universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Bewegungsgleichungen lösen im Physikunterricht“

verfasst von / submitted by

Bettina Steindl, Bakk.

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programmecode as it appears on the student record sheet:	UA 190 412406
Studienrichtung lt.Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Physik UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem meinem Diplomarbeitsbetreuter Doz. Dr. Franz Embacher. Vielen Dank für die exzellente Betreuung, die vielen kreativen Inputs zu meinem Diplomarbeitsthema, sowie den konstruktiven Rückmeldungen zu meiner Arbeit.

Ganz herzlich bedanken möchte ich mich auch bei meiner Familie und meinen Freunden, die mich auf diesem doch langen Weg durch das Studium begleitet haben. Danke für die vielen Aufmunterungen und Motivationen die teilweise nötig waren, um diese Diplomarbeit fertigzustellen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung ... 1
2. Newtonsche Mechanik ... 3
3. Die Grundgleichungen der Newtonschen Mechanik ... 5
   - 3.1. Bewegungsgleichungen in einer Dimension ... 5
     - Beispiel: harmonischer Oszillator ... 5
     - Beispiel: frei fallender Gegenstand ... 6
   - 3.2. Bewegungsgleichungen in drei Dimensionen ... 7
     - Beispiel: Keplerproblem ... 8
   - 3.3. Bewegungsgleichungen von Mehrteilchensystemen ... 9
     - Beispiel gravitative Zweikörperproblem ... 9
4. Numerische Näherungsmethode ... 11
   - 4.1. Eindimensionale Bewegungen ... 12
     - Kräftefreie Bewegung ... 13
     - Homogenes Schwerefeld ... 13
     - Harmonischer Oszillator ... 14
     - Mathematisches Pendel ... 14
   - 4.2. Näherungsmethode ... 15
   - 4.3. Verbesserte Näherungsmethode ... 20
     - 1. Schritt ... 21
     - 2. Schritt ... 21
   - 4.4. Höherdimensionale Bewegungen ... 22
   - 4.5. Verallgemeinerungen ... 23
5. Praktische Umsetzung des Lösungsalgorithmus ... 26
   - 5.1. Tabellenkalkulation ... 26
   - 5.2. Erstellung der GeoGebra-Applets ... 28
     - 1. Schritt: Schieberegler erstellen ... 29
     - 2. Schritt: Formeln eingeben ... 30
     - 3. Schritt: Formeln kopieren ... 31
     - 4. Schritt: Darstellung der Daten ... 31
     - 5. Schritt: Formatierung ... 32
6. GeoGebra-Applets ... 37
   - 6.1. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung ... 37
     - Schieberegler ... 37
   - 6.2. Harmonischer Oszillator ... 39
     - Schieberegler ... 40
   - 6.3. Mathematisches Pendel ... 42
     - Schieberegler ... 43

6.4. Freier Fall mit Luftwiderstand ... 45
Schieberegler ... 46
6.5. Gedämpfte Schwingung ... 48
Schieberegler ... 48
6.6. Erzwungene und gedämpfte Schwingung ... 50
Schieberegler ... 50
6.7. Keplerbewegung ... 53
Schieberegler ... 54
7. Lehrplanbezug ... 56
7.1. Bildungs- und Lehraufgabe ... 56
7.2. Beiträge zu den Bildungsbereichen ... 56
7.3. Didaktische Grundsätze ... 57
W: Fachwissen ... 57
E: Experimentieren und Erkenntnisgewinnung ... 58
S: Standpunkte begründen ... 58
Didaktische Grundsätze ... 58
7.4. Lehrstoff ... 59
8. Schülervorstellungen ... 60
8.1. Schülervorstellungen in der Mechanik ... 62
9. Unterrichtsplanung ... 66
9.1. Allgemeine Umsetzung ... 66
9.2. Planungsraster ... 68
1. Unterrichtseinheit ... 68
2. Unterrichtseinheit ... 70
3. Unterrichtseinheit ... 71
4. Unterrichtseinheit ... 72
10. Resüme ... 73
11. Quellenverzeichnis ... 74
12. Abbildungsverzeichnis ... 75
13. Tabellenverzeichnis ... 76
14. Abstract ... 77

1. Einleitung

Der englische Forscher Sir Isaac Newton (1643-1727) wird als einer der zentralen Begründer der klassischen Physik bezeichnet. 1687 veröffentlichte er in seinem Werk *Philosophiae naturalis principia mathematica* einen völlig neuen Zugang zur Beschreibung der Natur. Dieser neue Weg zeichnete sich nicht nur durch mathematische Methoden, sondern auch durch die Überprüfung dieser mittels Experimenten aus. Die von ihm veröffentlichten drei Newtonschen Gesetze sind die Grundpfeiler der neuzeitlichen Physik. Auf diesen bauen viele weiterführende physikalische Gesetze auf.[1]

Der Fokus dieser Diplomarbeit liegt auf dem zweiten Newtonschen Axiom – der fundamentalen Bewegungsgleichung der Physik. Dieses Gesetz wird im Laufe des Physikunterrichts der Sekundarstufe II behandelt. Leider wird häufig das Gesetz nur in der Form $F = m \cdot a$, also als Möglichkeit eine bestimmten Kraft auszurechnen, von den Schülerinnen und Schülern aufgefasst. Die grundlegende Bedeutung dieser Formel für die Physik in der Form $a = \frac{F}{m}$ bzw. $\ddot{x}(t) = \frac{F(x(t))}{m}$ wird aufgrund der fehlenden mathematischen Kompetenzen im Unterricht nicht ausreichend erfasst. Die Schwierigkeit vor der man im Unterricht als Lehrperson steht, ist, dass diese Gleichung nicht gelöst werden kann, da die dafür nötigen Mathematikkenntnisse (Differentialrechnung) bei den Schülerinnen und Schülern noch nicht vorhanden sind. Dadurch stellt es die Lernenden vor das Problem, dass der Zusammenhang zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung nicht korrekt erfasst werden kann.[2]

Die zentrale Fragestellung, um die sich diese Diplomarbeit deshalb drehen soll, lautet:

„Inwiefern können Bewegungsgleichungen im Physikunterricht gelöst werden?"

[1] vgl. Putz (2018): S.43
[2] vgl. Embacher (2008): S.1f

Ziel dieser Arbeit ist es eine numerische Lösungsmethode der Bewegungsgleichungen vorzustellen. Kennt man einmal das Lösungsschema, kann man je nach verursachender Kraft, die verschiedensten Bewegungsgleichungen analysieren. Folgende Bewegungen werden in dieser Arbeit unter anderem behandelt:

- Gleichmäßig beschleunigte Bewegung
- Freier Fall mit Luftwiderstand
- Harmonischer Oszillator
- Mathematisches Pendel
- Gedämpfte Schwingung
- Erzwungene und gedämpfte Schwingung
- Keplerbewegung

Wie bereits erwähnt, stellt der Kernbereich dieser Diplomarbeit die Möglichkeit des numerischen Lösens der Bewegungsgleichungen - mit den für die jeweilige Schulstufe vorhandenen Mitteln - im Unterricht dar. Diese Lösung soll mit Hilfe der Tabellenkalkulation im Programm GeoGebra geschafft werden. Im Zuge der Diplomarbeit werden zu den unterschiedlichen Bewegungstypen GeoGebra-Applets entwickelt, welche es den Schülerinnen und Schülern mit Hilfe von Schiebereglern ermöglichen, die verschiedenen Bewegungen zu analysieren. Diese GeoGebra-Applets stehen unter https://bettinasteindl.wordpress.com/materials/ zum Download zur Verfügung. Die Lernenden können selbstständig arbeiten und somit die durch eine gegebene Kraft hervorgerufene Bewegung zumindest näherungsweise selbst erarbeiten.

Aufgrund der Vielzahl an physiklisch relevanten Bewegungsformen ist es möglich, auf das Problem in verschiedenen Schulstufen der Sek. II einzugehen. Um einen Überblick über die Einsatzmöglichkeiten zu geben, ist ein weiterer Punkt dieser Diplomarbeit die Einordnung im Lehrplan, sowie die vorhanden Schülervorstellungen. Außerdem wird auf die jeweiligen Möglichkeiten der Einbindung in den Unterricht eingegangen und verschiedene konkrete Unterrichtsstunden vorgestellt.

2. Newtonsche Mechanik

Die klassische Mechanik befasst sich mit den Bewegungen von Körpern. Der Einfachheit halber werden diese Körper oft als punktförmig angenommen und mit dem Begriff *Teilchen* bezeichnet. Für deren Beschreibung gilt folgende Konvention: Der Ort eines Teilchens wird durch die Raumkoordinaten x, y und z definiert. Diese Koordinaten werden im Ortsvektor $\vec{x}$ folgendermaßen zusammengefasst:[3]

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Bewegt sich nun ein als punktförmig angenommener Körper, so wird dessen Bewegung durch die Abhängigkeit aller Koordinaten des Ortsvektors von der Zeit t widergegeben.[4]

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt t ist durch die erste Ableitung (3) des Ortsvektors, die Beschleunigung durch die zweite Ableitung nach der Zeit (4) definiert:[5]

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) \equiv \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) \equiv \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Die zentrale Frage der Mechanik lautet nun: Warum bewegen sich Körper? Damit ein Gegenstand in Bewegung versetzt wird, muss eine Kraft auf ihn wirken. Diese Kraft ist zum Beispiel mit einer Federwaage messbar. Jedoch gibt dies keinen Aufschluss über das genaue Verhältnis der Kraft zur Bewegung. Bereits in der Antike vertrat man die Ansicht, dass immer eine Kraft die Ursache einer Bewegung sein muss. Auf Basis der Forschungen von Galileo Galilei, dass sich ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, mit

[3] vgl. Embacher (2010): S.7
[4] vgl. ebd.
[5] vgl. ebd.

konstanter Geschwindigkeit bewegt, gelangte Isaac Newton zu folgender fundamentaler Erkenntnis: Die Kraft ist die Ursache einer Bewegungsänderung. Mathematisch formuliert bedeutet das: Wirkt auf einen Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt die Kraft $\vec{F}$, so wird dieser beschleunigt. Diese Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$ ist direkt proportional zur Kraft $\vec{F}$. Den Proportionalitätsfaktor hierbei stellt der Kehrwert der Masse dar. Somit gilt:[6]

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F} \tag{5}$$

Die Formel (5) wird als das *zweite Newtonsche Axiom* bezeichnet und stellt den mathematischen Grundpfeiler der klassischen Mechanik dar. Eine wesentlich üblichere Schreibweise von (5) sieht wie folgt aus:[7]

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{F} \tag{6}$$

In Worten formuliert bedeutet (6), dass die Kraft gleich der Masse mal der Beschleunigung ist. Problematisch an dieser Schreibweise ist jedoch, dass die eigentliche Bedeutung des zweiten Newtonschen Axioms hierbei leicht übersehen wird. Diese wird aus der Schreibweise in (5) ersichtlich: Ist die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, bekannt, so lassen sich daraus Rückschlüsse über dessen Bewegung ziehen.[8]

---

[6] vgl. ebd.: S.10
[7] vgl. ebd.: S.11
[8] vgl. ebd.

3. Die Grundgleichungen der Newtonschen Mechanik

3.1. Bewegungsgleichungen in einer Dimension

Um auf die einfachste Form der Bewegungsgleichung zu kommen, betrachtet man ein Punktteilchen mit der Masse m, seine Bewegung ist auf eine Dimension beschränkt. Auf dieses Teilchen wirkt eine Kraft, welche nur von dessen Ort abhängig ist. Somit handelt es sich hierbei um ein eindimensionales, zeitunabhängiges Kraftfeld $F \equiv F(x)$. In diesem Fall nimmt das zweite Newtonsche Axiom die Form (6) an. Damit aber deutlich ersichtlich wird, dass es für alle Zeitpunkte t gültig ist, wird auf der linken Seite die Abhängigkeit von der Zeit angegeben. Auf der rechten Seite wird ergänzt, dass die Kraft vom Ort und dieser wiederum von der Zeit abhängig ist. Somit gilt für (6):[9]

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F\big(x(t)\big) \tag{7}$$

Diese Formel wird die *Newtonsche Bewegungsgleichung* eines Teilchens unter dem Einfluss einer bestimmten Kraft genannt. Es handelt sich also hierbei um eine eindimensionale Bewegungsgleichung.[10]

Wenn die Kraft weiters noch von der Geschwindigkeit und von der Zeit selbst abhängig ist, so ergibt sich für die Bewegungsgleichung folgende Form:[11]

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t) \tag{8}$$

Beispiel: harmonischer Oszillator

Ein Beispiel für eine solche Bewegungsgleichung stellt der harmonische Oszillator dar. Hierbei wirkt die harmonische Kraft, auch Federkraft genannt, auf ein Teilchen in einer Dimension. Diese harmonische Kraft ist gegeben durch:[12]

[9] vgl. ebd.: S.19
[10] vgl. ebd.
[11] vgl. ebd.: S.20
[12] vgl. ebd.: S.16

$$F(x) = -k \cdot x \tag{9}$$

Hierbei wird die Konstante $k > 0$ Federkonstante genannt. Die Auslenkung vom Nullpunkt bezeichnet man mit x und somit stellt F eine rücktreibende Kraft dar. Diese ist direkt proportional zur Auslenkung.[13]

Setzt man (9) nun in (7) ein, so erhält man die Bewegungsgleichung des Teilchens unter dem Einfluss der Federkraft:[14]

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t) \tag{10}$$

Dies stellt eine der wichtigsten Bewegungsgleichungen in der Physik dar. Es handelt sich hier um einen sogenannten harmonischen Oszillator.[15]

Beispiel: frei fallender Gegenstand

Ein weiteres Beispiel für eine eindimensionale Bewegungsgleichung stellt ein frei fallender Körper nahe der Erdoberfläche unter Vernachlässigung des Luftwiderstands dar. Da es sich hier um eine Fallbewegung handelt, verwendet man nun die z-Komponente der konstanten Gravitationskraft:[16]

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \tag{11}$$

Somit ergibt sich für die eindimensionale Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \ddot{z}(t) = -m \cdot g \tag{12}$$

Da auf beiden Seiten die Masse m zu finden ist, kann man die Formel mittels Division durch m auf folgende Form vereinfachen:[17]

$$\ddot{z}(t) = -g \tag{13}$$

Daraus lassen sich zwei wichtige Schlussfolgerungen ziehen. Erstens ist die Formel (13) unabhängig von der Masse, was bedeutet, dass alle Körper gleich schnell fallen,

[13] vgl. ebd.
[14] vgl. ebd.: S.19
[15] vgl. ebd.
[16] vgl. ebd.: S.20
[17] vgl. ebd.

vorausgesetzt der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Zweitens handelt es sich hier um eine Bewegung mit einer konstanten, in die negative z-Richtung, sprich nach unten, gerichteten Beschleunigung. Daher kommt auch der Name *gleichmäßig beschleunigte Bewegung*.[18]

3.2. Bewegungsgleichungen in drei Dimensionen

Analog zum eindimensionalen Fall geht man vor, wenn man die Bewegungsgleichung eines Teilchens mit der Masse m für drei Dimensionen erhalten möchte. Zunächst betrachtet man wieder den Fall, dass die Kraft nur vom Ort abhängig ist. Es handelt sich somit abermals um ein Kraftfeld $\vec{F} \equiv \vec{F}(\vec{x})$, welches zeitunabhängig ist. Da das zweite Newtonsche Axiom immer noch für alle Zeitpunkte gilt, ergänzt sich die linke Seite von (6) analog zum eindimensionalen Fall um die zeitabhängige Komponente. Damit aber die rechte Seite der Formel die tatsächlich wirkende Kraft auf das Teilchen zur Zeit t wiedergibt, muss der allgemeine Ortsvektor $\vec{x}$ durch den Ort, an dem sich das Teilchen zum Zeitpunkt t aufhält, ersetzt werden. Somit ergibt sich für die Newtonsche Bewegungsgleichung in drei Dimensionen folgende Gestalt:[19]

$$m \cdot \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t)) \tag{14}$$

Da es sich hier um eine vektorielle Gleichung handelt, muss man sich im Klaren darüber sein, dass diese im Wesentlichen aus drei Gleichungen besteht:[20]

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F_x(\vec{x}(t)) \equiv F_x(x(t), y(t), z(t)) \tag{15}$$

$$m \cdot \ddot{y}(t) = F_y(\vec{x}(t)) \equiv F_y(x(t), y(t), z(t)) \tag{16}$$

$$m \cdot \ddot{z}(t) = F_z(\vec{x}(t)) \equiv F_z(x(t), y(t), z(t)) \tag{17}$$

Aufgefächert in die einzelnen Komponenten wird sichtbar, dass die wirkende Kraft von allen drei Raumkoordinaten abhängen kann. Falls sie außerdem noch von der

[18] vgl. ebd.
[19] vgl. ebd.: S.21
[20] vgl. ebd.

Geschwindigkeit und der Zeit explizit abhängt, so lautet die Bewegungsgleichung wie folgt:[21]

$$m \cdot \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}\big(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t\big) \tag{18}$$

Beispiel: Keplerproblem

Anwendung findet die dreidimensionale Bewegungsgleichung, wenn auf ein Teilchen die gravitative Zentralkraft (Gravitationskraft), wirkt. Die Newtonsche Gravitationskraft ist definiert durch:[22]

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{|\vec{x}|^3} \cdot \vec{x} \tag{19}$$

Diese Formel gibt die Kraft an, die von einem im Koordinatenursprung fixierten Zentralkörper mit der Masse M auf einen beweglichen Körper mit der Masse m am Ort $\vec{x}$ wirkt. Bei G handelt es sich um die Newtonsche Gravitationskonstante, welche mit $G=6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2)$ angegeben wird. Das Minus in der Formel weist darauf hin, dass die Kraft zum Zentralkörper hin gerichtet ist. Sie wirkt als Anziehung.[23]

Setzt man nun in die allgemeine Bewegungsgleichung für die Kraft die gravitative Zentralkraft ein, so erhält man die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt:[24]

$$m \cdot \ddot{\vec{x}}(t) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{|\vec{x}(t)|^3} \cdot \vec{x}(t) \tag{20}$$

Da auf beiden Seiten der Gleichung die Masse des bewegten Teilchens m vorkommt, kann man die Formel durch Division mit m auf folgende Form vereinfachen:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\frac{G \cdot M}{|\vec{x}(t)|^3} \cdot \vec{x}(t) \tag{21}$$

Weil die Bewegungsgleichung somit unabhängig von der Masse des Körpers ist, lässt sich daraus schlussfolgern, dass die Bewegung des Körpers unabhängig von dessen Masse ist.[25]

[21] vgl. ebd.
[22] vgl. ebd.
[23] vgl. ebd.: S.12
[24] vgl. ebd.: S.21
[25] vgl. ebd.

3.3. Bewegungsgleichungen von Mehrteilchensystemen

Um die Bewegungsgleichungen von Mehrteilchensystem aufstellen zu können, wird ein System aus mehreren miteinander wechselwirkenden Teilchen betrachtet. Im Konkreten heißt das, ein System besteht aus angenommen zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2. Weiters gilt, dass die Kraft auf jedes Teilchen nur von den beiden Orten abhängig ist. Die Kraft, die auf das erste Teilchen wirkt, bezeichnet man mit $\vec{F}_1$, die Kraft auf das zweite mit $\vec{F}_2$. Somit ergibt sich unter Anwendung von (6) ein System von Bewegungsgleichungen:[26]

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{x}}_1(t) = \overrightarrow{F_1}\big(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)\big) \tag{22}$$

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{x}}_2(t) = \overrightarrow{F_2}\big(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)\big) \tag{23}$$

Beispiel gravitative Zweikörperproblem

Beim berühmtesten Zweikörperproblem betrachtet man zwei Körper mit den Massen m_1 bzw. m_2, welche sich zum gegebenen Zeitpunkt an den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ befinden. Zwischen ihnen wirkt die Newtonsche Gravitationskraft. Im Unterschied zu vorhin (siehe 19), können sich nun beide Körper bewegen. Somit ergeben sich für die Berechnung der Kraft $\vec{F}_1$, die auf den ersten Körper wirkt, und $\vec{F}_2$, für den zweiten, folgende Formeln:[27]

$$\vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \tag{24}$$

$$\vec{F}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{25}$$

[26] vgl. ebd.: S.21f
[27] vgl. ebd.: S.14

Angewendet auf die allgemeinen Bewegungsgleichungen ergeben sich die Bewegungsgleichungen für das gravitative Zweikörperproblem:[28]

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{x}}_1(t) = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)|^3} \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) \tag{26}$$

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{x}}_2(t) = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)|^3} \cdot \left(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)\right) \tag{27}$$

Diese Bewegungsgleichungen stellen einen Meilenstein der Newtonschen Mechanik dar. Aus ihnen lassen sich die Keplerschen Gesetze der Planetenbahnen ableiten. Außerdem kann mit deren Hilfe das Fallgesetz hergeleitet werden. Aus historischer Sicht, liegt ihre fundamentale Bedeutung darin, dass sich durch sie die Ansicht durchsetzte, dass im Himmel und auf der Erde die gleichen physikalischen Gesetze gelten.[29]

[28] vgl. ebd.: S.22
[29] vgl. ebd.

4. Numerische Näherungsmethode

Jahrhundertelang war das zweite Newtonsche Axiom einer der Grundpfeiler der klassischen Physik. Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung, mittels derer man aus gegebenen Anfangsdaten Aussagen über künftige Bewegungen eines mechanischen Systems treffen kann. Jedoch stellt dieses im Physikunterricht der Sekundarstufe 2 für Schülerinnen und Schüler eine besondere Schwierigkeit dar. Grund dafür ist die noch nicht erworbene mathematische Kompetenz. Schülerinnen und Schüler, vor allem zu Beginn der Sekundarstufe 2, verfügen noch nicht über das nötige mathematische Rüstzeug. Es fehlen dafür nötige Rechentechniken und Konzepte der Analysis, sowie die Kenntnis über Differentialgleichungen und den damit verbundenen Lösungsmethoden. Somit ist das erstrebenswerte Ziel, dass Schülerinnen und Schüler nicht nur den eigentlichen Sinn des Axioms erkennen, sondern auch selbstständig damit operieren können, nur sehr schwer zu erreichen.[30]

Die Ziele, welche ein erfolgreicher Physikunterricht verfolgt, sind einerseits die Auseinandersetzung mit der Bedeutung des zweiten Newtonschen Axioms in der klassischen Mechanik, Kraft ist Ursache der Beschleunigung. Andererseits muss den Lernenden das in ihm enthaltene Vorhersagepotential kompetenzorientiert vermittelt werden. Um den Schülerinnen und Schülern diese bedeutende Rolle in der Physik begreiflich zu machen, darf sich nicht nur auf die Spezialfälle der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, sowie der Kreisbewegung beschränkt werden. Aufgrund der mangelnden mathematischen Kompetenzen werden weitere Bewegungstypen wie zum Beispiel schwingende Systeme oder die Keplerbewegung oft nur sehr oberflächlich und mit unzureichendem Bezug zum zweiten Newtonschen Axiom im Physikunterricht behandelt. Kompetenzorientierter Unterricht muss also den Anspruch stellen, dass es den Schülerinnen und Schülern zumindest näherungsweise selbst möglich ist, die durch eine vorhandene Kraft hervorgerufene Bewegung eigenständig zu erfassen. Aus diesem Grund wird im folgenden Kapitel eine Methode vorgestellt, bei der Lernenden mit Hilfe des numerischen Lösens von Differentialgleichungen dies ermöglicht werden soll.[31]

[30] vgl. Embacher (2008): S.1
[31] vgl. ebd.

