einer detaillierten Heranführung erkannt wurde (vgl. Aufgabe 3.13), braucht man im Prinzip nur die verschiedenen Rechenbeispiele üben zu lassen. Dort, wo es passt, können weiterführende Gedanken zur Approximationsgeschwindigkeit eingestreut werden. Im Kapitel Erweiterung habe ich jeweils die komplexe und spektrale Form der Fourierreihe hergeleitet.

Ich denke, dass meine Arbeit einerseits als Inputsammlung, aber auch als erste Anlaufstelle dienen kann, um sich in die Materie einzulesen. Sie ist besonders für Lehrpersonen gedacht, die möglicherweise noch keine Vorstellung davon haben, wie man das Kapitel Fourierreihen im Unterricht behandeln kann. Es hat sich außerdem der wohlbekannte aufbauende Charakter der Mathematik gezeigt, denn es sind viele Aufgaben auch im AHS-Teil vorhanden, die genausogut in der HTL als Aufwärmbeispiele verwendet werden können.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[But12] Butz, Tilman: *Fouriertransformation für Fußgänger*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2012. – ISBN 9783834882950

[Chi16] Chipot, Michel: *Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaften*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2016. – ISBN 3–662–47088–8

[ES11] Embacher, Franz ; SpringerLink: *Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2011. – ISBN 3–8348–9848–1

[Heu92] Heuser, Harro: *Funktionalanalysis*. Stuttgart : Teubner, 1992. – ISBN 351922206X

[htla] *AHS-Lehrpläne Oberstufe neu: Mathematik*. https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/08_AMT/Begriffekatalog_ab_2018/srdp_am_kompetenzen_begriffe_2018_htl_1_2017-10-16.pdf

[htlb] *Begriffekatalog – Angewandte Mathematik Teil A*. https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/08_AMT/Begriffekatalog_ab_2018/srdp_am_begriffekatalog_teil_a_2017-09-01.pdf

[htlc] *Mathematische Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern gültig ab den Matura-Prüfungsterminen 2017/2018*. https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/08_AMT/Begriffekatalog_ab_2018/srdp_am_kompetenzen_2018_teil_a_2017-09-01.pdf

[htl17] *Schulformspezifische Kompetenzen und Begriffe im Cluster HTL 2 gültig ab den Matura-Prüfungsterminen 2017/2018*. https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/08_AMT/Begriffekatalog_ab_2018/srdp_am_kompetenzen_begriffe_2018_htl_2_2017-10-16.pdf. Version: September 2017

[LP16] Lang, Christian B. ; Pucker, Norbert: *Mathematische Methoden in der Physik*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2016. – ISBN 3–662–49313–6

[lpla] http://www.htl.at/htlat/lehrplaene/#anchor_search

[lplb] *LEHRPLAN DER HÖHEREN LEHRANSTALT FÜR BIOMEDIZIN- UND GESUNDHEITSTECHNIK*. http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBl_II_Nr_262_2015_Anlage_1.3.pdf

[lplc] *LEHRPLAN DER HÖHEREN LEHRANSTALT FÜR ELEKTROTECHNIK*. http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBl_II_Nr_262_2015_Anlage_1.6.pdf

[lpld] *LEHRPLAN DER HÖHEREN LEHRANSTALT FÜR FLUGTECHNIK*. http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBl_II_Nr_262_2015_Anlage_1.7.pdf

[lple] *LEHRPLAN DER HÖHEREN LEHRANSTALT FÜR INFORMATIONSTECHNOLOGIE.* http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBl_II_Nr_262_2015_Anlage_1.11.pdf

[PSWSS14] Pauer, Franz ; Scheirer-Weindorfer, Martine ; Simon, Andreas ; Stadler, Heinz: *Mathematik 4/5 HTL.* Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2014. – ISBN 978–3–209–07199–6

[Ros11] Ross, Dieter: *Mathematik mit Simulationen lehren und lernen.* Berlin : De Gruyter, 2011. – ISBN 9783110250060; 3110250063

[SPS+12] Sidlo, Eva-Maria ; Puhm, Ursula ; Steinmair, Cornelia ; Camilo, Christina ; Pollack-Drs, Susanne ; Wymlatil, Georg: *Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 4.* Wien : Hölder-Pichler-Tempsky, 2012. – ISBN 978–3–230–03322–2

[Str10] Strang, Gilbert: *Wissenschaftliches Rechnen.* Springer Berlin Heidelberg, 2010 (Springer-Lehrbuch Masterclass 978-3-540-78494-4)

[TK01] Timischl, Wolfgang ; Kaiser, Gerald: *Ingenieur-Mathematik 4.* Wien : Dorner, 2001. – ISBN 978–3–7055–0158–4

[VA] V. Aue, M. Hohenwarter M. Liebscher E. Sattlberger I. Schirmer H.-S. Siller G. Vormayr M. Weiß E. W. M. Frebort F. M. Frebort: *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen – gültig für alle Schüler/innen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren.* https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf

[wik] https://ja.wikipedia.org/wiki/ÂàùÊúüÂ\T1\ae \T1\AE Â~aï#/media/File:1906_San_Francisco_earthquake_seismograph.png

[WU07] Weber, Hubert ; Ulrich, Helmut: *Laplace-Transformation.* Wiesbaden : Teubner, 2007. – ISBN 978–3–8351–0140–1

Lösungen

Lösungen zu den Aufgaben

Kapitel 2

Aufgabe 2.1 ungerade: 1, gerade: 3, weder noch: 2,4

Aufgabe 2.2 $f(x)$: 4, $r(x)$: 3

Aufgabe 2.3 gerade: $f_3,\ f_4,\ f_6$, ungerade: f_1 weder noch: $f_2,\ f_5$

Aufgabe 2.4 2, 3 und 4

Aufgabe 2.5 gerade: 2, ungerade: 1,4

Aufgabe 2.6 zB. (Bitte farbig als pdf ansehen.)