4.1. Eindimensionale Bewegungen

Wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln ausführlich erläutert, stellt das zweite Newtonsche Axiom einen Grundpfeiler der klassischen Mechanik dar. In Kapitel (2) wurde außerdem ausführlich dargelegt, warum es sich empfiehlt, dieses in der folgenden Form anzuschreiben:[32]

$$a = \frac{F(x)}{m} \tag{28}$$

Hierbei handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese besagt: Ist die wirkende Kraft F bekannt, so kann die Beschleunigung a zu jedem Zeitpunkt einer Bewegung durch (28) berechnet werden. Ersetzt man nun die Beschleunigung durch die zweite Ableitung der Ortskoordinate, so erhält man eine genauere Form des Axioms:[33]

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(x(t))}{m} \tag{29}$$

Formel (29) gilt jedoch nur für den Fall, dass die Kraft nur vom Ort abhängt. Findet man eine Funktion $x \equiv x(t)$, die (29) erfüllt, so handelt es sich um eine Lösung des Bewegungsproblems. Durch die Festlegung eines Anfangsorts $x_0 = x(0)$ und einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \dot{x}(0)$ ist die Lösung eindeutig bestimmt. Deshalb wird das zweite Newtonsche Axiom, wie bereits erwähnt, als Bewegungsgleichung bezeichnet. Im folgenden Abschnitt werden Beispiele für solche Lösungen von eindimensionalen Bewegungsgleichungen genannt.[34]

---

[32] vgl. ebd.: S.2
[33] vgl. ebd.
[34] vgl. ebd.

Kräftefreie Bewegung

Bewegt sich ein Körper ohne Einwirkung einer äußeren Kraft, so gilt: $F(x) = 0$. Angewendet auf (29) lautet die Bewegungsgleichung, die es zu lösen gilt, folgendermaßen:[35]

$$\ddot{\vec{x}}(t) = 0 \tag{30}$$

Diese Formel macht deutlich, dass sich ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, gleichförmig und somit mit der Beschleunigung Null bewegt. Die allgemeine Lösung von (30) hat folgende Form:[36]

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t \tag{31}$$

Diese Lösung kommt nicht sehr überraschend. Sie sagt nämlich aus, dass sich ein Körper ohne Einwirkung einer Kraft mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegt. Somit ist die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt gleich der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Dabei handelt es sich um das erste Newtonsche Axiom, den Trägheitssatz.[37]

Homogenes Schwerefeld

Ein zeitunabhängiges Kraftfeld wird als *homogen* bezeichnet, wenn es überall konstant ist, oder anders ausgedrückt, wenn es im ganzen Raum durch den gleichen Vektor beschrieben wird. Die folgende Formel bezeichnet die wirkende Kraft bei einer Bewegung in solch einem homogenen Schwerefeld: $F(x) = m \cdot g$. Die Konstante g benennt die Schwerebeschleunigung zum Beispiel auf der Erde oder auf einem anderen Planeten. Außerdem wirkt die Kraft in die positive x-Richtung, wodurch ein zusätzliches negatives Vorzeichen vermieden wird. Durch Einsetzen der Kraft in die Formel (29) erhält man die Bewegungsgleichung (32) und durch anschließende Division durch m reduziert sich die Formel auf die bekannte Form (33).[38]

---

[35] vgl. Embacher (2010): S.26f
[36] vgl. ebd.
[37] vgl. ebd.
[38] vgl. ebd.: S.28

$$\ddot{x}(t) = \frac{m \cdot g}{m} \tag{32}$$

$$\ddot{x}(t) = g \tag{33}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:[39]

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2 \tag{34}$$

Harmonischer Oszillator

Wirkt eine zur Auslenkung proportionale rücktreibende Kraft $F(x) = -k \cdot x$, nimmt die zu lösende Bewegungsgleichung folgende bereits erwähnte Form an:[40]

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t) \tag{35}$$

Um die in der Lösung der Bewegungsgleichung verwendeten Kreisfrequenz ω zu definieren, verwendet man die Federkonstante $k > 0$ und die Masse m, sodass $\omega = \sqrt{k/m}$ gilt. Außerdem werden die Amplitude A und die Anfangsphase φ aus dem Anfangsort sowie der Anfangsgeschwindigkeit ermittelt. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:[41]

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi\right) \tag{36}$$

Mathematisches Pendel

Beim mathematischen Pendel bezeichnet x den Auslenkungswinkel, g die Schwerebeschleunigung und L die Länge des Stabes, der als masselos angenommen wird. Am Ende des Stabes ist die Masse m befestigt. Betrachtet man eine wirkende Kraft $F(x) = -\frac{m \cdot g}{L} \cdot \sin(x)$, dann nimmt die zu lösende Bewegungsgleichung folgende Form an:[42]

$$\ddot{x}(t) = -\frac{g}{L} \cdot \sin\left(x(t)\right) \tag{37}$$

[39] vgl. ebd.
[40] vgl. Embacher (2008): S.2
[41] vgl. ebd.
[42] vgl. ebd.: S.3

In diesem Fall ist es nicht möglich die allgemeine Lösung durch elementare Funktionen auszudrücken. Ist $|x| \ll 1$, also werden sehr kleine Auslenkungen behandelt, dann ergibt sich $F(x) \approx -\frac{m \cdot g}{L} \cdot x$. Hierbei handelt es sich abermals um den aus dem Physikunterricht bekannten harmonischen Oszillator.[43]

4.2. Näherungsmethode

Die gerade vorgestellten allgemeinen Lösungen sind Ergebnisse aus dem analytischen Lösen von Differentialgleichungen. Die Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 verfügen jedoch nicht über die nötigen Fähigkeiten und Techniken der Analysis. Dennoch muss es ein Ziel des erfolgreichen Physikunterrichts sein, den Lernenden einen operationalen Zugang zu derartigen Bewegungsgleichungen und ihren Lösungen zu ermöglichen. Um dies im Unterricht zu gewährleisten, gibt es den Zugang über die Idee, die jeweilige Bewegung lediglich während sehr kurzer Zeitintervalle zu betrachten. Diese Zeitintervalle werden dann immer kürzer gemacht beziehungsweise anschließend beliebig kurz gedacht. Der Umgang mit kurzen Zeitintervallen stellt für die Schülerinnen und Schüler nichts Neues dar, denn diese Methode kennen sie schon von der Einführung der Momentangeschwindigkeit. Diese ist definiert als:[44]

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{38}$$

Hierbei beschreibt Δx den zurückgelegten Weg während eines kurzen Zeitintervalls Δt. Genauso wie man aus dem Ort die Geschwindigkeit bestimmt, erhält man die Beschleunigung aus der jeweiligen Geschwindigkeit. Die Formel lautet wie folgt:[45]

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{39}$$

[43] vgl. ebd.
[44] vgl. ebd.
[45] vgl. ebd.

Analog lässt sich feststellen, dass die Änderung der Geschwindigkeit Δv während eines kurzen Zeitintervalls Δt durch die obere Formel bestimmt wird. In den weiteren Überlegungen muss Δt nur so klein wie in diesen zwei Definitionen (38) und (39) gewählt werden.[46]

Um eine numerische Methode zum Lösen der Differentialgleichungen zu erhalten, werden also die Bewegungen während eines kurzen Zeitintervalls Δt herangezogen. Der Einfachheitshalber betrachtet man lediglich punktförmige Körper, auch wenn x nicht immer für eine Teilchenkoordinate stehen muss, sondern zum Beispiel auch einen Winkel darstellen kann. Der Anfangsort ist durch x_0 und die dazugehörige Anfangsgeschwindigkeit durch v_0 gegeben. Da das Zeitintervall Δt klein ist, kann näherungsweise angenommen werden, dass sich die Geschwindigkeit des Körpers während dieses Zeitintervalls nicht signifikant ändert. Somit kann der Ort x_1, an dem sich das Teilchen nach dem Zeitintervall Δt befindet, einfach berechnet werden. Unter der Verwendung von $v = v_0$ und $\Delta x = x_1 - x_0$ ergibt sich aus (38) die folgende Näherungsformel:[47]

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t \tag{40}$$

Zu beachten ist jedoch, dass dies nur unter der Voraussetzung gilt, dass sich die Geschwindigkeit nicht signifikant ändert. Da die Bewegung aber unter dem Wirken einer Kraft stattfindet, ändert sich die Geschwindigkeit ein klein wenig. Dieser Umstand muss natürlich berücksichtigt werden. Durch das Umformen von (39) beträgt die Geschwindigkeitsänderung $a \cdot \Delta t$. Bezeichnet man die Geschwindigkeit nach dem Zeitintervall Δt mit v_1, so folgt $\Delta v = v_1 - v_0$ und man erhält $v_1 = v_0 + a \cdot \Delta t$. An dieser Stelle wird das zweite Newtonsche Axiom in den Überlegungen berücksichtigt. Die Beschleunigung a wird durch die Formel (29) als Funktion des Ortes wiedergegeben. Das bedeutet, dass am Anfang des Zeitintervalls die Beschleunigung

[46] vgl. ebd.
[47] vgl. ebd.: S.4

durch $\frac{F(x_0)}{m}$ gegeben ist. Unter der Annahme, dass diese sich während des Zeitintervalls nicht signifikant ändert, ergibt sich:[48]

$$v_1 = v_0 + \frac{F(x_0)}{m} \cdot \Delta t \tag{41}$$

Durch die Formel (40) und (41) ist es nun möglich, aus dem Anfangsort x_0 und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 den Ort x_1 und die Geschwindigkeit v_1 nach dem kurzen Zeitintervall Δt zumindest näherungsweise zu berechnen. Außerdem kann mit Hilfe eines weiteren Schrittes der Ort x_2 und die Geschwindigkeit v_2 nach einem weiteren Zeitintervall Δt berechnet werden. Somit erhält man ein iteratives Verfahren der folgenden Form:[49]

$$(x_0, v_0) \rightarrow (x_1, v_1) \rightarrow (x_2, v_2) \rightarrow \cdots \tag{42}$$

Hierbei handelt es sich um das sogenannte *Euler-Cauchy-Verfahren*, welches verwendet wird, um Differentialgleichungen zweiter Ordnung numerisch zu lösen. Wendet man dieses Verfahren nun oft genug an, so kann man auf Bewegungen während längerer Zeitintervalle schließen. Je kleiner hierbei Δt gewählt wird, desto genauer wird das Verfahren. Jedoch werden dann umso mehr Schritte nötig, um die Bewegung zu einer vorgegebenen Zeit t zu erhalten. Im Unterricht ist eine rein zahlenmäßige Erfassung von Bewegungen, so wie es hier der Fall ist, nicht sehr sinnvoll. Somit bietet sich eine Visualisierung des Bewegungsablaufs mittels grafischer Darstellung der Wertetabelle (siehe Tabelle 1) in einem Diagramm an.[50]

Zeit	Ort
0	x_0
Δt	x_1
$2 \cdot \Delta t$	x_2
$3 \cdot \Delta t$	x_3
$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 1: Wertetabelle zur Visualisierung des Bewegungsablaufs

[48] vgl. ebd.
[49] vgl. ebd.
[50] vgl. ebd.

Dieses Verfahren weist allerdings einen gravierenden didaktischen Nachteil auf. Es ist leider nicht sehr genau. Solange Δt der Größenordnung nach so gewählt ist, dass die Zahl der anzuwendenden Verfahrensschritte nicht enorm anwachsen, treten in der Darstellung der Bewegungen Effekte auf, die nicht mit den tatsächlichen, durch die Bewegungsgleichung beschriebenen Bewegungsabläufen, übereinstimmen. Problematisch wird es, wenn die Schülerinnen und Schüler diese falschen Effekte jedoch für reale Bewegungen halten. Als Beispiel sei hier der harmonische Oszillator genannt. Durch Einsetzen der harmonischen Kraft (9) in (41) ergeben sich folgende Iterationsschritte:[51]

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t \tag{43}$$

$$v_1 = v_0 - \frac{k \cdot x_0}{m} \cdot \Delta t \tag{44}$$

Mittels Tabellenkalkulation kann diese numerische Lösung in GeoGebra grafisch dargestellt werden. Hierbei zeigt sich, dass sich durch die Anwendung des Euler-Cauchy-Verfahrens Ungenauigkeiten ergeben, die dazu führen, dass der Eindruck erweckt wird, die Amplitude der Bewegung würde mit der Zeit zunehmen (siehe Abbildung 1). Dies geht jedoch nicht aus den Bewegungsgleichungen hervor, sondern wird durch die Ungenauigkeit des Verfahrens hervorgerufen. Eine Richtigstellung im Unterricht würde einen erheblichen Aufwand sowohl zeitlicher als auch inhaltlicher Natur erfordern. Außerdem geht der eigentliche Sinn, physikalische Bewegungsabläufe zu erläutern, sowie der didaktische Vorteil des operationalen Zugangs beinahe gänzlich verloren.[52]

[51] vgl. ebd.: S.5
[52] vgl. ebd.

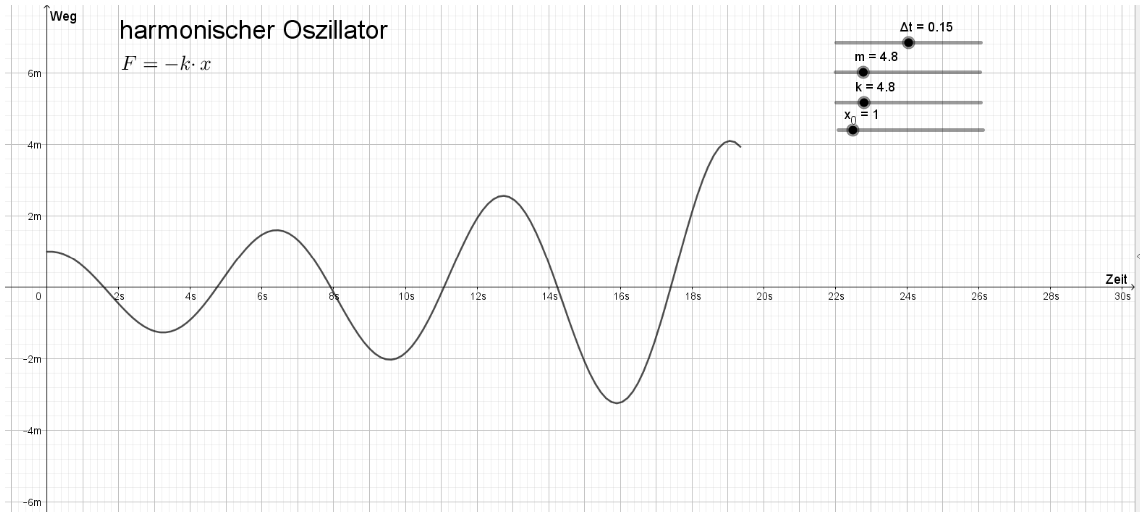

Abbildung 1: Harmonischer Oszillator mit dem Euler-Cauchy-Verfahren.

Natürlich gibt es genauere Verfahren zum näherungsweisen Lösen von Differentialgleichungen, beispielsweise das Runge-Kutta-Verfahren. Jedoch besitzen die meisten dieser Methoden ebenfalls einen gravierenden didaktischen Nachteil: Sie basieren auf Berechnungsschemata, die physikalisch weit weniger nachvollziehbar als das bereits vorgestellte Euler-Cauchy-Verfahren sind. Somit funktioniert dieser Zugang im Unterricht nur, wenn die Schülerinnen und Schüler die vorhandenen Simulationen sowie die zugrundeliegenden Berechnungen durch eine Software schlichtweg akzeptieren, ohne dies zu hinterfragen. Problematisch hierbei ist nicht eine etwaige Ablehnung durch die Lernenden, sondern der Verlust der Erkenntnis, dass ein näherungsweises Lösen von Bewegungsgleichungen durch das Verfolgen von kurzen Zeitintervallen möglich ist.[53]

Es bedarf also eines Zugangs, der einerseits keine Fehlinterpretationen der Schülerinnen und Schüler zulässt, aber andererseits dennoch sinnvoll im Unterricht eingesetzt werden kann. Es muss somit ein Näherungsverfahren gefunden werden, das genauer als das vorhin erwähnte ist und von den Lernenden selbst umgesetzt werden kann. Ziel des Physikunterrichts muss es also sein, dass dieses Verfahren von den Schülerinnen und Schülern eigenständig verstanden und begründet werden kann. Sollte nicht ein solider Grundstein im Mathematik- oder Informatikunterricht gelegt

[53] vgl. ebd.

worden sein, fallen somit aufwändige Methoden wie das Runge-Kutta-Verfahren von vornherein weg. Es gibt aber ein numerisches Verfahren, welches die nötigen Vorteile aufweist. Dieses wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.[54]

4.3. Verbesserte Näherungsmethode

Um diese verbesserte Methode verstehen zu können, ist nur eine weitere Annahme nötig: die gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Hierbei betrachtet man einen Körper, der sich mit konstanter Beschleunigung a bewegt und zu einem gewissen Zeitpunkt die Geschwindigkeit v_0 besitzt. Dieser legt dann während des Zeitintervalls Δt die folgende Strecke zurück:[55]

$$\Delta x = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2}(\Delta t)^2 \tag{45}$$

Setzt man $v_0 = 0$, so reduziert sich die obere Formel auf die bekannte Form des Fallgesetzes. Somit wird der freie Fall aus der Ruhelage beschrieben. Der Term $v_0 \cdot \Delta t$ berücksichtigt hierbei eine von Null verschiedene Anfangsgeschwindigkeit des Körpers. Dieser Sachverhalt kann bei der Besprechung der gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit eingebunden werden. Ist diese Beziehung den Schülerinnen und Schülern vertraut, kann das numerische Näherungsverfahren zum Lösen der Bewegungsgleichungen in zwei Schritten verbessert werden:[56]

[54] vgl. ebd.: S.6
[55] vgl. ebd.
[56] vgl. ebd.: S.7

1. Schritt

Bei der Berechnung von x_1 aus x_0 kann zusätzlich miteinbezogen werden, dass die Bewegung beschleunigt abläuft. Als Näherung wird jene Beschleunigung verwendet, die der Körper am Anfangsort x_0 erfährt. Aus (29) folgt somit:[57]

$$a = \frac{F(x_0)}{m} \tag{46}$$

Kombiniert man nun (40) und (45) so erhält man die genauere Version der numerischen Lösungsmethode:[58]

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{F(x_0)}{2 \cdot m} \cdot (\Delta t)^2 \tag{47}$$

2. Schritt

Die Beschleunigung (46) gilt jedoch streng genommen nur am Anfangsort x_0. Da aber mit Hilfe von (47) der Ort x_1 bereits ermittelt wurde, ist auch die am Ende des Zeitintervalls vorhandene Beschleunigung $\frac{F(x_1)}{m}$ bekannt. Um nun den verbesserten Näherungswert der Beschleunigung zu erhalten, wird der Mittelwert zwischen Anfangs- und Endbeschleunigung verwendet. Somit ergibt sich:[59]

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F(x_0)}{m} + \frac{F(x_1)}{m} \right) \cdot \Delta t \tag{48}$$

Das Verfahren, welches sich aus (47) und (48) ergibt, stellt eine Kombination aus zwei Standard-Verfahren dar. Bei (47) handelt es sich um die Entwicklung der Ortskoordinate am Ende des jeweiligen Zeitintervalls bis zur Ordnung $(\Delta t)^2$. Im Gegensatz dazu basiert die Mittelwertbildung in (48) auf dem sogenannten Heun-Verfahren.[60]

[57] vgl. ebd.
[58] vgl. ebd.
[59] vgl. ebd.
[60] vgl. ebd.

Dieses neue modifizierte Verfahren stellt eine wesentliche Verbesserung der vorhin genannten ungenaueren Methoden dar. Mit dessen Hilfe können numerische Lösungen von Bewegungsgleichungen näherungsweise ermittelt werden. Die grafische Darstellung weist im Allgemeinen keine fälschlichen Zusatzeffekte auf. Anders ausgedrückt, stimmt in diesem Fall die numerische Näherung für Ort und Geschwindigkeit für jedes Zeitintervall bis zur Ordnung $(\Delta t)^2$ mit der tatsächlichen Lösung überein. Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung liefert das Verfahren sogar die exakte Bewegung, wohingegen das zu Beginn besprochene Verfahren lediglich mit einer linearen Genauigkeit arbeitet.[61]

Abschließend sei noch angemerkt, dass somit nun eine Methode zur Verfügung steht, mit der beinahe alle im Physikunterricht relevanten klassischen Bewegungsprobleme behandelt werden können.[62]

4.4. Höherdimensionale Bewegungen

Damit die bisherigen Überlegungen auf Bewegungen im dreidimensionalen Raum bzw. in der Ebene anwendbar sind, müssen im Wesentlichen nur Vektorpfeile über die entsprechenden Größen gesetzt werden. Somit hat das zweite Newtonsche Axiom das folgende Aussehen, welches allgemein bekannt ist:[63]

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}(\vec{x})}{m} \tag{49}$$

[61] vgl. ebd.: S.8
[62] vgl. ebd.
[63] vgl. ebd.: S.14

Das numerische Näherungsverfahren (47) und (48) wird ebenfalls vektoriell betrachtet. Somit ergibt sich:[64]

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot \Delta t + \frac{\vec{F}(\vec{x}_0)}{2 \cdot m} \cdot (\Delta t)^2 \tag{50}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\vec{F}(\vec{x}_0)}{m} + \frac{\vec{F}(\vec{x}_1)}{m} \right) \cdot \Delta t \tag{51}$$

Der interessanteste Spezialfall dieses Bewegungstyps ist die Keplerbewegung, also die Bewegung eines Satelliten der Masse m im Gravitationsfeld einer Zentralmasse M. Dessen numerische Lösung sowie grafische Darstellung wird unter anderem im nachfolgenden Kapitel noch genauer erläutert.[65]

4.5. Verallgemeinerungen

Sind die Schülerinnen und Schüler bereits genauer vertraut mit dem Lösungsalgorithmus (47) und (48), so besteht die Möglichkeit, diesen noch weiter zu verallgemeinern. Eine solche mögliche Verallgemeinerung stellt die Einbeziehung von Kräften dar, welche nicht ausschließlich vom Ort, sondern auch von der entsprechenden Geschwindigkeit abhängen. Gemeint sind hier also Kräfte der Form $F \equiv F(x, v)$. Zu beachten ist jedoch, dass nun der 2. Schritt, also die Mittelwertbildung, zur Verbesserung der Lösungsformel nicht mehr analog angewendet werden kann. Grund dafür ist, dass die Kraft $F(x_1, v_1)$ am Ende des jeweiligen Zeitintervalls die Kenntnis von v_1 voraussetzt. Alternativ kann stattdessen der Mittelwert der Anfangskraft $F(x_0, v_0)$ und der Kraft am Ende des Intervalls $F(x_1, v_0)$ gebildet werden. Somit ergeben sich folgende numerische Lösungsformeln:[66]

---

[64] vgl. ebd.
[65] vgl. ebd.
[66] vgl. ebd.: S.16

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{F(x_0, v_0)}{2 \cdot m} \cdot (\Delta t)^2 \tag{52}$$

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F(x_0, v_0)}{m} + \frac{F(x_1, v_0)}{m} \right) \cdot \Delta t \tag{53}$$

Wichtige Vertreter dieses Typs sind jene Bewegungen, die unter dem Einfluss einer Reibungskraft stattfinden. Sollte die Reibung jedoch verschwindend klein sein, reduzieren sich die Formeln wieder auf den bekannten eindimensionalen Lösungsalgorithmus (47) und (48). Zwei Beispiele für Bewegungen unter dem Einfluss von Reibung sind fallende Körper mit Einbeziehung des Luftwiderstands sowie gedämpfte Schwingungen.[67]

Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich, wenn eine äußere Kraft, welche nur von der Zeit abhängig ist, in die Überlegungen mit einbezogen wird. Somit wird eine Kraft der Form $F(x, v, t)$ betrachtet. Um also den äußeren Kraftterm mit zu berücksichtigen, muss dieser in den Formeln (52) und (53) mit eingebaut werden. Dafür ist aber die Kenntnis von t nötig. Folglich muss also die Anzahl der bisher gemachten Zeitschritte mitgezählt werden. Dieses Mitzählen stellt keinen neuen Aspekt dar, wurde es doch bereits in den vorangegangenen Methoden mittels Tabellenkalkulation (siehe Tabelle 1) durchgeführt. Somit ergibt sich für den Näherungsalgorithmus, in dem der Mittelwert auch für die äußere Kraft gebildet wird:[68]

$$t_1 = t_0 + \Delta t \tag{54}$$

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{F(x_0, v_0, t_0)}{2 \cdot m} \cdot (\Delta t)^2 \tag{55}$$

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F(x_0, v_0, t_0)}{m} + \frac{F(x_1, v_0, t_1)}{m} \right) \cdot \Delta t \tag{56}$$

[67] vgl. ebd.
[68] vgl. ebd.: S.17

Beispiel für solch einen Bewegungstyp ist die erzwungene und gedämpfte Schwingung. Mit dieser Methode lassen sich Erscheinungen wie die Resonanz bzw. die Resonanzkatastrophe grafisch darstellen und analysieren.[69]

Eine komplett andere Verallgemeinerung erhält man bei der Erzeugung eines Phasendiagramms. Mit dem Begriff *Phasenraum* wird die Menge aller (x,p)-Paare bezeichnet, welche ein mechanisches System annehmen kann. Die Variable x steht für den Ort und p für den jeweiligen Impuls des Teilchens. Letzterer ist durch $p = m \cdot v$ definiert. Eine Kurve im Phasenraum ergibt sich somit aus einem konkreten Bewegungsablauf, und dessen grafische Darstellung wird *Phasendiagramm* genannt. Dieses stellt ein wichtiges Hilfsmittel bei der Analyse von Bewegungen dar. So zeigt zum Beispiel das Phasendiagramm einer gedämpften Schwingung den Energieverlust durch die Reibungskraft in Form einer Spirale, wohingegen bei verschwindend kleiner Reibung eine Ellipse entsteht.[70]

[69] vgl. ebd.
[70] vgl. ebd.

5. Praktische Umsetzung des Lösungsalgorithmus

Im folgenden Kapitel wird die praktische Umsetzung des numerischen Lösungsalgorithmus mit Hilfe von GeoGebra näher erläutert. Hierfür wird einerseits die Tabellenkalkulation genauer erklärt und andererseits die daraus resultierenden Daten grafisch mittels GeoGebra-Applets dargestellt. In diesem Abschnitt wird anhand des Beispiels des harmonischen Oszillators gezeigt, wie die konkrete Umsetzung aussehen kann.

5.1. Tabellenkalkulation

Das verbesserte numerische Näherungsverfahren (47) und (48) kann sehr leicht mit Hilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen wie Excel oder GeoGebra auf verschiedene Bewegungen angewendet werden. Die jeweiligen Zeiten, Orte und Geschwindigkeiten werden pro Schritt nebeneinander in eine Tabelle geschrieben. Somit ergeben sich drei Datenspalten, die später zur Visualisierung der Bewegungen verwendet werden. Die Näherungsformeln (47) und (48) müssen praktischerweise nur einmal eingegeben werden. Für alle weiteren Schritte werden die Formeln lediglich in die darunterliegenden Zeilen kopiert. Als Beispiel sei hier abermals der harmonische Oszillator genannt. Als Startwerte wurden folgende Einstellungen gewählt: $\Delta t = 0{,}1s$, $x_0 = 3m,\ v_0 = 0m/s,\ k = 20\ kg/s^2$ und $m = 20\ kg$. Somit ergibt sich folgendes Verhältnis zwischen Federkonstante und Masse von: $k/m = 1$. Setzt man die genannten Startwerte in den Lösungsalgorithmus ein und führt diesen viele Male hintereinander aus, so erhält man die Wertetabelle (siehe Tabelle 2).[71]

[71] vgl.ebd.: S.9

Zeit	Auslenkung	Geschwindigkeit
0	3	0
0.1	2.985	-0.29925
0.2	2.94015	-0.5955075
0.3	2.8658985	-0.885809925
0.4	2.762988015	-1.16725425075
⋮	⋮	⋮
3.0	-2.97050496040477	-0.419118156979837
3.1	-2.99756425130073	-0.120714696394562
3.2	-2.99464789968368	0.178895911154658
3.3	-2.96178506906979	0.476717559592332
⋮	⋮	⋮
6.1	2.95118631841386	0.538305736289202
6.2	2.99026096045071	0.241233372345973
6.3	2.99943299288305	-0.0582513253207150
6.4	2.97861069538657	-0.357153509734196
⋮	⋮	⋮

Tabelle 2: Wertetabelle harmonischer Oszillator

Die Veranschaulichung der Zahlenwerte in einer Tabelle ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern den zugrunde liegenden schrittweisen Vorgang genauer zu erfassen. Diese Darstellung kann wie eine Wertetabelle, bekannt aus dem Mathematikunterricht, aufgefasst und interpretiert werden. Selbst aus dieser großen Vielzahl an Daten können die Lernenden mit etwas Übung signifikante Aussagen über die Bewegung treffen. So wird zum Beispiel deutlich, dass die Auslenkung x in regelmäßigen Intervallen zwischen dem positiven und negativen Startwert, sprich 3 und -3, hin- und herwechselt. Somit wird alleine aus der Wertetabelle klar, dass es sich um einen periodischen Vorgang handeln muss. Selbstwenn diese Informationen aus der Wertetabelle ersichtlich sind, gestaltet sich das Analysieren solcher großen Datenmengen für Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen sehr schwierig. Wesentlich aussagekräftiger ist jedoch die grafische Visualisierung der Daten in einem Diagramm. Durch die Darstellung der ersten beiden Spalten der Wertetabelle mittels GeoGebra erhält man näherungsweise den Graphen der Funktion $x \equiv x(t)$. Dieser ist in Abbildung (2) dargestellt. Die konkrete Erstellung solcher GeoGebra-Applets wird im nachfolgenden Kapitel näher beleuchtet.[72]

[72] vgl. ebd.

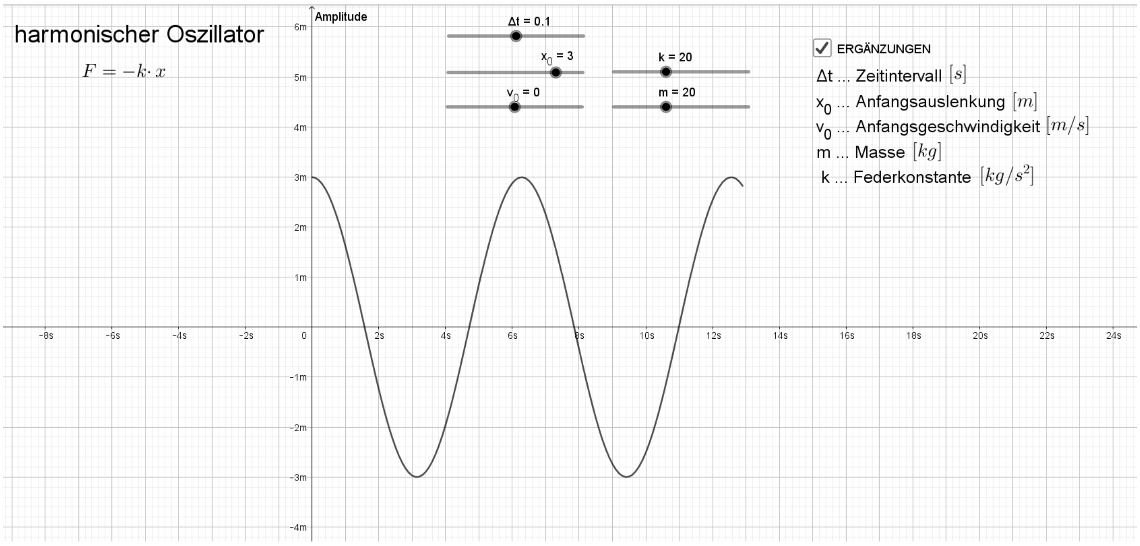

Abbildung 2: Darstellung der Wertetabelle des harmonischen Oszillators in GeoGebra

Wie in der Abbildung erkennbar ist, ermöglicht die Verwendung von Schiebereglern das Variieren der einzelnen Startwerte. Somit können die Schülerinnen und Schüler selbstständig die Bewegungen auswerten und Einflussfaktoren auf die Bewegung analysieren. Sowohl durch die Zahlen in der Wertetabelle als auch aus der Darstellung in der Grafik wird die enorme Genauigkeit des Verfahrens sichtbar. Die exakte Lösung der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators berechnet sich mittels $x(t) = \cos(t)$. Selbst nach einer vollen Periode ($t = 2\pi \approx 6{,}3$) bewegt sich der Fehler der näherungsweisen bestimmten numerischen Lösung weit unterhalb der Promillegrenze.[73]

5.2. Erstellung der GeoGebra-Applets

Die Erstellung der GeoGebra-Applets wird exemplarisch im nächsten Abschnitt anhand des harmonischen Oszillators schrittweise visualisiert und erklärt. Je nachdem, wie vertraut die Lernenden mit dem Thema Tabellenkalkulation beziehungsweise mit dem Arbeiten mit GeoGebra sind, kann die nachfolgende Erläuterung auch als Basis für eine Anleitung für die Schülerinnen und Schüler herangezogen werden.

[73] vgl. ebd.: S.9f

Falls die Lernenden nicht besonders oder vielleicht gar nicht im Umgang mit GeoGebra geübt sind, empfiehlt es sich zu Beginn der Einfachheit halber auf Schieberegler zu verzichten. Für die jeweiligen Größen werden konstante Werte eingegeben und die Lernenden können anhand der Diagramme prinzipielle Aussagen über die Art der Bewegung treffen, ohne dabei bestimmte Variablen zu verändern. Sollte das der Fall sein, so kann der 1. Schritt beim Erstellen der GeoGebra-Applets übersprungen werden.

1. Schritt: Schieberegler erstellen

Zu Beginn müssen für alle Größen, die man später verändern möchte, Schieberegler erstellt werden (siehe Abbildung 3). Die genauen Einstellungen können im Nachhinein unter dem Punkt Eigenschaften vorgenommen werden. Wichtig ist, dass man sich die Benennung der einzelnen Schieberegler gut überlegt, da man genau diese Bezeichnungen in den Formeln später verwenden muss.

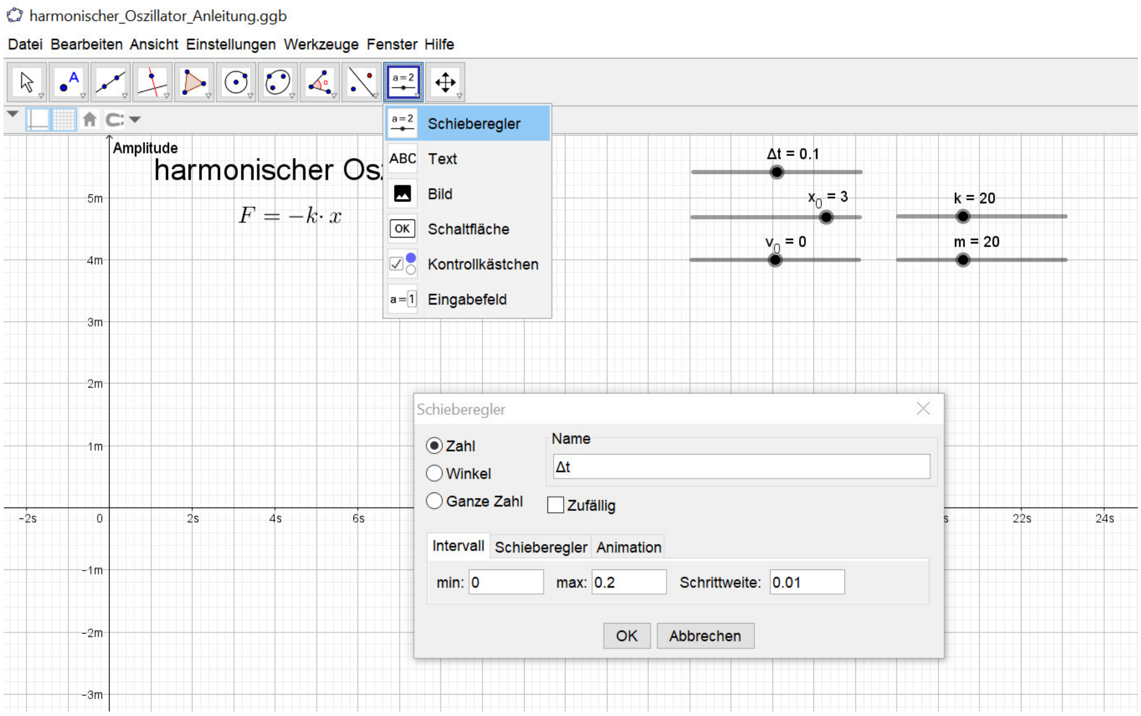

Abbildung 3: Erstellung von Schiebereglern

2. Schritt: Formeln eingeben

Mit dem Verzicht der Erstellung von Schiebereglern startet man erst an dieser Stelle, also mit dem 2. Schritt. Durch das Wechseln in die Tabellen-Ansicht ist es möglich, die Formeln für die Tabellenkalkulation einzugeben (siehe Abbildung 4). Hierbei ist es hilfreich, wenn man die erste Zeile mit den Bezeichnungen der jeweiligen Spalte ausfüllt. Danach erfolgt die Eingabe der verwendeten Formeln. Die genauen Eingaben sind in der Tabelle (3), für die Verwendung von Schiebereglern und in Tabelle (4) ohne den Einsatz von Schiebereglern aufgelistet. Bei der Eingabe in Tabelle (3) ist zu beachten, dass genau die gleichen Bezeichnungen verwendet werden müssen, die auch die Schieberegler tragen.

	A	B	C
1	Zeit	Auslenkung	Geschwindigkeit
2	0	=x_0	=v_0
3	=A2 + Δt	=B2+C2*Δt -1/2*k/m*B2*Δt²	=C2 -1/2*k/m*(B2+B3)*Δt

Tabelle 3: Einzugebende Formeln mit Verwendung von Schieberegler

	A	B	C
1	Zeit	Auslenkung	Geschwindigkeit
2	0	3	0
3	=A2 + 0,1	=B2+C2*0,1-1/2*1*B2*0,1²	=C2 -1/2*1*(B2+B3)*0,1

Tabelle 4: Einzugebende Formeln ohne Verwendung von Schieberegler

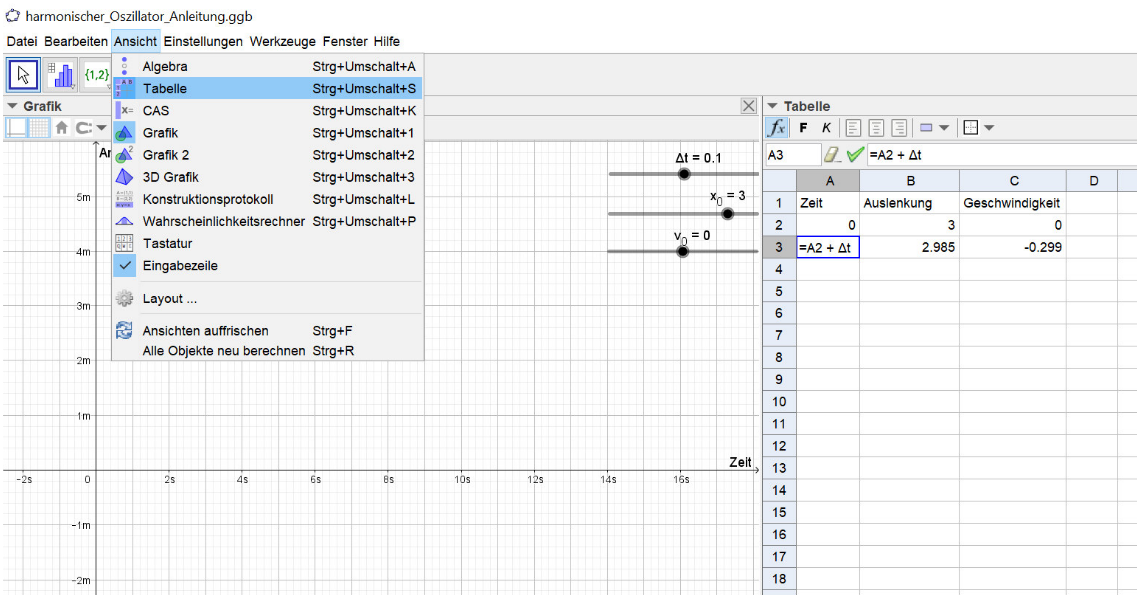

Abbildung 4: Tabelle erstellen

3. Schritt: Formeln kopieren

Sind alle Formeln eingegeben, markiert man die betreffende Zeile. Danach klickt man auf das rechte untere Quadrat und zieht die Markierung mit der gedrückt gehaltenen Maustaste nach unten (siehe Abbildung 5). Somit werden die Formeln in die darunterliegenden Zeilen kopiert und die Werte werden jeweils berechnet.

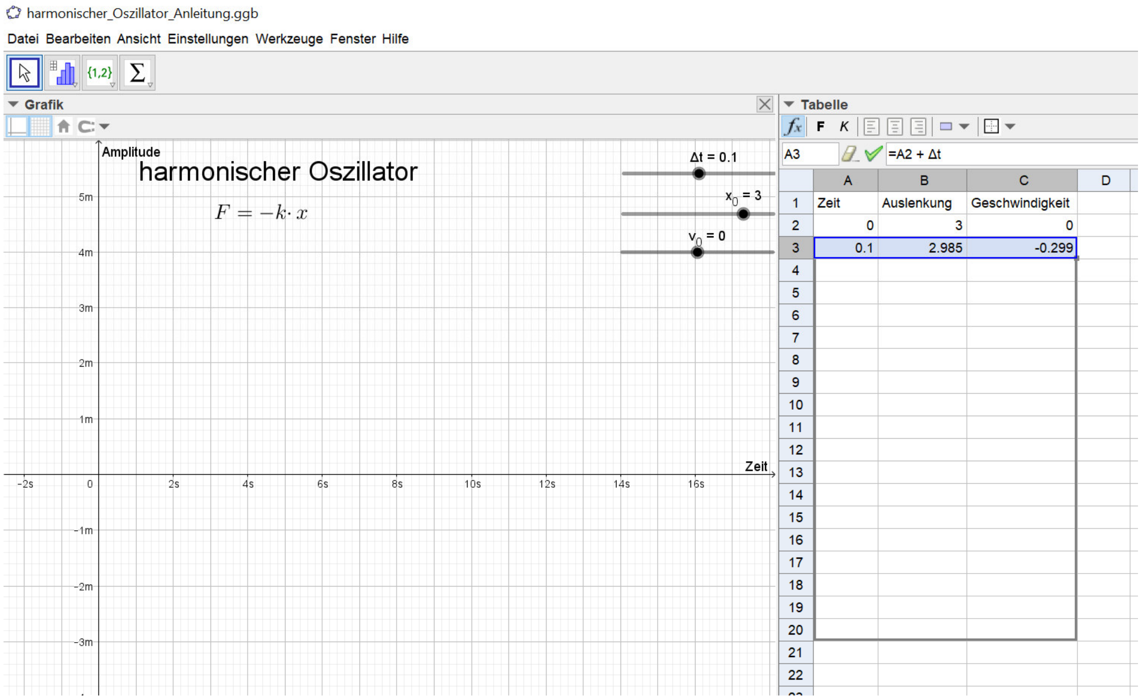

Abbildung 5: Formeln kopieren

4. Schritt: Darstellung der Daten

Für die Visualisierung der Werte stehen prinzipiell zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Einerseits ist die Darstellung der Daten mittels Polygonzug möglich. Andererseits können diese durch eine Liste von Punkten visualisiert werden. In beiden Fällen werden die betreffenden Spalten, welche dargestellt werden sollen, markiert und mittels Rechtsklick das Register Erzeugen ausgewählt. In der Abbildung (6) ist die Anleitung für das Erstellen eines Polygonzugs und in Abbildung (7) die Erstellung einer Liste von Punkten visualisiert.