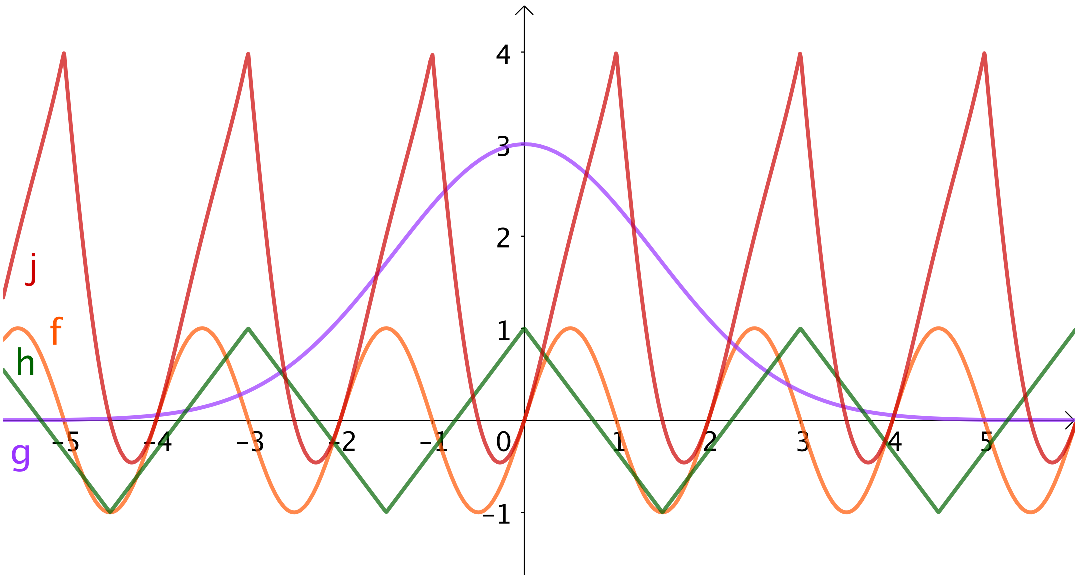


Abbildung 36: Mögliche Lösungen

Aufgabe 2.7 Mögliche Dreiecksschwingungen sind: 1,3,8

Aufgabe 2.8 1.) für a, b gelten: $a, b = 0$: Konstante Funktion $f(x) = c$, a oder $b < 0$: Der Funktionsgraph spiegelt sich an einer zur y-Achse parallelen Achse.
$c = 0$: Der Funktionsgraph geht durch den Ursprung. $c < 0$: Der Funktionsgraph wird in Richtung der negativen y-Achse verschoben.
2.) Sie müssen alle denselben b-Wert haben, außer wenn $a = c = 0$ ist.
3.) Wenn $c = 0$ ist.
4.) Solange $|a| = 3$ und $c = 0$ ist, kann b einen beliebigen Wert annehmen

außer 0. Es gibt also unendlich viele Möglichkeiten.
5.) Nun kann auch a beliebige Werte annehmen, es muss nur $c = 3 - |a|$ gelten. Es gibt auch hier unendlich viele Möglichkeiten.
6.) Bei $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ liegen die Maxima und Minima genau bei a und $-a$.
7.) Es muss $|b| = 5$ sein.
8.) $b = \pi$

Aufgabe 2.9 1.) Alle (ganzzahligen) Vielfachen von 2π.
2.) Entweder $a \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $a > 0$ und $a = 4k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ oder $a < 0$ und $a = 4k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ (Es reicht auch $\frac{\pi}{2}$.)
3.) $\frac{\pi}{2}$
4.) π
5.) Um eine ganze Periode
6.) Um eine Viertelperiode
7.) Die Funktion verschiebt sich immer um genau d_2.
8.) 1.) Bei $d = 0$ verschiebt sich der Graph nicht, und wenn $d < 0$ verschiebt es nach rechts.
2.) Wenn die Funktionen denselben a-Wert besitzen, und um denselben Anteil der Periode verschoben wird (es ist auch möglich, dass die Funktion zusätzlich um eine Vielfache der Periode verschoben wird), dann haben sie auch die selben Nullstellen.
3.) Zuzüglich zu den Voraussetzungen für a, b, c muss d entweder 0 oder ein Vielfaches von π sein. (Es ist auch möglich, dass stattdessen $d = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $c = a$ ist.)
4.) und 5.) bleiben gleich, bei 6.) könnte man besprechen, dass die Amplitude immer noch die Höhe der Hügel sein soll. Ebenso bleibt 8.) gleich.
7.) $d \neq q \cdot \frac{\pi}{2}$ mit q ungerade
9.) bei 3.) muss $d = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $c = a$ sein oder der Graph um ein Viertel bzw. drei Viertel der Periode verschoben.
bei 6.) muss $|b| = 5$ sein und d kein Vielfaches von π. Alles andere bleibt gleich.
10.) Es gibt viele Möglichkeiten. ZB.: für $(1,\ \pi + 1)$ und $(-1,\ 1 - \pi)$: $\pi \sin(\frac{\pi x}{2}) + 1,\ \pi \cos(\frac{\pi}{2}(x - 1)) + 1$, für $(0,\ 1)$: $\sin(x + \frac{pi}{2}),\ \cos x$.

Aufgabe 2.10 Es handelt sich um die Kreisfrequenz, und die Frequenz v ist $v = \frac{2\pi}{b}$

Aufgabe 2.11 Richtig sind: 2,4,5,7,8

Aufgabe 2.12 zB.: 1.) $\pi \cos(2\pi x) - \pi + 2$ 2.) $-\pi \cos(\pi x)$
3.) $-2\cos(2x) - 2$ 4.)$\pi \cos(2x + \frac{2\pi}{3})$

Aufgabe 2.13 Alle b-Werte sind 1, und es gilt: $a_g < a_f < a_h < a_p$ sowie $c_h < c_f = c_g < c_p$

Aufgabe 2.14 Alle a-Werte sind 1, alle c-Werte sind 0 und es gilt: $b_h = b_f = b_p < b_g$ sowie $d_h < d_p = d_g < d_f$

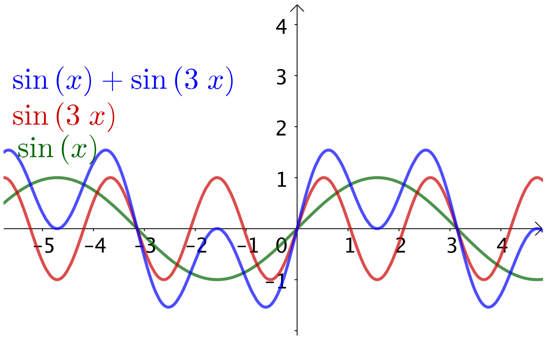


Abbildung 37: $\sin x + \sin(3x)$

Aufgabe 2.15

Aufgabe 2.16 $f_9 + f_{10}$ erzeugt den größten Höhenunterschied

Aufgabe 2.17 Richtig sind 1, 5 und 6

Aufgabe 2.18 Es gehören 1-5, 2-6 und 3-4 zusammen.

Aufgabe 2.19 Damit die Stammfunktion ungerade ist, muss die Integrationskonstante $c = 0$ sein. Sei zB. $f(x) = \cos x$ und $F(x) = \sin x$. Die Stammfunktion aller ungeraden Funktionen ist gerade.

Aufgabe 2.20 2, 3, 5, 7

Aufgabe 2.21 1, 2, 4, 5

Aufgabe 2.22 Als Beispiel:
Die Dreieckschwingung $f(x) = |2x| - 1$ für $-1 < x < 1$ hat ca. die Fourierkoeffizienten $a_1 = -0.81, a_3 = -0.09, a_5 = -0.03, a_7 = -0.02$ (Nr.1).
Die Parabelschwingung $f(x) = x^2 - 1$ für $-\pi < x < \pi$ hat ca. die Fourierkoeffizienten $a_0 = 4.58, a_1 = -4.1, a_2 = -0.44, a_3 = 0.25, a_4 = -0.16$ (Nr.2).
Die Sägezahnschwingung $f(x) = x$ für $-1 < x < 1$hat ca. die Fourierkoeffizienten $a_1 = 0.64, a_2 = -0.32, a_3 = 0.21, a_4 = -0.16, a_5 = 0.13, a_6 = -0.11$ (Nr.3). Die gerade Rechtecksschwingung mit Höhe 1 und -1 und Periode 4 hat ca. die Fourierkoeffizienten $a_1 = -1.27, a_3 = 0.42, a_5 = -0.25, a_7 = 0.18, a_9 = -0.14, a_{11} = 0.12$ (Nr.4).

Kapitel 3

Aufgabe 3.1 1.) Gemeint sind die Langwellen aus dem Radiofunk 2.) Gemeint ist blaues Licht als elektromagnetische Welle 3.) Gemeint ist der Kammerton a' 4.) seismische Wellen, in diesem konkreten Fall die Aufzeichnung beim Erdbeben in San Francisco.

Aufgabe 3.2 Richtig sind: 1.), 2.) und 4.) (Wenn man die konstante Funktion $f(x) = 0$ als gerade betrachtet.)

Aufgabe 3.3 $f(x) = \sin x + \sin(3x) + \sin(5x) + \sin(7x) + \sin(9x) + \sin(11x)$

Aufgabe 3.4 $f(x) = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) + \sin(5x)$

Aufgabe 3.5 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{sin((2k+1) \cdot x)}{2k+1}$

Aufgabe 3.6 Richtig sind: 2.), 3.), 5.)