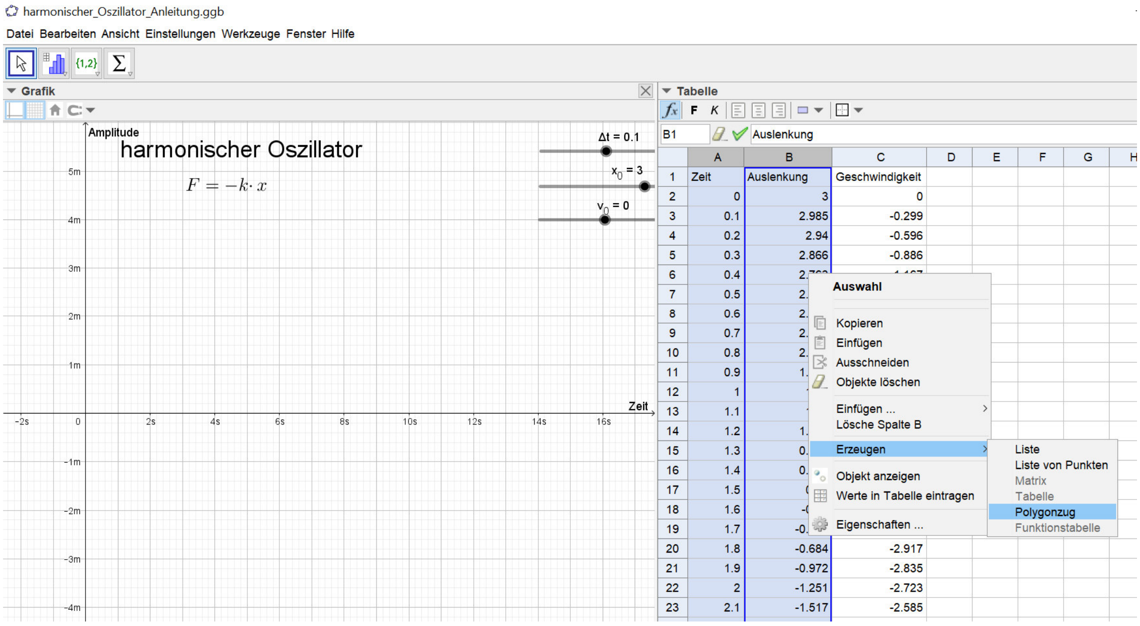

Abbildung 6: Polygonzug erzeugen

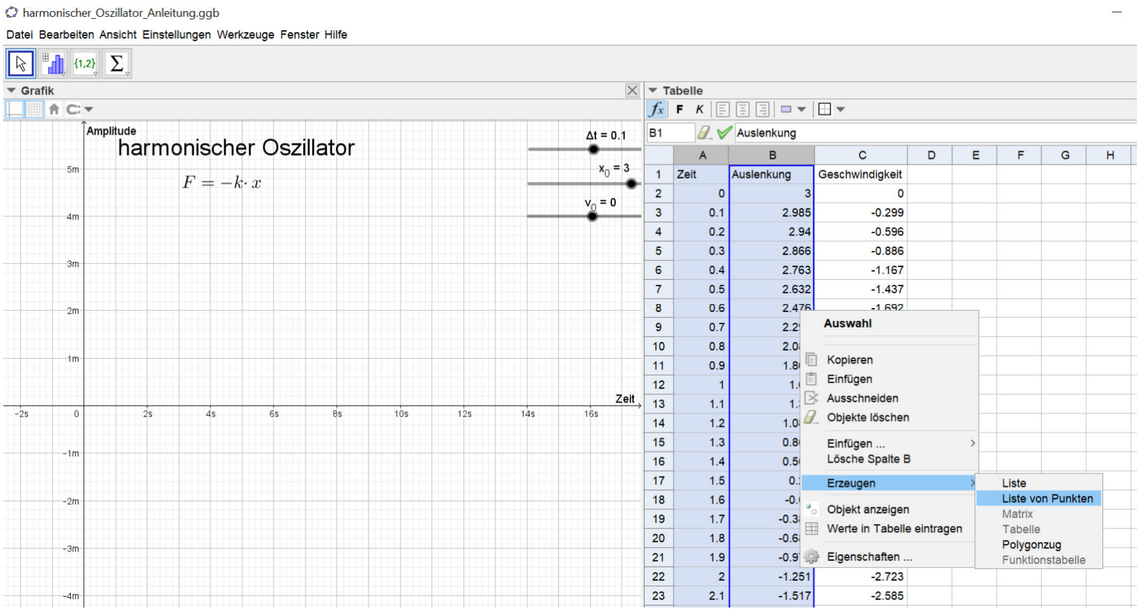

Abbildung 7: Liste von Punkten erzeugen

5. Schritt: Formatierung

In der Abbildung (8) ist erkennbar, dass die einzelnen Datenpunkte zusätzlich eingezeichnet sind. Möchte man lediglich den Graphen der Funktion abgebildet haben, muss man in die Algebra Ansicht wechseln. Dies wird in der Abbildung (9) bildhaft gemacht.

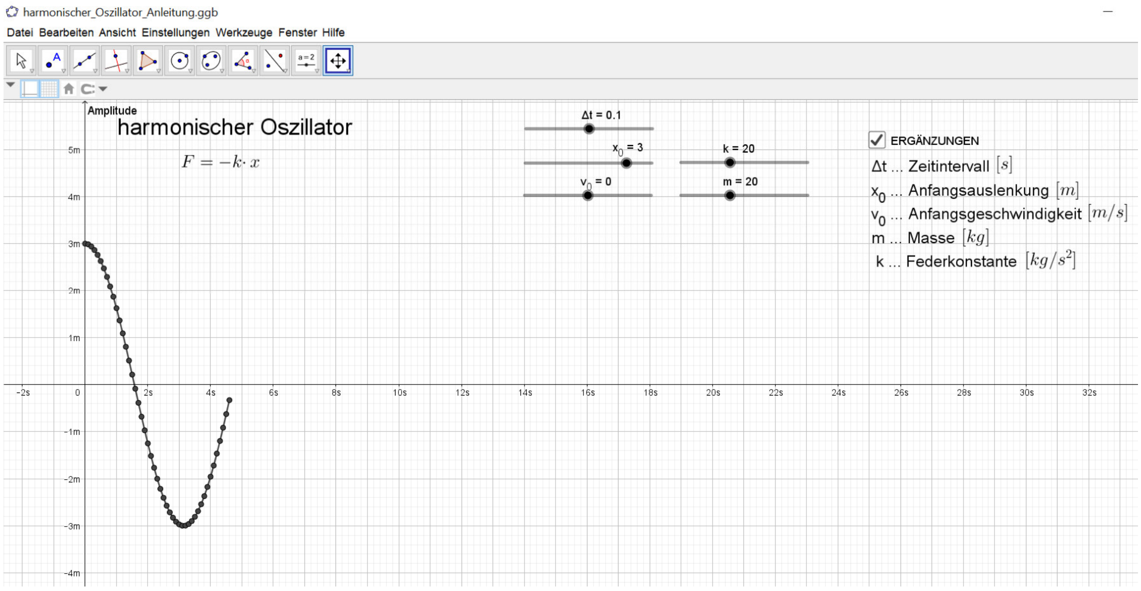

Abbildung 8: Bewegung des harmonischen Oszillators

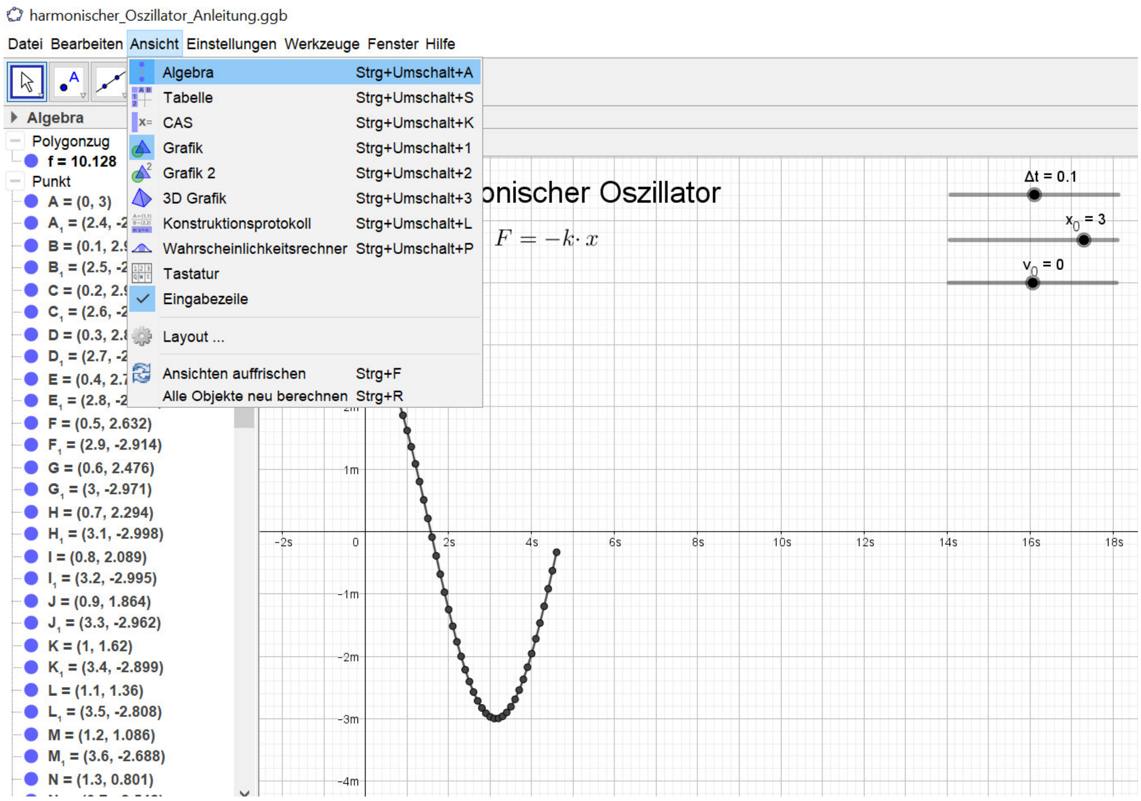

Abbildung 9: Wechsel in die Algebra-Ansicht

Mittels der Markierung aller Punkte und eines Rechtklicks können alle Objekte gleichzeitig ausgeblendet werden, gezeigt in Abbildung (10).

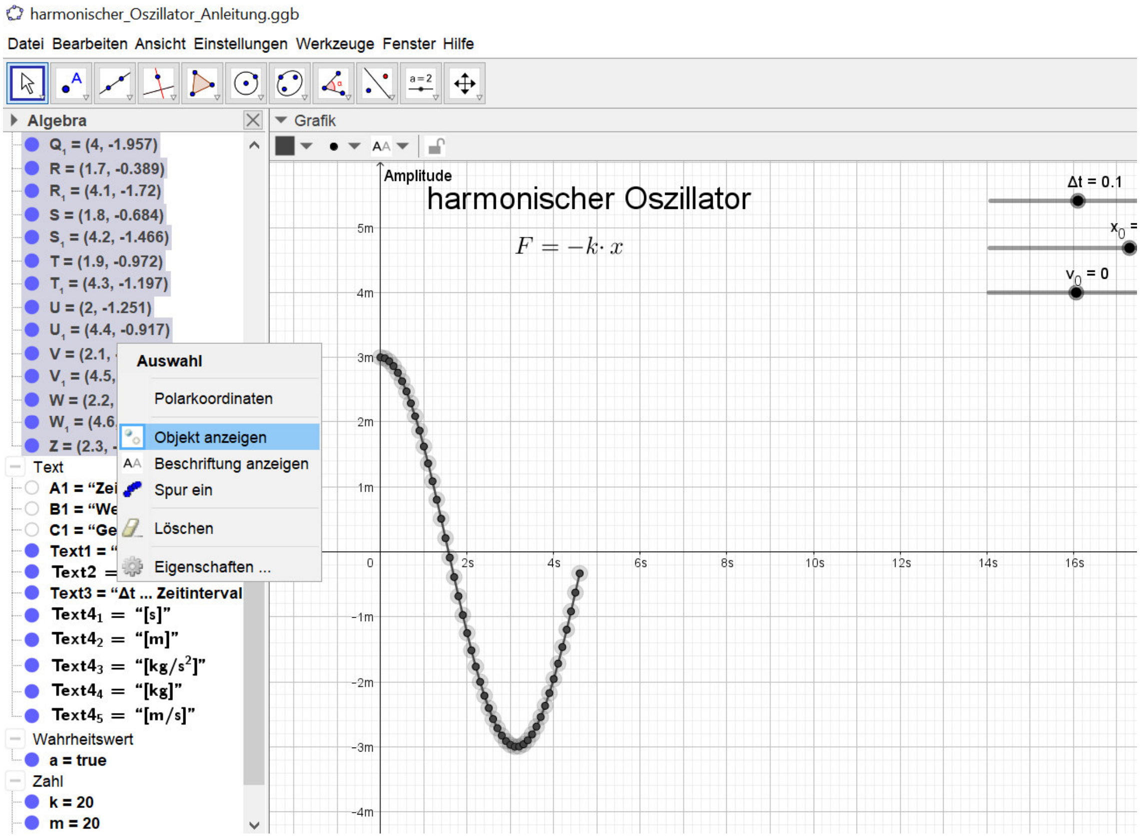

Abbildung 10: Objektanzeige ausschalten

Hat man sich beim Visualisieren der Datenpunkte für eine Liste von Punkten entschieden, muss man in der Algebra-Ansicht eine Optimierung vornehmen. Dieses Mal werden alle Punkte markiert und die Beschriftungen im Sinne einer besseren Übersicht ausgeschalten. Dieser Vorgang wird in Abbildung (11) visualisiert.

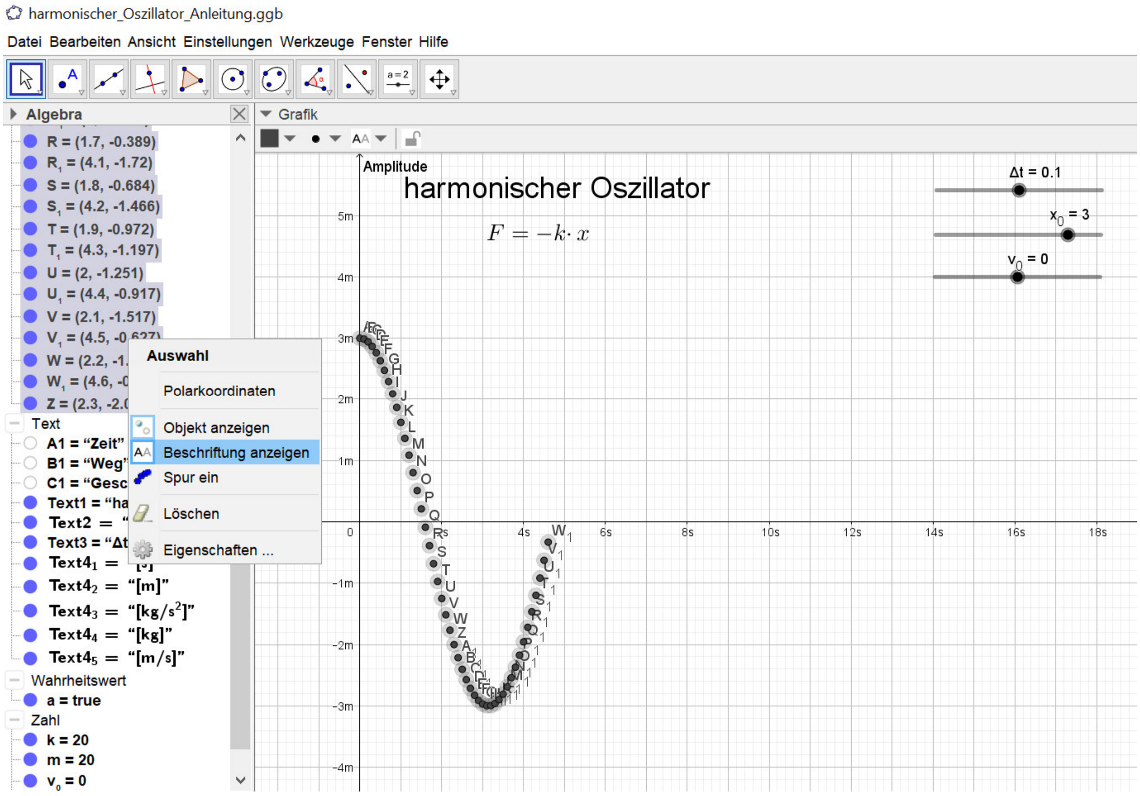

Abbildung 11: Objektbeschriftung ausschalten

Somit ist das GeoGebra-Applet erstellt und funktionsfähig. Durch die Schieberegler lassen sich die Anfangsdaten verändern und die jeweiligen Auswirkungen auf die Bewegung analysieren. Je nach Wunsch können noch etwaige Formatierungen vorgenommen werden. Diese haben aber keine Auswirkungen auf die Funktionsweise der Applets. Außerdem empfiehlt es sich, mittels Textfelder den Namen der jeweiligen Bewegung, die verwendete Kraftformel sowie etwaige Ergänzungen zu den Schiebereglern vorzunehmen. Das fertige GeoGebra-Applet ist in Abbildung (12) gezeigt. Die Schülerinnen und Schüler können nun mit Hilfe der Schieberegler Veränderungen vornehmen und die Auswirkungen auf die Bewegung analysieren. Außerdem können in der Tabellenansicht die einzelnen Rechenschritte von den Lernenden nachvollzogen werden.

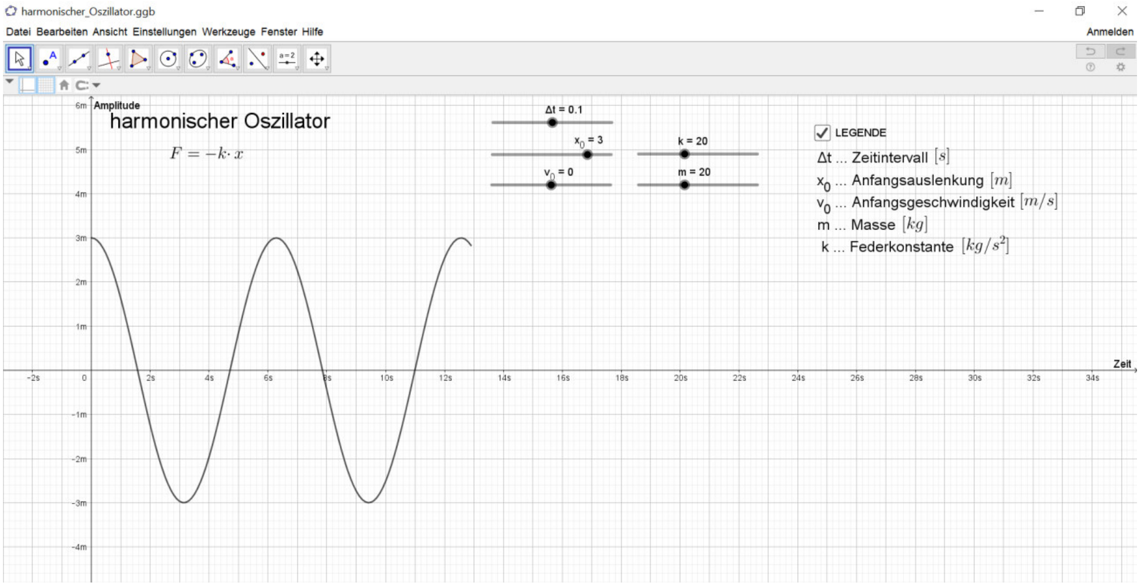

Abbildung 12: GeoGebra-Applet des harmonischen Oszillators

6. GeoGebra-Applets

Im nachfolgenden Kapitel werden die erstellten GeoGebra-Applets vorgestellt. Hierbei werden unter anderem die verwendeten Formeln, die Einstellungen der Schieberegler, sowie die Funktionsweisen der Applets näher beleuchtet. Außerdem werden bei den einzelnen Bewegungen Spezialfälle beziehungsweise Grenzfälle vorgestellt. Alle GeoGebra-Applets, sowie diese Diplomarbeit stehen kostenlos unter https://bettinasteindl.wordpress.com/materials/ zum Download zur Verfügung.

6.1. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Wie in Kapitel (4.1) bereits näher erläutert, handelt es sich hierbei um eine eindimensionale Bewegung in einem homogenen Schwerefeld. Betrachtet wird ein frei fallender Körper nahe der Erdoberfläche. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Durch Einsetzen der Gravitationskraft $F = m \cdot g$ in den Lösungsalgorithmus (47) und (48) erhält man die folgenden zwei Gleichungen:[74]

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \tag{57}$$

$$v_1 = v_0 + g \cdot \Delta t \tag{58}$$

Schieberegler

In der Tabelle (5) sind mögliche Schiebereglereinstellungen zusammengefasst. Hierbei bezeichnet Δt die Länge der Zeitintervalle, x_0 den Anfangsort, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und g die Schwere- oder Fallbeschleunigung. Letztere ist deshalb so groß gewählt, damit auch Fallbewegungen auf anderen Planeten wie zum Beispiel dem Jupiter dargestellt werden können.

	Intervall		
Bezeichnung	min.	max.	Schrittweite
Δt	0	2	0,001
x_0	0	1000	100
v_0	0	50	5
g	0	25	0,01

Tabelle 5: Schiebereglereinstellungen bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

[74] vgl. Embacher (2010): S.26

Diese Formeln (57) und (58) werden in die Tabelle in GeoGebra eingegeben und die Tabellenkalkulation wird durchgeführt. Durch die Darstellung des Orts mit der Zeit ergibt sich folgender Graph.

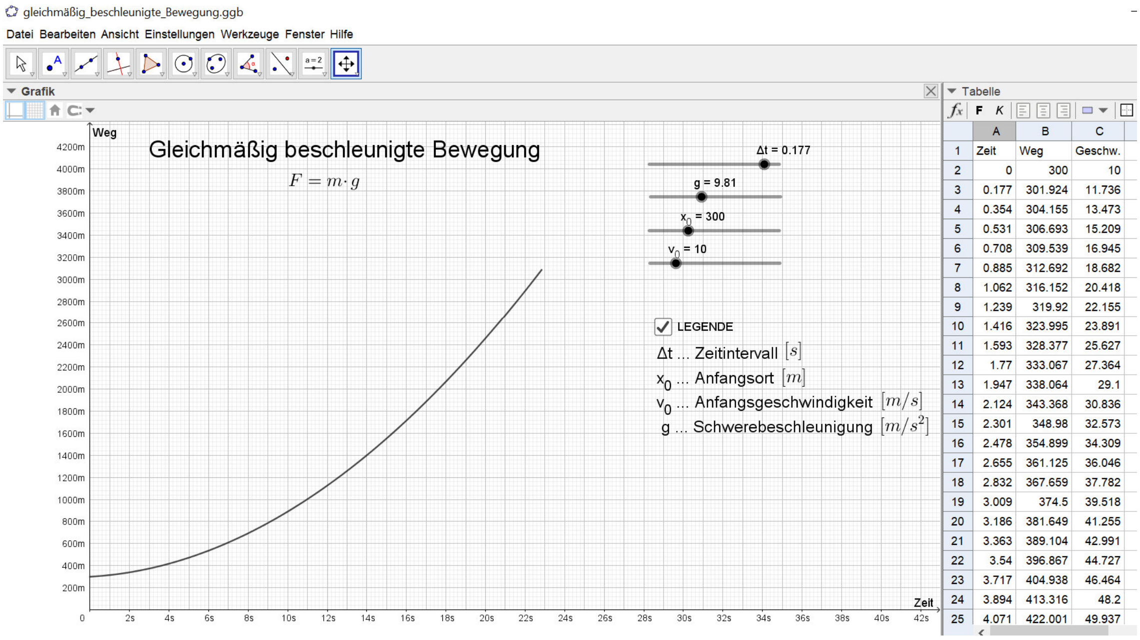

Abbildung 13: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die Schülerinnen und Schüler können selbstständig die einzelnen Startwerte verändern und die jeweiligen Auswirkungen auf die Bewegung analysieren. Die Lernenden sollen erkennen, dass die Veränderung des Anfangsorts eine Verschiebung auf der y-Achse bewirkt. Außerdem kann durch die Erhöhung der Fallbeschleunigung und der Anfangsgeschwindigkeit eine größere Falltiefe in gleicher Zeit erzielt werden.

Eine weitere Einsatzmöglichkeit dieses GeoGebra-Applets ist das Lösen von Rechenbeispielen. Hierfür werden exemplarisch zwei Aufgaben genannt. Die Schülerinnen und Schüler können zuerst die Schieberegler je nach Angabe einstellen und anschließend die Ergebnisse direkt aus der Tabelle entnehmen.

- 1990 wurde in Bremen ein Fallturm für wissenschaftliche Experimente gebaut. Dessen reine Fallhöhe beträgt 110 m. Bestimme die Fallzeit und die Endgeschwindigkeit einer „Fallkapsel“.[75] (Lösung: v ≈ 47 m/s, t ≈ 4,7 s)

  Die Lösung dieser Aufgabe kann sehr schnell mit dem GeoGebra-Applet erfolgen. Der Anfangsort und die Anfangsgeschwindigkeit werden auf Null gesetzt. In der Tabelle müssen die Schülerinnen und Schüler dann nur die Zeit und die Geschwindigkeit für einen Weg von 110 m ablesen.