Aufgabe 3.7 Konst. Fkt: Überlagerung von $f(x)$ und $-f(x)$. Schwebung: In diesem Fall $f(x) = \sin(9x) + \sin(10x)$

Aufgabe 3.8 Es gelten $\sin(nx) \cdot \cos(mx) \neq 0$ und $\sin(nx) \cdot \sin(mx) \neq 0$ wenn $n = m$ und $\cos(nx) \cdot \cos(mx) \neq 0$ wenn $n = m \neq 0$

Aufgabe 3.9 $\sin(9x) + \sin(10x)$ um jeweils 2 bzw. -4 an der y-Achse verschoben.

Aufgabe 3.10 Die Mittelwerte betragen jeweils 0 (grün), 2 (lila) und -4 (orange)

Aufgabe 3.11 Der arithmetische Mittelwert aller Funktionen ist 0.

Aufgabe 3.12 1.) Wenn $n = m$, 2.) Wenn $n = m \neq 0$

Aufgabe 3.13 1.) Für $n = 3$, 2.) Für $n = 4$ 3.) Für $n = 3$ 4.) π 5.) Für $n = 3$ 6.) Mit $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)$ für $n = 3, 4$ sowie $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(3x)$.

Aufgabe 3.14 $b_n = 0$ für alle n, weil die Funktion gerade ist. Außerdem kommt für das Integral $\dfrac{2\cos(n\pi) - 2}{n^2}$ heraus. Für n gerade kommt im Zähler 0 heraus, weshalb auch $a_n = 0$ für alle geraden n.

Aufgabe 3.15 $f(x) = -4\cos x - 0.44\cos(3x) - 0.16\cos(5x)$

Aufgabe 3.16 1.) und 3.)

Aufgabe 3.17 Der Graph der Fourierreihe fünfter Ordnung sieht noch weniger aus wie eine Rechtecksfunktion als der der siebten Ordnung. Die Koeffizienten betragen $a_1 = 1.27, a_3 = 0.42, a_5 = 0.25, a_7 = 0.18$ und $a_2 = a_4 = a_6 = 0$

Aufgabe 3.18 $f(x) = 0.64\sin(\pi x) - 0.32\sin(2\pi x) + 0.21\sin(3\pi x) - 0.16\sin(4\pi x) + 0.13\sin(5\pi x)$

Aufgabe 3.19 zB. $\mathit{Rechteck}_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{für } -1 < x \leqq 0 \end{cases}$,

$\mathit{Rechteck}_2(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ -2 & \text{für } -1 < x \leqq 0 \end{cases}$,

$\mathit{Dreieck}_1(x) = |x-1| - 1$ für $-1 < x < 3$ oder $\mathit{Dreieck}_2(x) = -|x-1| + 1$ für $-1 < x < 3$ jeweils periodisch fortgesetzt.

Aufgabe 3.20 zB. Für $\mathit{Dreieck}_1$: $f(x) = -1.62\sin(x) + 0.18\sin(3x) - 0.06\sin(5x)$

Aufgabe 3.21 Richtig sind 1 und 3

Aufgabe 3.22 Die Unstetigkeitsstellen sollten auffallen (Sprung im Graphen)

Aufgabe 3.23 Die Fourierreihe der beiden Funktionen g_1 und g_2 ist gleich.

Aufgabe 3.24 Es kommt $f_1(\pi) = f_2(\pi) = 0$ heraus.

Aufgabe 3.25 Das ϕ_n wäre in dem Fall der Winkel, der in der Abbildung nicht eingezeichnet ist. Dadurch ergibt sich $\tan\phi_n = \frac{a_n}{b_n}$. Die Berechnung von A_n bleibt gleich.

Aufgabe 3.26 $\sin(nx) = \dfrac{e^{n\cdot ix} - e^{-n\cdot ix}}{2i}$

Aufgabe 3.27 Es kommt genau dieselbe Formel heraus.