- Die Fallbeschleunigung am Mars beträgt 3,72 m/s^2 und am Jupiter 24,79 m/s^2. Ermittle die Falltiefe am Mars, am Jupiter und auf der Erde für einen Gegenstand der 2 Sekunden lang fällt.[76] (Lösung: Mars: 7,44 m; Jupiter: 49,58 m; Erde: 19,6 m)

  Auch hier erfolgt die Lösung mittels der Wertetabelle. Der Anfangsort und die Anfangsgeschwindigkeit sind wieder Null. Mit dem Schieberegler g werden die einzelnen Fallbeschleunigungen eingestellt und in der Tabelle die dazugehörigen Falltiefen abgelesen.

6.2. Harmonischer Oszillator

Hierbei handelt es sich abermals um eine eindimensionale Bewegung. Dieses Mal wird die harmonische Kraft $F = -k \cdot x$ in den Lösungsalgorithmus (47) und (48) eingesetzt. Daraus ergeben sich folgenden zwei Näherungsformeln: [77]

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t - \frac{k \cdot x_0}{2 \cdot m} \cdot (\Delta t)^2 \tag{59}$$

$$v_1 = v_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{m} \cdot (x_0 + x_1) \cdot \Delta t \tag{60}$$

[75] vgl. Nussbaumer (2016): S.26
[76] vgl. Apolin (2007): S.64
[77] vgl. Embacher (2010): S.29

Schieberegler

Die Tabelle (6) zeigt die Schiebereglereinstellungen für den harmonischen Oszillator. Hierbei bezeichnet Δt wiederum die Länge der Zeitintervalle, x_0 die Anfangsauslenkung, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, k die Federkonstante und m die Masse.

	Intervall		
Bezeichnung	min.	max.	Schrittweite
Δt	0	0,2	0,001
x_0	-5	5	1
v_0	-5	5	1
k	1	50	1
m	1	50	1

Tabelle 6: Schiebereglereinstellungen beim harmonischen Oszillator

Durch die Eingabe der Formel (59) und (60) in die Tabelle von GeoGebra und der anschließend durchgeführten Tabellenkalkulation ist es abermals möglich, die Bewegung näherungsweise grafisch zu veranschaulichen. In Abbildung (14) ist das GeoGebra-Applet für den harmonischen Oszillator dargestellt.

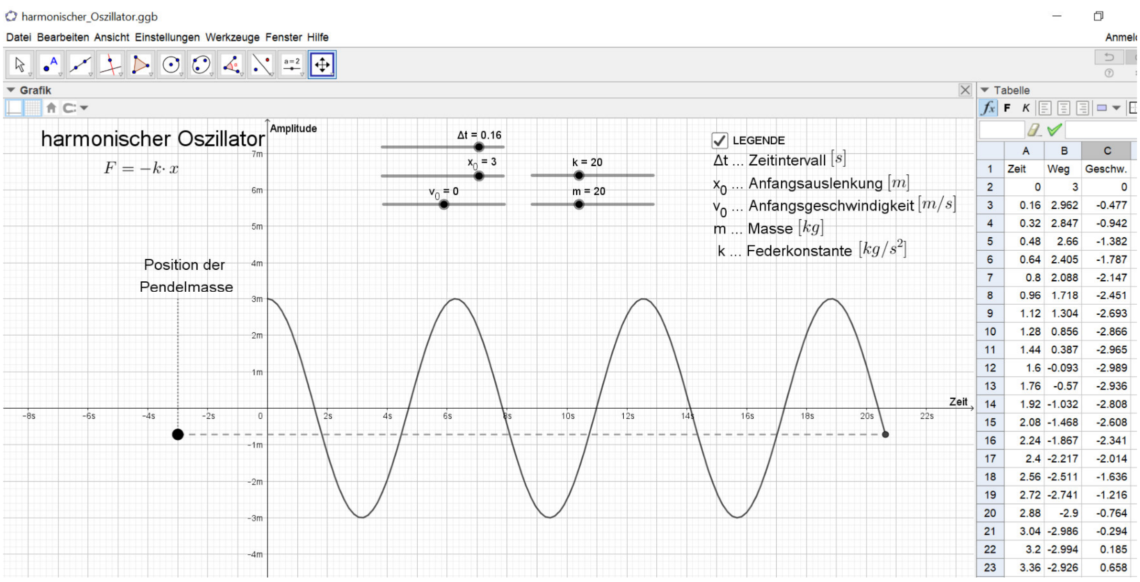

Abbildung 14: Harmonischer Oszillator - Polygonzug

Links von der y-Achse ist die jeweilige Position der Pendelmasse aufgetragen. Die Schülerinnen und Schüler können diese laufend verfolgen. Durch Rechtsklick auf den Schieberegler Δt kann man eine automatische Animation aktivieren.

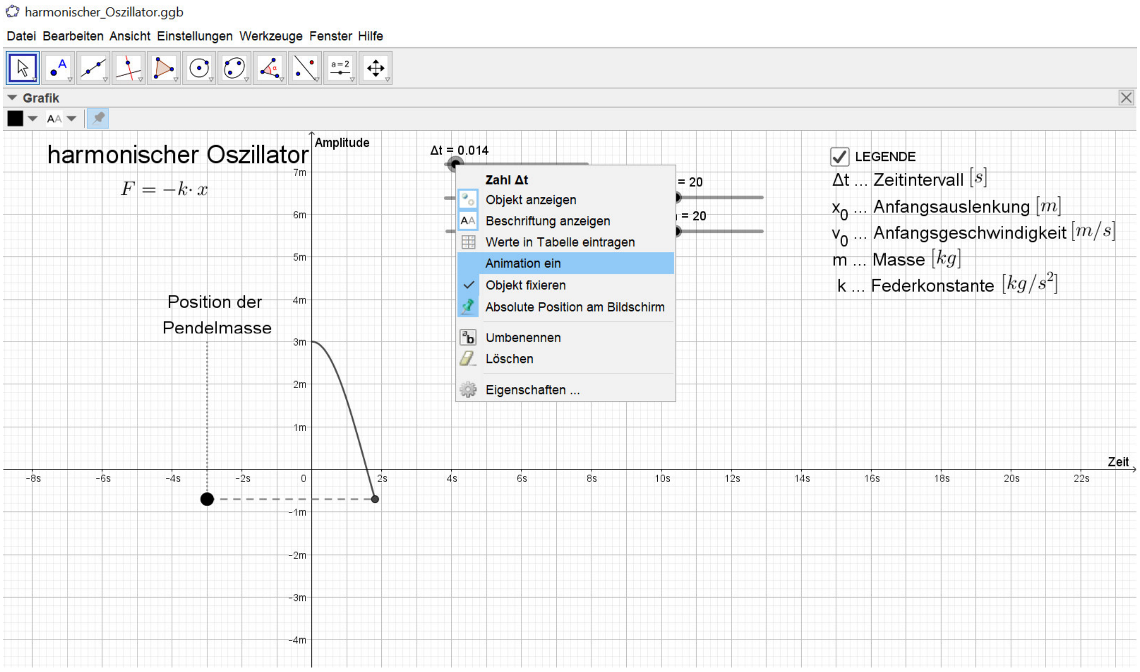

Abbildung 15: Schieberegler automatisch animieren

Das Zeitintervall wird jetzt von allein schrittweise vergrößert und somit nimmt die Gesamtzeit zu. Deshalb wird die Bewegung über einen immer längeren Zeitraum dargestellt. Die Lernenden können die aktuelle Position der Pendelmasse links verfolgen. Dadurch wird es für die Schülerinnen und Schüler einfacher nachzuvollziehen, dass die periodische Darstellung der Bewegung mit der Zeit einer Auf- und Abbewegung der Pendelmasse entspricht.

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit, die sich bei dieser Bewegung anbietet, ist das Punktdiagramm, dargestellt in Abbildung (16). Auch hier können die Schülerinnen und Schüler punktweise die Position der Pendelmasse verfolgen. Darüber hinaus ermöglicht es den Lernenden die tatsächlich schwingende Masse links zu verfolgen.

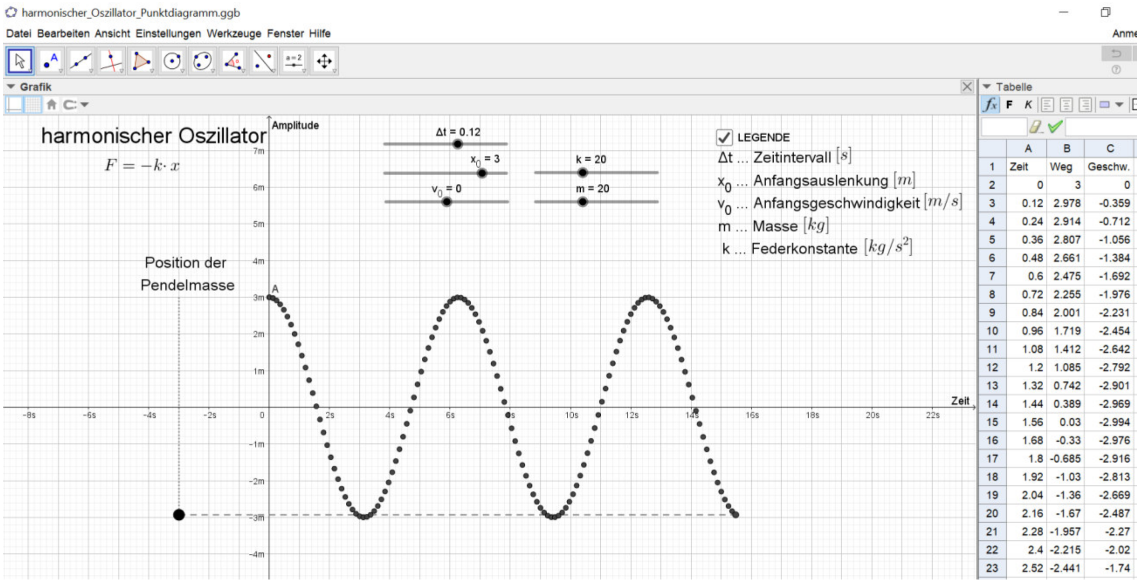

Abbildung 16: Harmonischer Oszillator - Punktdiagramm

Unabhängig von der Auswahl der beiden Darstellungsmöglichkeiten, können die Schülerinnen und Schüler eigenständig die einzelnen Startwerte verändern und die jeweiligen Einflüsse auf die Bewegung analysieren. Die Lernenden sollen erkennen, dass x_0 die Startposition, also die Anfangsauslenkung, der Pendelmasse angibt. Die harmonische Auf- und Abbewegung verläuft immer zwischen der positiven und negativen Anfangsauslenkung hin und her.

6.3. Mathematisches Pendel

Beim mathematischen Pendel handelt es sich abermals um eine eindimensionale Bewegung. Die hierbei wirkende Kraft $F(x) = -\frac{m \cdot g}{L} \cdot sin\,(x)$ wird in den Lösungsalgorithmus eingesetzt und dadurch ergeben sich die beiden nachfolgenden Näherungsformeln.[78]

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin\,(x_0) \cdot (\Delta t)^2 \tag{61}$$

$$v_1 = v_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{L} \cdot [\sin(x_0) + \sin(x_1)] \cdot \Delta t \tag{62}$$

[78] vgl. Embacher (2008): S.3

Schieberegler

In der Tabelle (7) sind mögliche Schiebereglereinstellungen beim mathematischen Pendel angeführt. Wie bereits zuvor steht die Bezeichnung Δt für die Länge der Zeitintervalle. Weiters bezeichnet x_0 den Anfangsauslenkungswinkel, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, g die Schwerebeschleunigung und L die Länge des masselosen Stabes. Die Masse m wird erst bei der Berechnung des Impulses verwendet, jedoch wird sie an dieser Stelle bereits genannt und im GeoGebra Applet von Beginn an berücksichtigt.

	Intervall		
Bezeichnung	min.	max.	Schrittweite
Δt	0	0,1	0,001
x_0	-5	5	0,01
v_0	-5	5	0,1
g	0	25	0,01
L	1	10	1
m	1	10	1

Tabelle 7: Schiebereglereinstellungen beim mathematischen Pendel

Mittels der Tabellenkalkulation in GeoGebra werden mit Hilfe der Formel (61) und (62) der Ort und die Geschwindigkeit schrittweise berechnet. Die grafische Darstellung ist in der folgenden Abbildung (17) veranschaulicht.

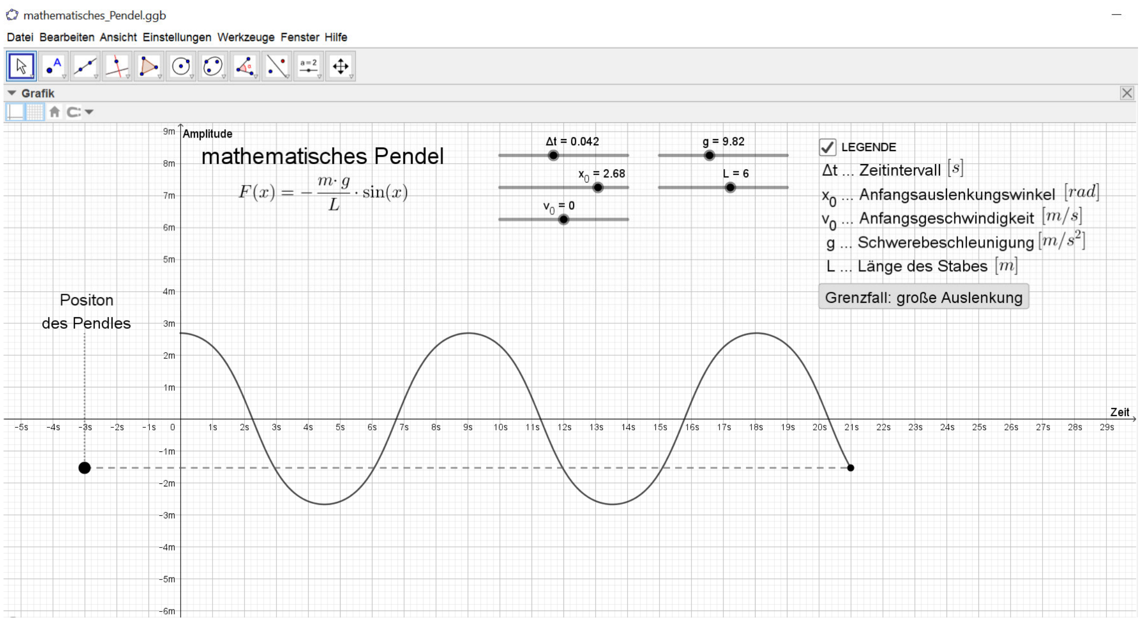

Abbildung 17: Mathematisches Pendel

Die Schülerinnen und Schüler können abermals durch das Betätigen der Schieberegler die Anfangseinstellungen der verschiedenen Größen verändern. Hier wird ebenfalls links von der y-Achse die aktuelle Position des Pendels dargestellt. Die Lernenden können selbstständig die Auswirkungen der einzelnen Größen auf die Bewegung analysieren.

Durch das Betätigen der Schaltfläche „Grenzfall: große Auslenkung“ wird der Anfangsauslenkungswinkel automatisch auf einen Wert von 3,14 gestellt. Hierbei handelt es sich um eine sehr große Auslenkung. Das bedeutet der Auslenkungswinkel ist nahezu π. Die daraus resultierende Bewegung ist in Abbildung (18) dargestellt.

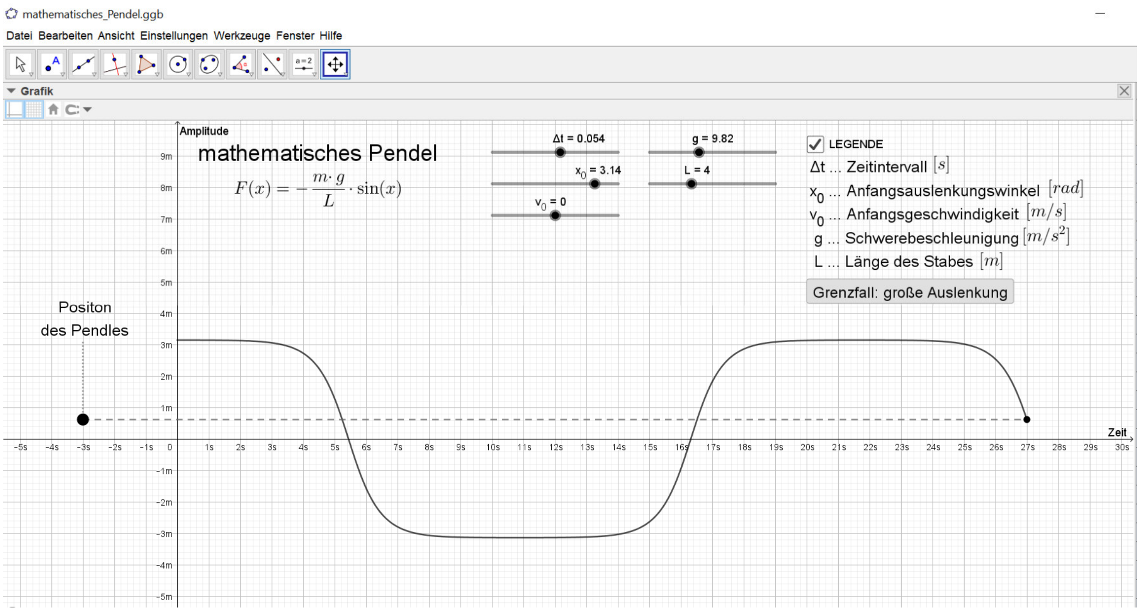

Abbildung 18: Mathematisches Pendler für große Auslenkung

Die entstehende Bewegung ist für die Schülerinnen und Schüler im ersten Moment vielleicht etwas überraschend. Es zeigt sich nämlich, dass das Pendel zuerst lange Zeit in der Anfangsposition bleibt und diese nur ganz langsam verlässt. Danach folgt eine sehr schnelle Pendelbewegung auf die andere Seite, wo es wieder für einige Sekunden verharrt. Auch hier handelt es sich um eine periodische Bewegung, was im ersten Moment gar nicht so den Anschein hat. Durch Rechtsklick auf den Schieberegler Δt kann wieder eine Animation gestartet werden und die Schülerinnen und Schüler können nicht nur die Bewegung im Diagramm, sondern wieder die Position der Pendelmasse auf der linken Seite verfolgen.

Damit auch ein Phasendiagramm dargestellt werden kann, muss der Impuls in der Tabelle in einer eigenen Spalte berechnet werden. Durch Auftragen des Ortes gegen diesen Impuls ergibt sich für das mathematische Pendel das folgende Phasendiagramm, visualisiert in Abbildung (19).

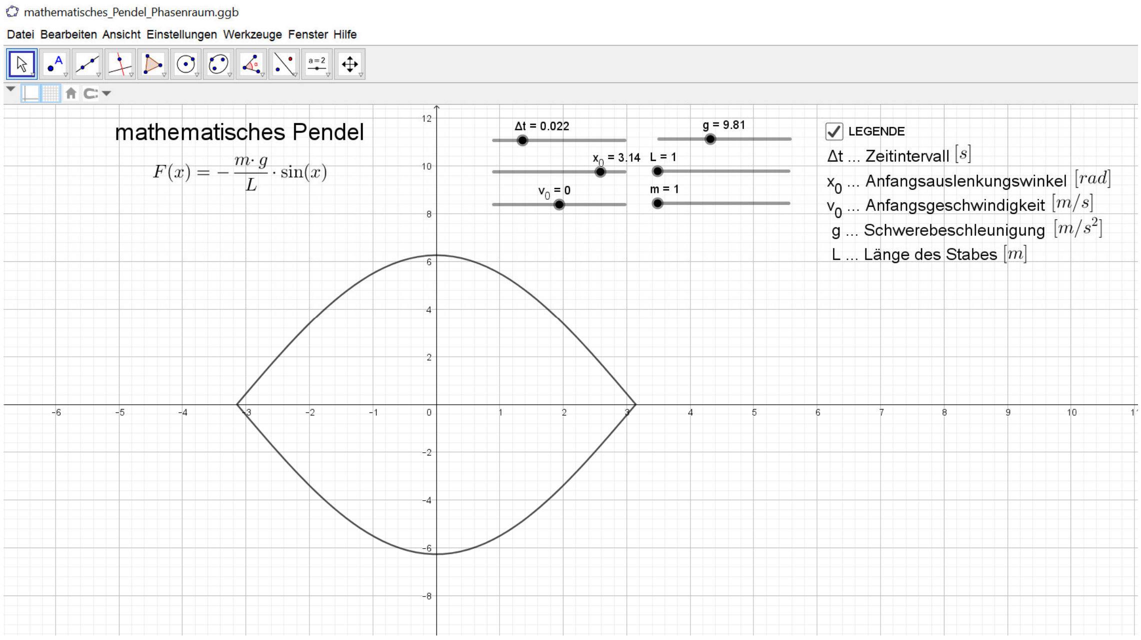

Abbildung 19: Mathematisches Pendel - Phasenraum

6.4. Freier Fall mit Luftwiderstand

Da beim freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstands die Kraft nicht nur vom Ort, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängig ist, findet die Verallgemeinerung der bekannten Näherungsmethode Anwendung. Die wirkende Kraft ist gegeben durch: $F(x, v) = m \cdot g - \alpha \cdot v^2$. Mit α wird der Luftwiderstand bezeichnet. Ist dieser Null, also wird kein Luftwiderstand angenommen, reduziert sich die Formel auf die bekannte Form der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Wird nun diese Kraft F in den verallgemeinerten Lösungsalgorithmus (52) und (53) eingesetzt, ergeben sich die folgenden beiden Näherungsformeln:[79]

[79] vgl. ebd.: S.16

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \left(g - \frac{\alpha \cdot v_0^2}{m} \right) \cdot (\Delta t)^2 \tag{63}$$

$$v_1 = v_0 + \left(g - \frac{\alpha \cdot v_0^2}{m} \right) \cdot \Delta t \tag{64}$$

Schieberegler

Die Tabelle (8) veranschaulicht mögliche Schiebereglereinstellungen beim freien Fall mit Luftwiderstand. Abermals bezeichnet Δt die Länge der Zeitschritte. Weiters bezeichnet x_0 den Anfangsort, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, g die Schwerebeschleunigung, m die Masse und α den Luftwiderstand.

	Intervall		
Bezeichnung	min.	max.	Schrittweite
Δt	0	1	0,01
x_0	0	1000	50
v_0	0	30	1
g	0	25	0,01
m	1	100	1
α	0	1	0,001

Tabelle 8: Schiebereglereinstellungen beim freien Fall mit Luftwiderstand

Durch Eingabe der Formel (63) und (64) in die Tabelle von GeoGebra und die anschließend durchgeführte Tabellenkalkulation ist es abermals möglich, die Bewegung näherungsweise grafisch darzustellen. Ein mögliches Aussehen des GeoGebra-Applets wird in Abbildung (20) visualisiert.

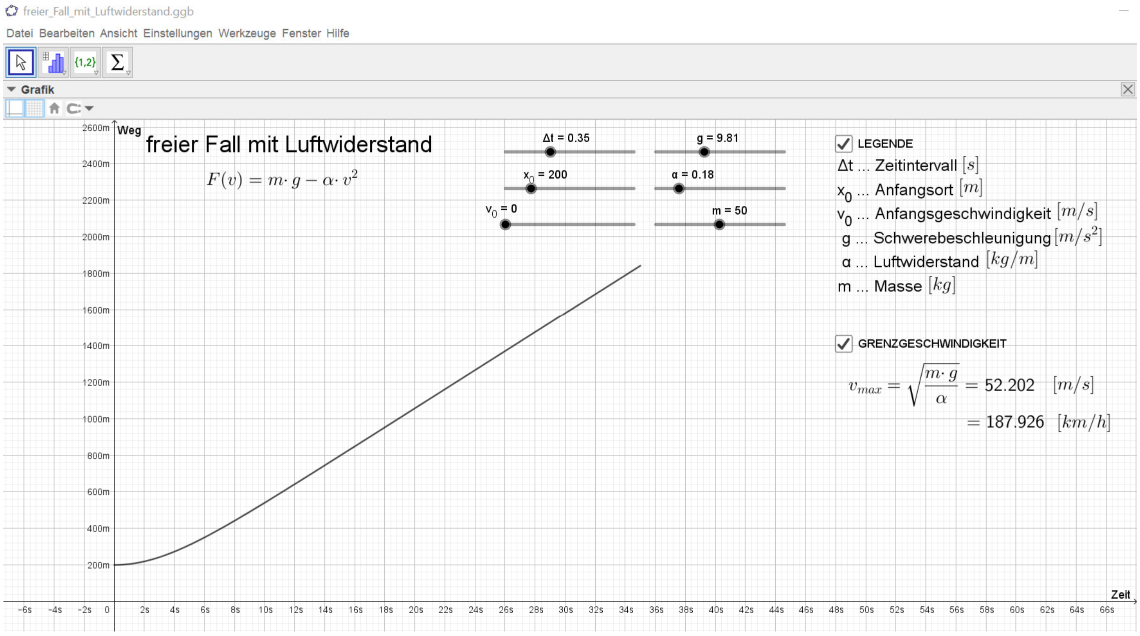

Abbildung 20: Freier Fall mit Luftwiderstand

Die Schülerinnen und Schüler können wieder durch die Veränderung der Schiebereglereinstellungen die Auswirkungen der einzelnen Größen auf die Bewegung analysieren. Außerdem ist eine weitere Einsatzmöglichkeit des GeoGebra-Applets abermals das Lösen von Rechenaufgaben. In diesem GeoGebra-Applet gibt es nämlich zusätzlich noch die Möglichkeit, mittels der Auswahl eines Kontrollkästchens, die Grenzgeschwindigkeit anzeigen zu lassen. Diese wird laufend, sowohl in m/s als auch in km/h, berechnet. Exemplarisch sei hier ein Rechenbeispiel genannt.

- Mary Poppins (60 kg) ist ein magisches Kindermädchen aus einem berühmten Disney-Film. In einer Szene schwebt sie mit Hilfe eines Regenschirms (α = 0,4) gemächlich zu Boden. Ermittle die Endgeschwindigkeit, wenn sie tatsächlich einen Regenschirm als „Fallschirm“ verwenden würde.[80] (Lösung: 38 m/s; 138 km/h)

  Für die Lösung werden der Anfangsort und die Anfangsgeschwindigkeit auf Null gesetzt und die weiteren Größen m und α laut Angabe eingestellt. Die Schülerinnen und Schüler können dann direkt die Geschwindigkeit ablesen.

[80] vgl. Apolin (2010): S.5

6.5. Gedämpfte Schwingung

Auch bei der gedämpften Schwingung ist die Kraft nicht nur vom Ort, sondern ebenfalls von der Geschwindigkeit abhängig. Somit wird abermals die Verallgemeinerung des Lösungsalgorithmus verwendet. Die Kraft ist definiert als: $F(x,v) = -k \cdot x - \beta \cdot v$. Die Größe β bezeichnet den Reibungskoeffizient. Ist dieser Null, ergibt sich wieder die Formel für den harmonischen Oszillator.[81]

Durch das Einsetzen der Kraft F in den verallgemeinerten Lösungsalgorithmus (52) und (53), ergeben sich die folgenden beiden Lösungsformeln:

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2 \cdot m} \cdot (k \cdot x_0 + \beta \cdot v_0) \cdot (\Delta t)^2 \tag{65}$$

$$v_1 = v_0 - \left[\frac{k}{2 \cdot m} \cdot (x_0 + x_1) + \frac{\beta}{m} \cdot v_0\right] \cdot \Delta t \tag{66}$$

Schieberegler

In der Tabelle (9) sind die möglichen Schiebereglereinstellungen für die Bewegung der gedämpften Schwingung dargestellt. Wie bereits in den Beispielen davor gibt auch hier Δt die Länge der Zeitintervalle an. Außerdem bezeichnet x_0 den Anfangsauslenkung, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, k die Federkonstante, m die Masse und β den Reibungskoeffizient.

	Intervall		
Bezeichnung	min.	max.	Schrittweite
Δt	0	0,2	0,001
x_0	-7	7	1
v_0	-5	5	0,1
k	1	50	1
β	0	5	0,1
m	1	20	1

Tabelle 9: Schiebereglereinstellungen der gedämpften Schwingung

Die Formeln (65) und (66) werden wieder in die Tabelle von GeoGebra eingegeben und anschließend wird mittels Tabellenkalkulation schrittweise die Bewegung berechnet. Die grafische Darstellung als GeoGebra-Applet ist in Abbildung (21) visualisiert.

[81] vgl. Embacher (2008): S.16

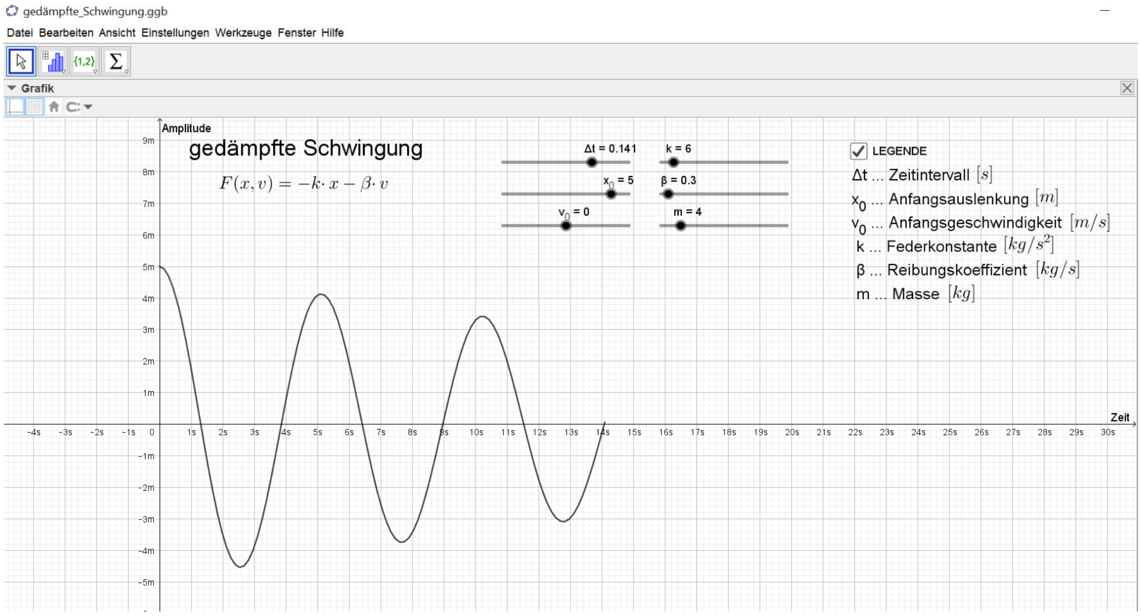

Abbildung 21: Gedämpfte Schwingung

Die Schülerinnen und Schüler können wieder selbstständig arbeiten und mit Hilfe der Schieberegler die Bewegung analysieren. Zum Beispiel zeigt sich durch die Erhöhung des Reibungskoeffizienten eine Vergrößerung der Dämpfung und somit eine rasche Abnahme der Amplitude. Als weiteres Analysemittel der Bewegung bietet sich abermals ein Phasendiagramm an.

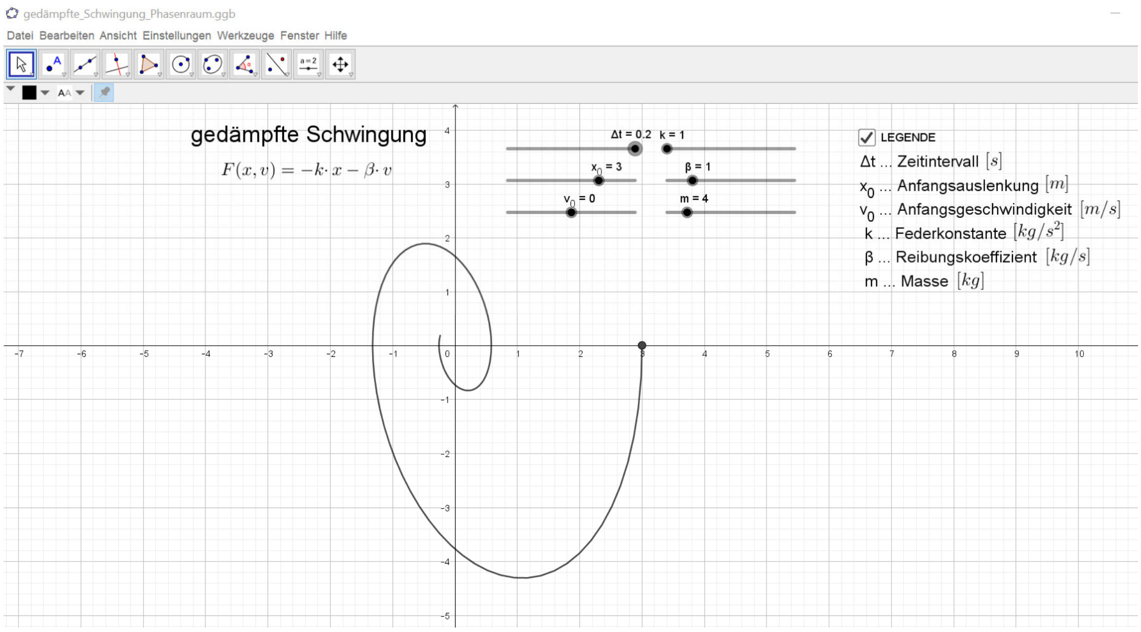

Abbildung 22: Gedämpfte Schwingung - Phasendiagramm

Die Abbildung (22) zeigt das entsprechende Phasendiagramm der gedämpften Schwingung. Der Punkt im Diagramm symbolisiert den Anfangsort des Pendelkörpers. Dieses Phasendiagramm zeigt sehr schön eine Spirale, die sich dem Ursprung annähert. Die Schülerinnen und Schüler soll daraus den durch die Reibungskraft verursachten Energieverlust erkennen können.

6.6. Erzwungene und gedämpfte Schwingung

Eine weitere Verallgemeinerung stellt die erzwungene und gedämpfte Schwingung dar. Hierbei wirkt eine zusätzliche äußere Kraft, welche nur von der Zeit abhängig ist. Dadurch findet der Lösungsalgorithmus (54) – (56) Anwendung. Die wirkende Gesamtkraft setzt sich aus drei Komponenten zusammen: der harmonischen Kraft, der Dämpfung und der äußeren Kraft. Diese zusätzliche äußere Kraft ist abhängig von der Amplitude A und der Kreisfrequenz Ω. Folglich gilt für diese Kraft: $F(x,v,t) = -k \cdot x - \beta \cdot v + A \cdot \sin(\Omega \cdot t)$. Eingesetzt in den Näherungsalgorithmus ergeben sich die folgenden Formeln:[82]

$$t_1 = t_0 + \Delta t \tag{67}$$

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2 \cdot m} \cdot [-k \cdot x_0 - \beta \cdot v_0 + A \cdot \sin(\Omega \cdot \mathrm{t}_0)] \cdot (\Delta t)^2 \tag{68}$$

$$\begin{aligned} v_1 = v_0 + \frac{1}{2 \cdot m} \cdot [-k \cdot x_0 - \beta \cdot v_0 + A \cdot \sin(\Omega \cdot \mathrm{t}_0) - \\ -k \cdot x_1 - \beta \cdot v_0 + A \cdot \sin(\Omega \cdot \mathrm{t}_1)] \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{69}$$

Schieberegler

Die Tabelle (10) zeigt mögliche Schiebereglereinstellungen für die Bewegung der erzwungenen und gedämpften Schwingung. Wie bereits in den Beispielen davor bezeichnet Δt abermals die Länge der Zeitschritte. Analog zur erzwungenen Schwingung gibt x_0 die Anfangsauslenkung, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, k die Federkonstante, m die Masse und β den Reibungskoeffizient an. Zusätzlich dazu kommen noch A die Amplitude und Ω die Kreisfrequenz der äußeren Kraft.

[82] vgl. ebd.: S.17

	Intervall		
Bezeichnung	min.	max.	Schrittweite
Δt	0	0,2	0,001
x_0	-5	5	1
v_0	-5	5	1
k	1	50	1
β	0	5	0,1
m	1	10	1
A	1	10	1
Ω	0	2	0,1

Tabelle 10: Schiebereglereinstellungen der erzwungenen und gedämpften Schwingung

Durch Eingabe der Formel (67) – (69) in die Tabelle von GeoGebra kann abermals mittels Tabellenkalkulation die Bewegung näherungsweise berechnet werden. Die grafische Darstellung des Graphen als GeoGebra-Applet ist in der Abbildung (23) ersichtlich.

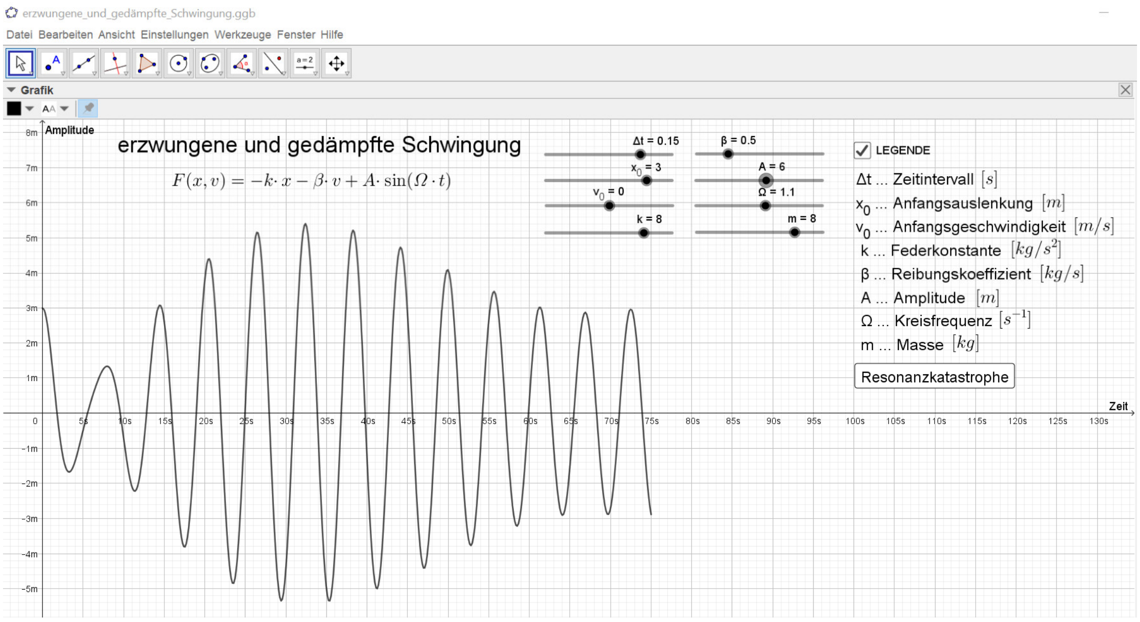

Abbildung 23: Erzwungene und gedämpfte Schwingung

Die Schülerinnen und Schüler können durch Veränderung der Schiebereglereinstellungen die Schwingung analysieren. Durch das Klicken auf die Schaltfläche „Resonanzkatastrophe“ stellen sich die Schieberegler automatisch so ein, dass die Dämpfung sehr gering ist und die äußere Kraft die Amplitude der Schwingung laufend verstärkt.

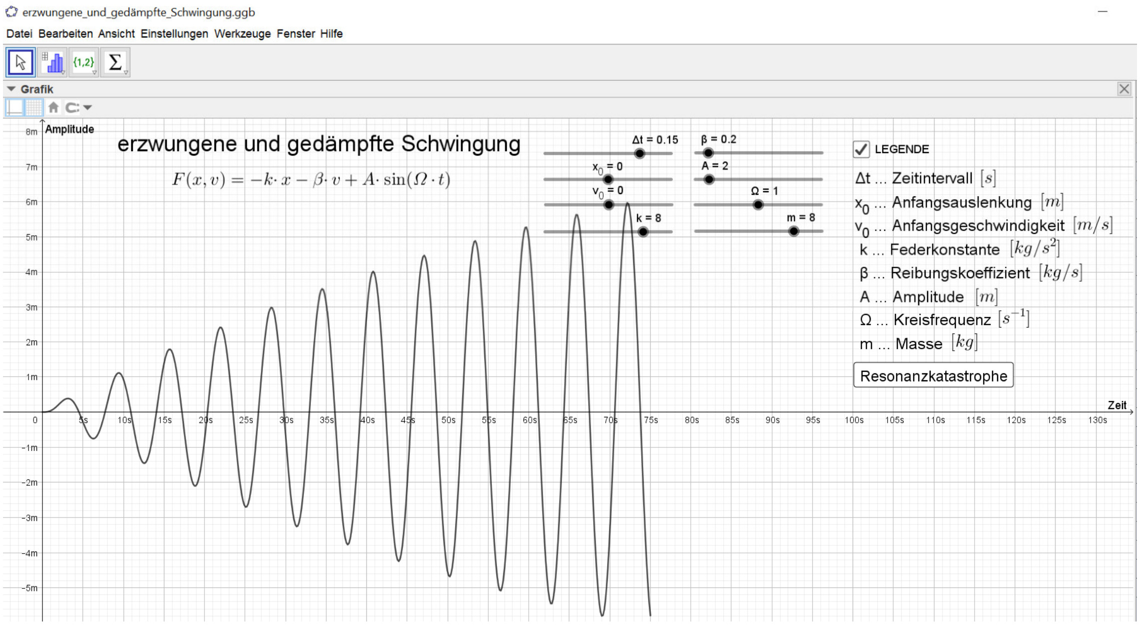

Abbildung 24: Erzwungene und gedämpfte Schwingung - Resonanzkatastrophe

In Abbildung (24) wird der Grenzfall der erzwungenen und gedämpften Schwingung, bezeichnet als Resonanzkatastrophe, dargestellt. Für die Schülerinnen und Schüler wird schnell ersichtlich, woher die Bezeichnung Katastrophe kommt. Die Amplitude der Schwingung wird durch die äußere Kraft verstärkt und nimmt daher laufend zu.

An dieser Stelle kann zum Vergleich beispielweise der Kollaps der Tacoma-Brücke (1940) eingebaut werden. Diese wurde durch den Wind, als äußere wirkende Kraft, so weit in Schwingung versetzt, dass sie schließlich eingestürzt ist.[83]

Bei der erzwungenen und gedämpften Schwingung bietet sich abermals ein Phasendiagramm als zusätzliches Analysewerkzeug an. Hierfür muss wieder der Impuls berechnet und gegen den Ort aufgezeichnet werden. Das entsprechende Phasendiagramm wird in Abbildung (25) dargestellt.

[83] vgl. Nussbaumer (2017): S.43

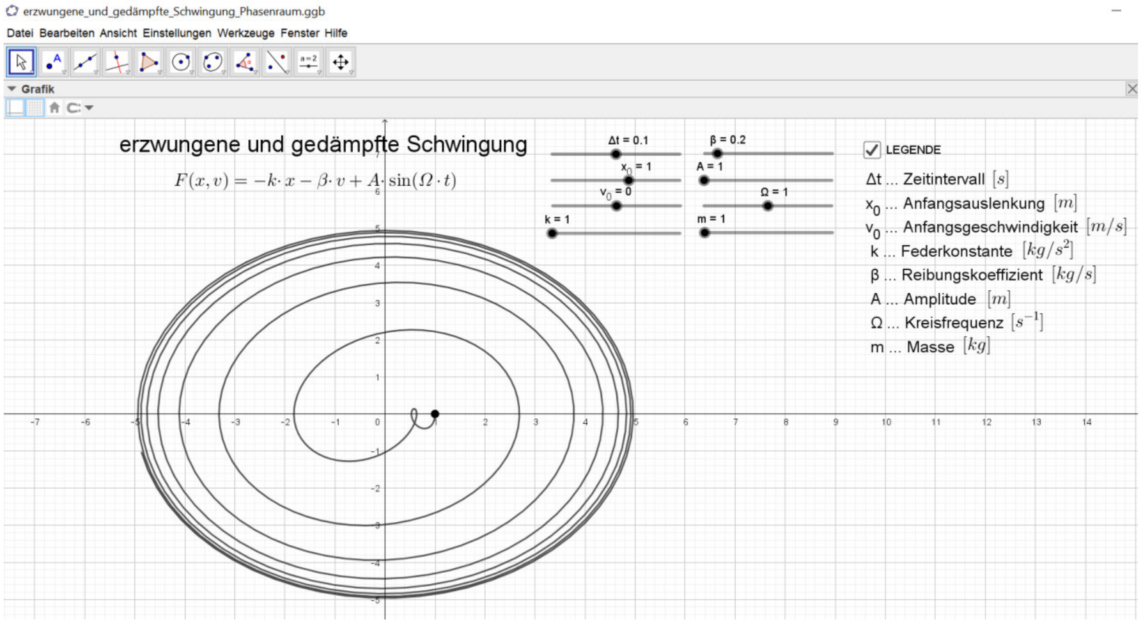

Abbildung 25: Erzwungene und gedämpfte Schwingung - Phasendiagramm

Der kleine schwarze Punkt in dem Phasendiagramm markiert den Startpunkt der Bewegung. Ist der Reibungskoeffizient β relativ gering oder vielleicht sogar Null, gibt es keine oder nur geringe Dämpfung. Somit ergibt sich aufgrund der Energieerhaltung eine Ellipse im Phasenraum. In Abbildung (25) ist ein Reibungskoeffizient (β) mit dem Wert 0,2 gewählt.

6.7. Keplerbewegung

Bei der Keplerbewegung, also der Bewegung einer Masse m im Gravitationsfeld einer anderen Masse M, handelt es sich um eine höherdimensionale Bewegung. Die wirkende Kraft ist definiert als: $F(\vec{x}) = -\frac{G\cdot M\cdot m}{|\vec{x}|^3}\cdot\vec{x}$. Wird diese in den Lösungsalgorithmus (50) und (51) eingesetzt, ergeben sich die nachfolgenden zwei Näherungsformeln:[84]

$$x_1 = x_0 + v_x\cdot\Delta t - \frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M\cdot x_0}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}\cdot(\Delta t)^2 \tag{70}$$

$$y_1 = y_0 + v_y\cdot\Delta t - \frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M\cdot y_0}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}\cdot(\Delta t)^2 \tag{71}$$

[84] vgl. Embacher (2008): S.14

Abermals sei erwähnt, dass es sich bei G um die Newtonsche Gravitationskonstante handelt, diese beträgt $6{,}674 \cdot 10^{-11}\, m^3/(kg \cdot s^2)$. Außerdem ist die Bewegung unabhängig von der Satellitenmasse m.[85]

Schieberegler

In der Tabelle (11) sind die möglichen Schiebereglereinstellungen für die Keplerbewegung dargestellt. Auch hier steht Δt für die Länge der Zeitintervalle. Außerdem bezeichnet x_0 den Anfangsort, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, GM das Produkt aus der Gravitationskonstante und der Zentralmasse, v_x die x-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit und v_y die y-Kompenente.

	Intervall		
Bezeichnung	min.	max.	Schrittweite
Δt	0	0,03	0,001
x_0	-2	2	0,01
v_0	-2	2	0,01
GM	0	2	0,01
v_x	-2	2	0,01
v_y	-2	2	0,01

Tabelle 11: Schiebereglereinstellungen bei der Keplerbewegung

Die Formel (70) und (71) werden abermals in die Tabelle von GeoGebra eingegeben und anschließend wird mittels Tabellenkalkulation die Bewegung näherungsweise berechnet. Die grafische Darstellung der Keplerbewegung als GeoGebra-Applet ist in der Abbildung (26) ersichtlich.

[85] vgl. Embacher (2010): S.12

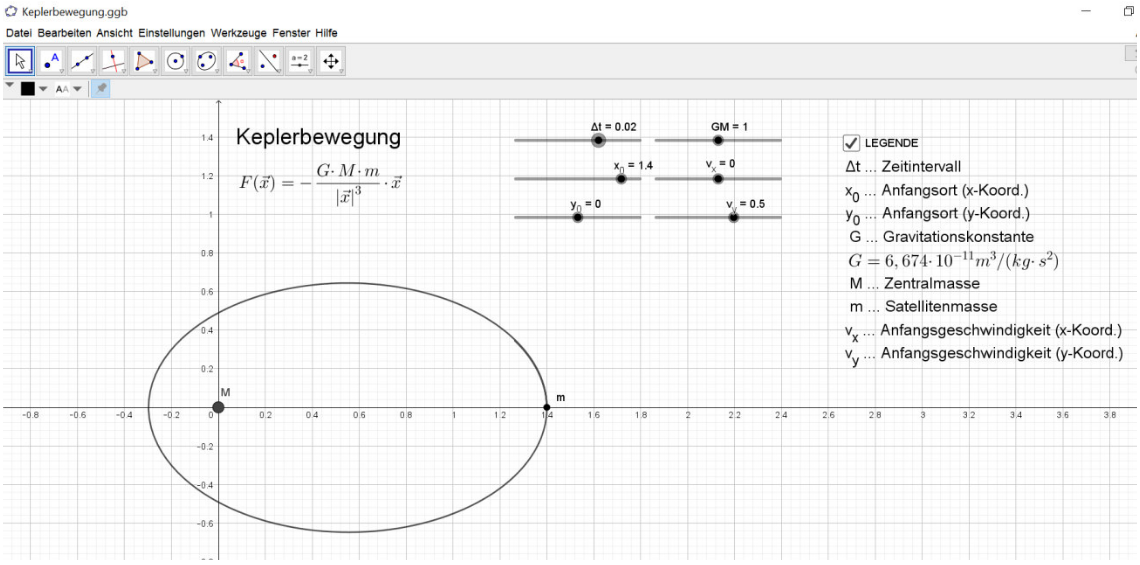

Abbildung 26: Keplerbewegung

Zum besseren Verständnis sind im Graphen die Anfangspositionen der Zentralmasse und der Satellitenmasse mit Punkten markiert. Durch Veränderung der Anfangseinstellungen der Schieberegler können die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Bahnbewegungen grafisch nachvollziehen.

Um die Bewegung der Satellitenmasse schrittweise verfolgen zu können, bietet sich außerdem die Darstellung mittels Punktdiagramm an. Diese wird in Abbildung (27) dargestellt. Hierbei können die Schülerinnen und Schüler auch wieder eine Animation des Schiebereglers Δt starten und punktweise die Position der Satellitenmasse nachverfolgen.

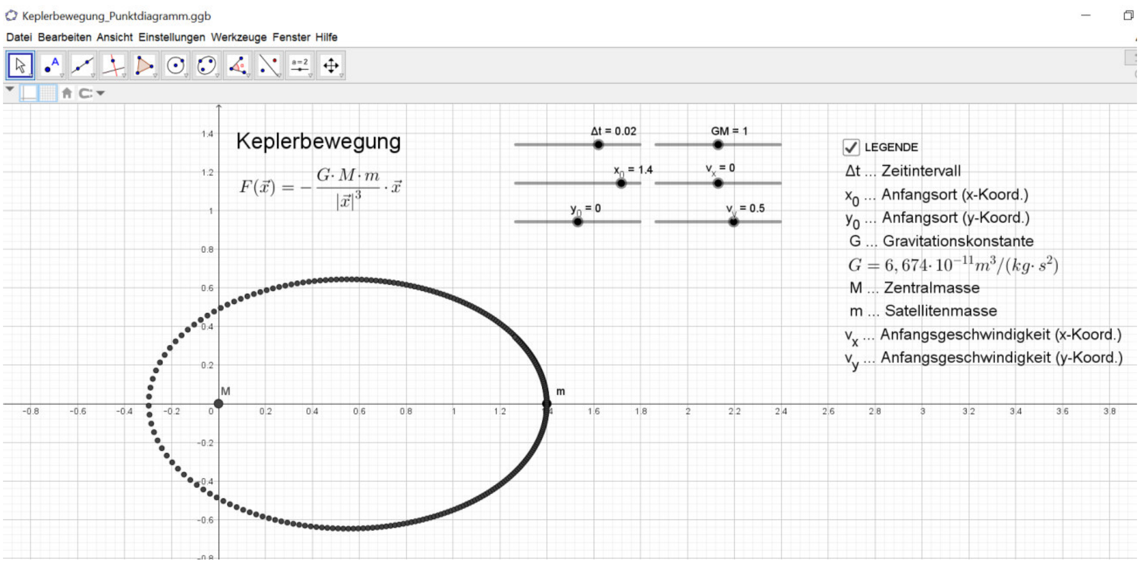

Abbildung 27: Keplerbewegung - Punktdiagramm

7. Lehrplanbezug

Bei der Planung eines neuen Themas bzw. einer Unterrichtssequenz ist der zugrunde liegende Lehrplan von entscheidender Bedeutung. Im Folgenden werden wichtige allgemeine Aufgaben des Physikunterrichts sowie wichtige Passagen des Lehrplans passend zum Thema Newtonsche Mechanik bzw. Bewegungsgleichungen genannt und diskutiert.

Der Physik-Lehrplan der AHS-Oberstufe ist prinzipiell in verschiedene Bereiche gegliedert: die Bildungs- und Lehraufgaben, Beiträge zu den Bildungsbereichen, didaktische Grundsätze und der Lehrstoff explizit.[86]

7.1. Bildungs- und Lehraufgabe

Laut Bildungs- und Lehraufgabe des Physik-Lehrplans ist das wesentliche Ziel des Physikunterrichts, dass sich Schülerinnen und Schüler eine naturwissenschaftliche Grundbildung aneignen, die sie in die Lage versetzt, naturwissenschaftliche Fragestellungen adäquat zu behandeln. Somit sollen im Physikunterricht die Lernergebnisse im Fokus stehen und nicht das strikte Abarbeiten eines Themenkatalogs durch die Lehrkraft. Außerdem sollen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, die Bedeutung von physikalischen Konzepten und Phänomenen im Alltag sowie in der Umwelt korrekt erfassen zu können.[87]

7.2. Beiträge zu den Bildungsbereichen

Ein wesentlicher Beitrag zur Erfüllung des Bildungsbereichs Sprache und Kommunikation stellt der Erwerb von einem Grundvokabular an physikalischen Fachbegriffen durch die Schülerinnen und Schüler dar. Hierbei sollen die Lernenden gezielt in der Lage sein, zwischen Alltagssprache und Fachsprache zu unterscheiden.

[86] vgl. RIS (2018): S.182
[87] vgl. ebd.

Im Bildungsbereich Natur und Technik ist klar verankert, dass Schülerinnen und Schüler durch den Physikunterricht in der Lage sein sollen, Ursachen von Naturerscheinungen zu erkennen. Weiters ist ein Ziel, dass die Lernenden aus diesen Beobachtungen physikalische Gesetzmäßigkeiten ableiten können, aber dass für sie auch gewisse Grenzen der Vorhersagbarkeit begreiflich werden.[88]

7.3. Didaktische Grundsätze

Die physikalische Grundbildung ist im Wesentlichen in drei Bereiche gegliedert. Damit kompetenzorientierter Unterricht stattfinden kann, muss dieser so gestaltet sein, dass Kompetenzen aus allen drei Bereichen von den Schülerinnen und Schülern zum jeweiligen Lerninhalt erworben und gefestigt werden. Außerdem müssen die aus dem vorangegangenen Semester bereits erworbenen Kompetenzen in den folgenden Semestern vertieft und erweitert werden. Diese drei Bereiche werden im Folgenden beschrieben und müssen im kompetenzorientieren Physikunterricht berücksichtigt werden, wobei hier nur auf jene Unterpunkte eingegangen wird, welche durch das numerische Lösen von Bewegungsgleichungen erworben werden.[89]

W: Fachwissen

Ziel dieses Bereichs ist es, dass Schülerinnen und Schüler physikalisches Fachwissen erwerben und dieses in verschiedenen Kontexten anwenden können. Konkrete für die Newtonschen Bewegungsgleichungen passende Kompetenzen seien hier kurz erläutert. Einerseits sollen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, Vorgänge in der Natur bzw. aus dem Alltag korrekt beschreiben zu können. Andererseits sollen sie auch fähig sein, diese Vorgänge auf verschiedene Arten darzustellen und zu erläutern. Somit müssen die Lernenden die Kompetenz entwickeln, ihr angeeignetes Fachwissen in unterschiedlichen Kontexten anwenden zu können.[90]

[88] vgl. ebd.
[89] vgl. ebd.
[90] vgl. ebd.: S.183

E: Experimentieren und Erkenntnisgewinnung

Durch diesen Kompetenzbereich sollen die Schülerinnen und Schüler mit der physikalischen Arbeitsweise vertraut werden. Als besonders erstrebenswert gilt hierbei, dass Schülerinnen und Schüler zu Phänomenen und Vorgängen aus der Natur und dem Alltag naturwissenschaftliche Fragestellungen formulieren und Hypothesen aufstellen können. Außerdem sollen die Lernenden durch den Physikunterricht befähigt sein, Daten mittels physikalischen bzw. mathematischen Modellen abzubilden und zu interpretieren.[91]

S: Standpunkte begründen

Mit Hilfe dieses Kompetenzbereichs sollen die Schülerinnen und Schüler sich die Fähigkeit aneignen, naturwissenschaftlich zu argumentieren. Ziel des Physikunterrichts muss es also sein, dass die Lernenden zwischen naturwissenschaftlichen und nicht-naturwissenschaftlichen Fragestellungen sowie Argumentationen unterscheiden können.[92]

Didaktische Grundsätze

Zu den allgemeinen didaktischen Grundsätzen des Physikunterrichts zählt, dass Alltagserfahrungen und Vorstellung der Lernenden berücksichtigt werden. Aus diesem Grund werden im nächsten Kapitel die Schülervorstellungen zur Newtonschen Mechanik noch ausführlich thematisiert. Außerdem ist zu empfehlen, den Unterricht an Interessen bzw. Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler zu orientieren. Weiters sind laut Lehrplan unbedingt moderne Medien und Technologien im Physikunterricht zu verwenden.[93]

[91] vgl. ebd.
[92] vgl. ebd.
[93] vgl. ebd.

7.4. Lehrstoff

Zuletzt zum Thema Lehrplan seien noch einige Auszüge aus dem Lehrstoff passend zu den Bewegungsgleichungen genannt. Da es sich hierbei um ein sehr vielschichtiges Thema handelt, gibt es je nach konkreter Bewegung Einsatzmöglichkeiten in den unterschiedlichsten Kompetenzmodulen. Bereits im 1. und 2. Semester der 5. Klasse bietet sich ein ausführlicher Start in das Thema Bewegungsgleichungen durch das folgende Kompetenzmodul an:[94]

> *„Mechanik I: Relativität von Ruhe und Bewegung, Bewegungsänderung durch Kräfte, Newton'sche Bewegungsgleichung, geradlinige und kreisförmige Bewegung, Gravitation"*[95]

Bereits im 3. Semester, also in der 6. Klasse, gibt es die Möglichkeit der Fortsetzung des Themas im Kompetenzmodul Schwingungen und Wellen. Je nachdem, wie intensiv man das Thema behandeln möchte, gibt es auch noch passend im 6. Semester das Modul Theorienentwicklung:[96]

> *„Schwingungen und mechanische Wellen: Erzeugung, Reflexion und Brechung, Beugung und Interferenz, Resonanz, stehende Welle"*[97]
> *„Einblicke in die Theorienentwicklung und das Weltbild der modernen Physik"*[98]

---

[94] vgl. ebd.: S.184
[95] ebd.
[96] vgl. ebd.
[97] ebd.
[98] ebd.

8. Schülervorstellungen

Bei der Unterrichtsvorbereitung für ein neues Stoffgebiet denkt man als Lehrperson meistens zuallererst an die Fachinhalte bzw. die Kompetenzen, welche die Schülerinnen und Schüler erwerben sollen. Man zieht den Lehrplan als Grundlage heran, orientiert sich am verwendeten Schulbuch und recherchiert eventuell zusätzliche Experimente oder Lernaufgaben, um die Fachinhalte, welche den Schülerinnen und Schülern nähergebracht werden sollen, verständlich erklären zu können. Oft wird jedoch bei der Umsetzung implizit angenommen, dass die Schülerinnen und Schüler beim aufmerksamen Mitarbeiten die physikalischen Inhalte verstehen, solange sie von der Lehrperson fachlich korrekt und anschaulich präsentiert werden.[99]

Problematisch an dieser Herangehensweise ist jedoch, dass die physikalischen Inhalte lediglich nur eine Seite des Planungsprozesses darstellen. Ebensoviel Aufmerksamkeit muss den Lernvoraussetzungen, welche die Schülerinnen und Schüler in den Physikunterricht mitbringen, gewidmet werden. Lernende verarbeiten Daten und Informationen auf Basis dessen, was sie bereits zu einem bestimmten Thema in den Unterricht mitbringen. Hierbei spielt eine zentrale Rolle, was die Schülerinnen und Schüler aus dem Alltag kennen bzw. welche Vorstellungen sie im vorangegangenen Unterricht bereits entwickelt haben.[100]

Zentrale Aufgabe der Lehrkraft muss es also sein, den Schülerinnen und Schülern die physikalisch korrekten Vorstellungen nahezubringen, ohne die bestehenden Vorstellungen außer Acht zu lassen. Das Schwierige daran ist der richtige Umgang mit diesen Schülervorstellungen. Wählt man zum Beispiel ein anschauliches Experiment und ergänzt das Ganze mit einer ausführlichen fachlichen Erklärung, so sollte man meinen, dass diese Vorgehensweise einen vielversprechenden Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler zur Folge hat - vorausgesetzt natürlich, dass die Lernenden aufmerksam dem Unterricht folgen. Leider wird durch Überprüfen der Lernfortschritte

[99] vgl. Schecker (2018): S.2
[100] vgl. ebd.

durch die Lehrkraft häufig jedoch nicht der gewünscht Erfolg registriert. Die Begründung hierfür ist schnell gefunden. Lernen ist ein aktiver Prozess. Die im Unterricht vorgestellten Informationen müssen von den Lernenden aufgenommen und verarbeitet werden, um neues Wissen anzuhäufen. Diese Verarbeitung erfolgt jedoch vor dem Hintergrund des bereits erworbenen Vorwissens bzw. der Vorstellungen aus dem Alltag. Das bedeutet, was die Lernenden bereits wissen bzw. sich vorstellen, beeinflusst, was gelernt wird. Somit muss ein zentrales Element der Unterrichtsplanung die Auseinandersetzung mit den bekannten Schülervorstellungen darstellen.[101]

Das Problem, vor dem Lehrende stehen, ist, dass Schülervorstellungen die Verarbeitung neuer Unterrichtsinhalte beeinflussen, aber dabei sehr widerstandfähig gegen Veränderungen sind. Prinzipiell gibt es zwei Konzepte zum Umgang mit den Schülervorstellungen bei der Planung und Umsetzung von neuen Inhalten im Unterricht. Konzept 1 geht von einem kontinuierlichen Lernweg aus. Hierbei nutzt man ausbaufähige Schülervorstellungen, knüpft an diese an oder deutet sie um. Konzept 2 zieht eine andere Herangehensweise vor. Hier werden Schülervorstellungen im Unterricht direkt angesprochen und mit physikalisch korrekten Vorstellungen konfrontiert. Welches Konzept man im Unterricht wählt, muss sich die Lehrkraft bereits bei der Planung im Vorfeld genau überlegen. Lehrpersonen sind jedoch oft spontan und ungeplant mit Schülervorstellungen konfrontiert. Es stellt sich somit die Frage, ob man die Vorstellungen ignorieren oder im Unterricht aufgreifen soll. Eines steht jedoch fest, das Wissen über Schülervorstellungen hilft den Lehrkräften, sich in die Lage der Schülerinnen und Schüler zu versetzen, und sie somit besser zu verstehen. Die Aufgabe der Lehrperson ist es, abzuwägen, ob hinter einer falschen Aussage eine fehlerhafte Vorstellung lauert, oder ob es sich zum Beispiel nur um eine Wortverwechslung durch die Schülerin oder den Schüler handelt. Aussagen der Schülerinnen und Schüler, die auf den ersten Blick schlichtweg falsch erschienen, können sehr wohl auf selbstständigen Überlegungen der Lernenden beruhen. Somit sollten diese zwar falschen aber eigenständig überlegten Leistungen durch die Lehrperson wertgeschätzt werden. Sonst besteht die Gefahr, dass Lernende es nicht

[101] vgl. ebd.: S.3f

mehr wagen, eigenständige Überlegungen zu einem physikalischen Thema anzustellen, und sich nicht mehr trauen, Äußerungen zu neuen Themen zu treffen. Das würde die Haltung einiger Schülerinnen und Schüler unterstützen, sie verstünden das Thema oder schlimmstenfalls die Physik im Allgemeinen einfach nicht. Kurz gesagt: Schülervorstellungen müssen im Unterricht ernst genommen werden. Das bedeutet aber nicht, dass diese im Unterricht auf eine Stufe mit den physikalischen Konzepten gestellt werden sollten.[102]

8.1. Schülervorstellungen in der Mechanik

Da bereits die Bedeutung der Schülervorstellungen im Unterricht deutlich thematisiert wurde, werden im Folgenden die häufigsten Schülervorstellungen zum Thema Bewegungsgleichungen bzw. Newtonsche Mechanik allgemein zusammengefasst.

- Geschwindigkeit ist Schnelligkeit

  Dieser Fehlvorstellung liegt der Alltagsgebrauch des Begriffs Geschwindigkeit zugrunde. Der Begriff bezieht sich hier rein auf ein schneller oder langsamer werden eines Körpers. Die Richtung einer Bewegung wird, wenn überhaupt, nur separat genannt und deren Bedeutung, nämlich die momentane Orientierung, von den Schülerinnen und Schülern nicht erfasst. Für sie handelt es sich bei der Richtung lediglich um die Angabe eines Ziels und bei der Geschwindigkeit um eine Aussage über die Schnelligkeit eines Körpers. In der Physik entspricht diese Auffassung aber nur dem Betrag der Geschwindigkeit. Leider wird diese Schülervorstellung durch den Physikunterricht auch noch verstärkt, da im Unterricht lange Zeit nur eindimensionale Bewegungen behandelt werden. Selbst bei der Einführung einer negativen Geschwindigkeit wird der Richtungsaspekt nur unzureichend verstanden. Den Schülerinnen und Schülern erscheint die Richtung als zusätzliche Eigenschaft und nicht als zentrales Merkmal des physikalischen Konzepts. Eine Möglichkeit, um diese Schülervorstellung zur Geschwindigkeit erst gar nicht aufkommen zu lassen, ist, diese von Anfang an als zweidimensionale

[102] vgl. ebd.: S.6

Größe einzuführen. Um auch sprachlich Klarheit zu schaffen, empfiehlt sich, für den betraglichen Geschwindigkeitsaspekt den Begriff Tempo zu verwenden.[103]

- Große Beschleunigung bedeutet hohes Tempo.

  Diese Vorstellung hat ihren Ursprung in der Alltagssprache, durch Phrasen wie: „Dieses Auto beschleunigt von 0 auf 100 km/h in 2 Sekunden." Hierbei wird der Betragsaspekt der Beschleunigung in eine Tempoänderung und einen Zeitraum aufgeteilt. Physikalisch gesehen ist die Beschleunigung eine eigenständige Größe, die durch den Quotienten der Geschwindigkeitsänderung und dem Zeitraum berechnet wird. Für Schülerinnen und Schüler handelt es sich jedoch lediglich um eine Bilanzgröße, welche als Differenz von Anfangs- und Endgeschwindigkeit aufgefasst wird. Für Schülerinnen und Schüler ist eine große Beschleunigung demnach gleichbedeutend mit einer hohen Endgeschwindigkeit und nicht, wie es korrekt wäre, mit einer großen zeitlichen Geschwindigkeitsänderungsrate. Schülerinnen und Schüler fassen Beschleunigung also als eine zur Geschwindigkeit ähnliche Größe auf und beantworten häufig Fragen nach der Beschleunigung, als wäre die Geschwindigkeit gefragt gewesen. Eine weitere Schwierigkeit, die sich aus dieser Schülervorstellung ergibt, ist, dass für die Schülerinnen und Schüler dadurch eine Unterscheidung zwischen den verschiedenen Bewegungsarten oft nicht möglich ist.[104]

- Beschleunigung ist Schnellerwerden

  Im Alltag herrscht die äußerst problematische Fehlvorstellung, dass Beschleunigung gleichbedeutend mit Schnellerwerden ist. Somit ist für Schülerinnen und Schüler eine negative Beschleunigung unlogisch. Es werden zwar negative Werte zum Beispiel für Rechnungen akzeptiert, aber das physikalische Verständnis von Beschleunigung wird nicht weiterentwickelt.[105]

---

[103] vgl. ebd.: S.65f
[104] vgl. ebd.: S.66
[105] vgl. ebd.

- Beschleunigung ist Tempoänderung.

  Bei dieser Schülervorstellung wird Beschleunigung mit der Änderung des Geschwindigkeitsbetrags und nicht mit der Änderung der Geschwindigkeit selbst gleichgesetzt. Somit bedeutet für sie eine positive Beschleunigung, dass der Körper schneller, eine negative Beschleunigung, dass er langsamer wird. Tatsächlich ist in der Physik das Vorzeichen jedoch vom gewählten Koordinatensystem abhängig und jede Änderung des Geschwindigkeitsvektors stellt eine Beschleunigung dar. Äußerst problematisch wird diese Fehlvorstellung bei der Behandlung des Themas Kreisbewegungen. Ist diese Schülervorstellung bei den Lernenden vorhanden, so ist es für sie nicht möglich, eine gleichförmige Kreisbewegung physikalisch richtig zu interpretieren. Oft wird fälschlicherweise angenommen, es gäbe keine Beschleunigung, da sich das Tempo nicht ändert. Tatsächlich wird der Körper laufend beschleunigt, da sich die Richtung ständig ändert.[106]

- Zu einem Zeitpunkt kann es keine Beschleunigung geben.

  Durch die Fehlvorstellung der Beschleunigung als Änderung des Geschwindigkeitsbetrags ist es für Schülerinnen und Schüler oft nicht möglich, Beschleunigung für einen speziellen Zeitpunkt anzugeben. Für sie benötigt die Änderung stets einen gewissen Zeitraum. Die Vorstellung wird erkennbar, wenn Schülerinnen und Schüler Wurfbewegungen analysieren. Wird zum Beispiel ein Ball wie beim Jonglieren in die Luft geworfen, so geben Schülerinnen und Schüler im Zenit, also im Umkehrpunkt der Bewegung keine Beschleunigung an. Dieses Verständnisproblem liegt darin begründet, dass der gedankliche Übergang von einem sehr kleinen Zeitraum zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht geschafft wurde.[107]

- Ein Körper in Bewegung hat Kraft gespeichert.

  Wird ein Körper in Bewegung gesetzt, so wird laut dieser Fehlvorstellung die Kraft von diesem aufgenommen und gespeichert. Für die Fortsetzung dieser Bewegung

[106] vgl. ebd.
[107] vgl. ebd.: S.67

ist jene gespeicherte Kraft notwendig. Für Schülerinnen und Schüler wird die Fehlvorstellung noch deutlicher, wenn der Körper dann auf ein Hindernis trifft und dieses zum Beispiel bewegt oder verformt. Schülerinnen und Schüler verbinden den Begriff Kraft stärker mit Geschwindigkeit als mit Beschleunigung. Somit wird laut Vorstellung der Lernenden die Kraft allmählich verbraucht und somit wird der Körper langsamer und kommt irgendwann zum Stillstand. Die Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler verstärken diese Fehlvorstellung leider noch zusätzlich, da bewegte Körper im Alltag langsamer werden. An eine Wechselwirkung mit der Umgebung denken die Lernenden leider nur selten. Eine Möglichkeit zur Korrektur durch die Lehrkraft stellt das Konzept der kinetischen Energie dar. Diese wird durch Reibung in innere Energie umgewandelt.[108]

- Das zweite Newtonsche Axiom ist eines von vielen Kraftgesetzen.

  Aus dem Physikunterricht ist das zweite Newtonsche Axiom $F = m \cdot a$ jeder Schülerin und jedem Schüler bekannt. Kaum einem ist aber dessen fundamentale Bedeutung bewusst. Die Formel wird mit anderen Gleichungen, wie zum Beispiel der Federspannkraft $F = -k \cdot x$ oder der Erdanziehungskraft $F = m \cdot g$, die aus Lernendensicht scheinbar dieselbe Form haben, gleichgesetzt. Somit handelt es sich für Schülerinnen und Schüler beim zweiten Newtonschen Axiom lediglich um eine Kraftformel von vielen. Die Ursache dieser Problematik liegt in der mangelnden Unterscheidung zwischen der resultierenden Gesamtkraft, die auf einen Körper wirkt, und den verschiedenen Einzelkräften, die hierbei eine Rolle spielen. Um diesem Problem entgegenzuwirken, sollte man den Ausdruck $m \cdot a$ nicht als „Kraft“ bezeichnen. Weiters empfiehlt sich eine andere Formulierung des zweiten Newtonschen Axioms: $\vec{a} = \vec{F}_{res}/m$ bzw. $\Delta\vec{v} = (\vec{F}_{ges} \cdot \Delta t)/m$. Durch diese Umformung wird klar, dass die resultierende Kraft über einen gewissen Zeitraum wirken muss, um eine Bewegungsänderung hervorzurufen.[109]

[108] vgl. ebd.: S.72f
[109] vgl. ebd.: S.77

9. Unterrichtsplanung

Im folgenden Kapitel geht es um die konkrete Umsetzung des Lösungsalgorithmus im Physikunterricht. Es werden verschiedene Szenarien, je nach Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit GeoGebra, behandelt. Exemplarisch für die konkreten Umsetzungsmöglichkeiten im Unterricht wird ein Szenario mittels Planungsraster veranschaulicht.

9.1. Allgemeine Umsetzung

Das Näherungsverfahren und dessen Visualisierung mit Hilfe der GeoGebra-Applets kann von Schülerinnen und Schülern in den Grundzügen verstanden und eigenständig durchgeführt werden. Es bietet sich hier auch die Möglichkeit einer spielerisch-experimentellen Erforschung der verschiedenen Kraftgesetze. Ein solcher Zugang ermöglicht den Lernenden ein genaueres Verständnis der dynamischen Bewegungskonzepte der klassischen Physik und vertieft die Kompetenz Weg-Zeit-Diagramme zu lesen und zu interpretieren. Außerdem vermittelt die Herangehensweise über das Näherungsverfahren ein grundliegendes Konzept jeder Naturwissenschaft – den Umgang mit Problemstellungen, die auf den ersten Blick nicht so einfach zu lösen sind.[110]

Weiters werden durch diese Herangehensweise Themen unterrichtbar, die im herkömmlichen Physikunterricht nur oberflächlich behandelt werden können. Als Beispiel hierfür zählt die Pendelbewegung. Durch Anwendung des Näherungsalgorithmus ist es nun nicht mehr nötig, sich auf kleine Anfangsauslenkungen zu beschränken. Für das Verständnis von besonderem Interesse ist hierbei die Übertragung der gedanklichen Vorstellungen zu dem Bewegungsablauf in ein Weg-Zeit-Diagramm bei großen Auslenkungen der Pendelmasse. Für Anfangsauslenkungen, die nur etwas geringer als π sind, ergibt die Anwendung des numerischen Lösungsverfahrens eine Darstellung wie in

[110] vgl. Embacher (2008): S.10f

Abbildung 18 gezeigt. Durch entsprechende Aufgabenstellungen, den erhaltenen Bewegungsablauf in eigenen Worten zu beschreiben und der gezielten Frage danach, ob das entsprechende Weg-Zeit-Diagramm auch so zu erwarten war, ist es für die Lernenden einfacher, die mitunter große Kluft zwischen ihren Alltagserfahrungen und den häufig abstrakten Erklärungen der klassischen Physik, zu überwinden.[111]

Voraussetzungen für eine erfolgreiche Umsetzung des Lösungsverfahrens im Physikunterricht im Sinne einer eigenständigen SchülerInnenarbeit sind ausreichende Fertigkeiten im Umgang mit Tabellenkalkulation und GeoGebra. Oftmals werden die erforderlichen Grundkenntnisse in den Fächern Mathematik und Informatik von den Lernenden erworben. Sollte dies jedoch nicht der Fall sein, bietet der Physikunterricht im Sinne eines fächerübergreifenden Unterrichts an dieser Stelle die Möglichkeit etwaige Lücken zu füllen. Der daraus erzielte Gewinn ist immens, da die Schülerinnen und Schüler nicht nur die Auswirkungen von Kräften auf einer theoretischen Ebene selbstständig erforschen, sondern auch noch ihre digitale Grundkompetenz trainieren und vertiefen können.[112]

Sollten die nötigen Grundkenntnisse über den Umgang mit GeoGebra sowie der Tabellenkalkulation nicht vorhanden sein, so besteht die Möglichkeit die vorgefertigten GeoGebra-Applets den Schülerinnen und Schüler zur Verfügung zu stellen. Dies hat jedoch eine geringere Eigenständigkeit zu Folge. Über Schieberegler können die Lernenden zumindest die Anfangsdaten variieren und die daraus resultierenden Veränderungen im Weg-Zeit-Diagramm, sowie in der Wertetabelle analysieren. Auch hier ist das auserwählte Unterrichtsziel, dass die Schülerinnen und Schüler das Vorhersagepotenzial des zweiten Newtonschen Axioms für Bewegungsabläufe erfassen. Bei der Anwendung im Unterricht ist es aber wichtig, dass der Algorithmus, wie die Zahlen in der Tabelle zustande kommen, in den Grundzügen verstanden wird.[113]

[111] vgl. ebd.: S.11
[112] vgl. ebd.
[113] vgl. ebd.: S.12

Neben diesem Zugang ist es empfehlenswert über das Näherungsverfahren auch Realexperimente im Physikunterricht einzubinden. Dadurch ist es für die Schülerinnen und Schülern besser möglich den Zusammenhang zwischen Beobachtung und Theorie zu erkennen. Ein weiterer Vorteil, der nicht außer Acht gelassen werden darf, ist, dass das Lösungsverfahren auch eine solide Basis für spätere naturwissenschaftliche Studien darstellt. So wird den Schülerinnen und Schülern schon früh vermittelt, welche zentrale Rolle Differentialgleichungen bei der Beschreibung von dynamischen Systemen spielen. Auf dieses Wissen muss dann später nur mehr aufgebaut werden.[114]

9.2. Planungsraster

Im folgenden Abschnitt werden exemplarisch Planungsraster für 4 Physikeinheiten der 5. Klasse angeführt. Diese Planungen beziehen sich auf Physikstunden mit einer Dauer von 50 Minuten, können aber leicht für andere Unterrichtszeiten angepasst werden. Außerdem bezieht sich die Planung auf Klassen, die bereits über ausführliche GeoGebra- und Tabellenkalkulationskenntnisse verfügen. Sollte dies nicht der Fall sein, kann wenn gewünscht, mehr Zeit investiert werden. Als weitere Voraussetzung wird ein vorangegangenes Besprechen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung sowie des zweiten Newtonschen Axioms angesehen.

1. Unterrichtseinheit

Zeit	Phase	Inhalt	Sozialform	Materialien
10’	Wiederholung	genaue Wiederholung: gleichmäßig beschleunigte Bewegung, 2. Newtonsches Gesetz SuS müssen nicht mitschreiben, sondern sollen sich aufs Mitdenken konzentrieren (da die Formeln etc. bereits im Heft/in der Mappe notiert sind)	Plenum	-

[114] vgl. ebd.

10’	Erklärung	2. Newtonsche Gesetz wird in der Form $a = \frac{F}{m}$ notiert. Es werden die Zusammenhänge der einzelnen Größen analysiert. Wichtig ist hierbei die Thematisierung, dass bei gegebener Kraft *F* der Bewegungsablauf vorhergesagt werden kann und das Kräfte auch vom Ort abhängen können. SuS sollen das gemeinsam Erarbeitete in ihr Heft/ihre Mappe übertragen	Plenum	-
15’	Experiment	Die Lehrperson baut das Experiment (Feder mit Masse auf Stativ) auf. Es wird die Kraft, die wirkt, variiert und die SuS sollen Vorhersagen zur erwarteten Bewegung treffen. Es werden jeweils die Masse und die Federart verändert und die Ergebnisse analysiert. -> Je nach Ausstattung der Physiksammlung kann das Experiment auch von den SuS in Gruppenarbeiten durchgeführt werden.	Plenum	versch. Federn, unterschied-liche Massen, Stativ
15‘	Ergebnisse	Die SuS müssen die wichtigsten Erkenntnisse in ihren Aufzeichnungen selbstständig festhalten. Gemeinsam wird die Formel für die Federkraft $F = -k \cdot x$ notiert und die Erkenntnisse der SuS besprochen.	zuerst Einzelarbeit, dann Plenum	

Tabelle 12: Planungsraster 1. Unterrichtseinheit

2. Unterrichtseinheit

Zeit	Phase	Inhalt	Sozialform	Materialien
10‘	Wiederholung	gemeinsame Wiederholung der wichtigsten Erkenntnisse aus der letzten Stunde	Plenum	-
10‘	Erarbeitung	Beschreibung von Bewegungen über kurze Zeitintervalle wird gemeinsam erarbeitet. SuS notieren das Tafelbild in der Mappe/im Heft	Plenum	-
15‘	Erarbeitung	Gemeinsame Erarbeitung des Näherungsverfahrens (1. Schritt) und Berechnung mittels Tabellenkalkulation und Visualisierung mit GeoGebra. Die SuS antworten auf Fragen durch die Lehrperson und notieren den Lösungsalgorithmus in ihren Aufzeichnungen.	Plenum	Computer mit GeoGebra, Beamer
15‘	Erarbeitung	SuS sollen in Partnerarbeit den verbesserten Lösungsalgorithmus mittels Hilfestellung durch die Lehrkraft möglichst selbstständig erarbeiten.	Partnerarbeit	-

Tabelle 13: Planungsraster 2. Unterrichtseinheit

3. Unterrichtseinheit

Zeit	Phase	Inhalt	Sozialform	Materialien
10‘	Zusammen-fassung	gemeinsames Zusammenfassen des Lösungsalgorithmus an der Tafel	Plenum	-
10‘	Erarbeitung	Anpassung des Lösungsalgorithmus für die Federkraft	Plenum	-
20‘	Erarbeitung	Je nach Ausstattung des Computersaals sollen die SuS in Einzel- oder Partnerarbeit den Lösungsalgorithmus für die Federkraft in GeoGebra mittels Tabellenkalkulation umsetzen. Je nach Fertigkeiten der SuS kann die Lehrperson einzelne Schritte über den Beamer vorzeigen oder das bereits fertige GeoGebra-Applet zur Verfügung stellen. Außerdem empfiehlt sich eine schrittweise Anleitung zum Umsetzen des Algorithmus in GeoGebra (siehe Kapitel 5.2).	Einzelarbeit/ Partner-arbeit	Computer mit GeoGebra, Beamer
10‘	Ergebnis	Die SuS sollen einzeln die erhaltene Bewegung beschreiben und analysieren.	Einzelarbeit	Computer mit GeoGebra

Tabelle 14: Planungsraster 3. Unterrichtseinheit

4. Unterrichtseinheit

Zeit	Phase	Inhalt	Sozialform	Materialien
10‘	Wiederholung	gemeinsame Wiederholung des Lösungsalgorithmus sowie der Umsetzung in GeoGebra	Plenum	-
10‘	Ergebnis	Die von den SuS in der letzten Einheit erworbenen Kenntnisse zu dem Bewegungsablauf werden miteinander besprochen. Der Begriff der Schwingung wird entweder von den SuS bereits genannt oder wenn nicht, von der Lehrperson eingeführt.	Plenum	-
20‘	Erarbeitung	Die SuS erhalten die bereits fertigen GeoGebra-Applets zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung und zum freien Fall mit Luftwiderstand. Hierbei sollen mittels der Schieberegler die Bewegungsabläufe analysiert und verschiedene Aufgaben (siehe Kapitel 6.1 und 6.4) gelöst werden.	Einzelarbeit/ Partnerarbeit	Computer mit GeoGebra
10‘	Ergebnis	Die Ergebnisse werden im Plenum miteinander verglichen.	Plenum	-

Tabelle 15: Planungsraster 4. Unterrichtseinheit

Durch die hier beschriebene sehr zeitintensive und genaue Einführung des Lösungsalgorithmus in der 5. Klasse, kann zu einem späteren Zeitpunkt auf dieses Wissen wieder zurückgegriffen werden. Da das Verfahren dann bereits bekannt ist, können die Schülerinnen und Schüler mit den fertigen GeoGebra-Applets arbeiten und auch andere Bewegungen, wie zum Beispiel die verschiedenen Schwingungsarten oder die Keplerbewegung, genauer analysieren. Es muss lediglich wiederholt und durch etwaige Anpassungen bezüglich der jeweiligen wirkenden Kraft abgeändert werden.[115]

[115] vgl. ebd.: S.13

10. Resüme

Als Abschluss meiner Diplomarbeit möchte ich noch ein kurzes Fazit ziehen. Das zweite Newtonsche Axiom ist ein essenzieller Grundpfeiler der klassischen Physik und sollte daher im Physikunterricht ausführlich behandelt werden. Gerade das Vorhersagepotential geht aus zeitlichen Gründen leider oftmals im Unterricht verloren. Wie bereits erwähnt wurde, liegt das auch daran, dass die Schülerinnen und Schüler einfach noch nicht über die mathematischen Kompetenzen verfügen, um Differentialgleichungen sinnvoll zu erfassen. Das hier vorgestellte Lösungsverfahren stellt einen Ausweg aus dieser Misere dar. Durch das numerische Lösungsverfahren muss die Differentialgleichung mathematisch nicht exakt gelöst werden, sondern über immer kleiner werdende Zeitintervalle wird die Lösung numerische gefunden. Mittels Tabellenkalkulation können diese Ergebnisse im Anschluss in GeoGebra grafisch dargestellt werden. Die daraus resultierenden Bewegungsabläufe können von den Schülerinnen und Schülern eigenständig beschrieben und analysiert werden. Das Kernstück meiner Diplomarbeit stellen die entwickelten GeoGebra-Applets dar, die im Physikunterricht für verschiedenste Bewegungsarten eingesetzt werden können. Diese ermöglichen es über Schieberegler die einzelnen Anfangsbedingungen, sowie die Intervallschritte zu variieren und die Veränderungen der Bewegungen zu analysieren. Somit wurde in dieser Diplomarbeit eine Möglichkeit aufgezeigt, das zweite Newtonsche Axiom in all seiner Bedeutung für Bewegungsabläufe zu erfassen.

11. Quellenverzeichnis

- Apolin, Martin: Big Bang – Physik 5 RG, öbv, 2007
- Apolin, Martin: Big Bang – Physik 5 RG. Vertiefung und Kompetenzüberprüfung, https://www.oebv.at/system/files/celum/376698_06_Geradlinige_Bewegung_Kompetenzen.567634.pdf, öbv, 2010 (23.03.2020)
- Embacher, Franz: Bewegungsgleichungen lösen im Physikunterricht?. https://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/Bewgl/, 2008 (20.09.2018)
- Embacher, Franz: Elemente der theoretischen Physik. Band 1: Klassische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie. Eine Einführung für das Lehramts- und Bachelorstudium, Vieweg+Teubner Verlag, 2010
- Nussbaumer, Peter; Nussbaumer, Alfred: Physik compact Basiswissen 5, öbv, 2016
- Nussbaumer, Peter; Nussbaumer, Alfred: Physik compact Basiswissen 6, öbv, 2017
- Putz, Bruno: Faszination Physik 5 bis 6, Veritas, 2018
- RIS: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 01.09.2018. https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2018-09-01 (15.02.2020)
- Schecker, Horst; Wilhelm, Thomas; Hopf, Martin; Duit, Reinders: Schülervorstellungen und Physikunterricht. Ein Lehrbuch für Studium, Referendariat und Unterrichtspraxis, Springer Spektrum, 2018

12. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Harmonischer Oszillator mit dem Euler-Cauchy-Verfahren........................19
Abbildung 2: Darstellung der Wertetabelle des harmonischen Oszillators in GeoGebra .28
Abbildung 3: Erstellung von Schiebereglern..29
Abbildung 4: Tabelle erstellen 30
Abbildung 5: Formeln kopieren 31
Abbildung 6: Polygonzug erzeugen 32
Abbildung 7: Liste von Punkten erzeugen 32
Abbildung 8: Bewegung des harmonischen Oszillators..33
Abbildung 9: Wechsel in die Algebra-Ansicht...33
Abbildung 10: Objektanzeige ausschalten..34
Abbildung 11: Objektbeschriftung ausschalten..35
Abbildung 12: GeoGebra-Applet des harmonischen Oszillators 36
Abbildung 13: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung 38
Abbildung 14: Harmonischer Oszillator - Polygonzug 40
Abbildung 15: Schieberegler automatisch animieren 41
Abbildung 16: Harmonischer Oszillator - Punktdiagramm...42
Abbildung 17: Mathematisches Pendel..43
Abbildung 18: Mathematisches Pendler für große Auslenkung..44
Abbildung 19: Mathematisches Pendel - Phasenraum 45
Abbildung 20: Freier Fall mit Luftwiderstand 47
Abbildung 21: Gedämpfte Schwingung 49
Abbildung 22: Gedämpfte Schwingung - Phasendiagramm 49
Abbildung 23: Erzwungene und gedämpfte Schwingung...51
Abbildung 24: Erzwungene und gedämpfte Schwingung - Resonanzkatastrophe............52
Abbildung 25: Erzwungene und gedämpfte Schwingung - Phasendiagramm 53
Abbildung 26: Keplerbewegung...55
Abbildung 27: Keplerbewegung - Punktdiagramm..55

13. Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Wertetabelle zur Visualisierung des Bewegungsablaufs 17
Tabelle 2: Wertetabelle harmonischer Oszillator 27
Tabelle 3: Einzugebende Formeln mit Verwendung von Schieberegler 30
Tabelle 4: Einzugebende Formeln ohne Verwendung von Schieberegler 30
Tabelle 5: Schiebereglereinstellungen bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung 37
Tabelle 6: Schiebereglereinstellungen beim harmonischen Oszillator 40
Tabelle 7: Schiebereglereinstellungen beim mathematischen Pendel 43
Tabelle 8: Schiebereglereinstellungen beim freien Fall mit Luftwiderstand 46
Tabelle 9: Schiebereglereinstellungen der gedämpften Schwingung 48
Tabelle 10: Schiebereglereinstellungen der erzwungenen und gedämpften Schwingung 51
Tabelle 11: Schiebereglereinstellungen bei der Keplerbewegung 54
Tabelle 12: Planungsraster 1. Unterrichtseinheit 69
Tabelle 13: Planungsraster 2. Unterrichtseinheit 70
Tabelle 14: Planungsraster 3. Unterrichtseinheit 71
Tabelle 15: Planungsraster 4. Unterrichtseinheit 72

14. Abstract

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem Lösen von Bewegungsgleichungen im Physikunterricht. Gleich zu Beginn der 5. Klasse der Sekundarstufe II stößt man im Unterricht auf eine fundamentale Bewegungsgleichung - „das zweite Newtonsche Axiom“. Leider wird das Gesetz von den Schülerinnen und Schülern häufig nur als Möglichkeit eine bestimmte Kraft auszurechnen aufgefasst. Die grundlegende Bedeutung als Differentialgleichung und den damit verbunden Vorhersagepotential für Bewegungen wird aufgrund der fehlenden mathematischen Kompetenzen im Unterricht nicht ausreichend behandelt. Ziel dieser Diplomarbeit war es eine numerische Lösungsmethode dieser Differentialgleichung vorzustellen. Ist den Schülerinnen und Schüler erst einmal der Lösungsalgorithmus bekannt, kann je nach wirkender Kraft, die resultierende Bewegung analysiert werden. Folgende Bewegungsarten werden in dieser Arbeit unter anderem behandelt: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung, Freier Fall mit Luftwiderstand, Harmonischer Oszillator, Mathematisches Pendel, Gedämpfte Schwingung, Erzwungene und gedämpfte Schwingung sowie die Keplerbewegung.

Zentraler Kernbereich dieser Diplomarbeit ist die Möglichkeit des numerischen Lösens der Bewegungsgleichungen im Physikunterricht. Diese Lösung wird nur mit Hilfe von Tabellenkalkulation im Programm GeoGebra geschafft. Im Zuge der Diplomarbeit wurden zu den unterschiedlichen Bewegungstypen GeoGebra Applets entwickelt, welche unter https://bettinasteindl.wordpress.com/materials/ zum Download zur Verfügung stehen. Diese Applets ermöglichen es den Schülerinnen und Schülern, mit Hilfe von Schiebereglern, die verschiedenen Bewegungen zu beschreiben und zu analysieren. Die Lernenden können selbstständig arbeiten und somit die durch eine gegebene Kraft hervorgerufene Bewegung zumindest näherungsweise selbst erfassen. Außerdem enthält die Arbeit exemplarisch einige Unterrichtseinheit, wie die Umsetzung konkret aussehen kann.