universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Multiple-Choice-Aufgaben und mathematische Fehlvorstellungen“

Verfasserin

Bernadette Maria Löffler

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, Juli 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 423 406
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Chemie UF Mathematik
Betreuer:	Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Abstract

In dieser Diplomarbeit werden mathematische Fehlvorstellungen zu den Themenbereichen „Brüche“, „Potenzen“, „Wurzeln“, „Gleichungen“ und „Ungleichungen“ näher betrachtet. Dazu werden sowohl typische Schüler- und Schülerinnenfehler, die in der Literatur zu finden sind, als auch häufige Fehler, die von den Studierenden der Fachhochschule Technikum Wien bei den Endtests der sogenannten Warm-up-Kurse gemacht werden, angeführt. Zu diesen Problembereichen wurden von der Autorin Multiple-Choice-Aufgaben erstellt, um durch Üben diesen Fehlern entgegen zu wirken.

Im Vorfeld wurden für diese Arbeit Interviews mit Teilnehmerinnen und Teilnehmern sowie Leiterinnen und Leitern dieser Warm-up-Kurse durchgeführt. Dabei wurde bestätigt, dass es auf der Mathematik-Übungsplattform, die den Studierenden zusätzlich zur Verfügung gestellt wird, zu wenig Auswahl an Multiple-Choice-Aufgaben gibt. Ebenso zeigten diese Interviews, in welchen mathematischen Inhalten die Studierenden große Schwierigkeiten haben und somit besondere Übung benötigen.

Den Abschluss der Arbeit bilden Gespräche mit Studierenden, bei denen ausgewählte Multiple-Choice-Aufgaben zum Themenbereich „Brüche“ gelöst und besprochen wurden. Hierbei wurde unter anderem festgestellt, dass die Studentinnen und Studenten das Üben mit Multiple-Choice-Aufgaben als sinnvoll empfinden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Fachhochschule Technikum Wien ist eine technische Hochschule im 20. Wiener Gemeindebezirk. Sie bietet 12 Bachelor- und 17 Master-Studiengänge an und ist in Österreich die größte rein technische Fachhochschule mit etwa 3800 Studentinnen und Studenten und bisher ungefähr 8000 Absolventinnen und Absolventen. Die Studierenden haben die Möglichkeit eines Vollzeitstudiums, eines Fernstudiums und/oder berufsbegleitend zu studieren. [3]

Da es viele Studentinnen und Studenten gibt, die bereits in der Studieneingangsphase scheitern und ihr Studium wieder abbrechen, bietet das Technikum Wien seit 2008 [16] vor Studienbeginn sogenannte Warm-up-Kurse (auch Brückenkurse oder Vorkurse genannt) in Mathematik, Informatik, Physik, Englisch und Elektrotechnik an. [5] Die Vorkurse in Mathematik finden vier Wochen lang im Ausmaß von 60 Stunden statt und „*dienen der Auffrischung und Wiederholung von mathematischen Grundlagen, die zu Studienbeginn vorausgesetzt werden.*“ [5] Sie sind freiwillig und sollen folgende Lehr- und Lerninhalte abdecken.

Die Lehr- und Lerninhalte der Warm-up-Kurse sind: [4]

- *Logik, Mengen, Zahlen*
- *Umformen von Termen (Ausmultiplizieren, Faktorisieren, Rechnen mit Brüchen, Potenzen, Logarithmen,. . .)*
- *Gleichungen (lineare, quadratische, logarithmische, Exponentialgleichungen)*
- *Prozentrechnung*
- *Einfache lineare Gleichungssysteme*
- *Ungleichungen*
- *Elementare Funktionen (Gerade, Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, Potenzfunktion, Winkelfunktionen)*
- *Einführung in die Differential- und Integralrechnung*

Seit Sommer 2013 steht den Studierenden zusätzlich zu den Warm-up-Kursen eine Mathematik Übungsplattform zur Verfügung. Diese Blended-Learning-Plattform soll „*dabei unterstützen im Selbststudium Zugriff auf einen fundierten Pool an Aufgaben mit Lösungen zu haben.*“ [2] Den Studentinnen und Studenten wird also die Möglichkeit geboten, durch Multiple-Choice-Aufgaben ihr Können und Wissen in den verschiedenen Themenbereichen zu überprüfen und zu vertiefen.

Florian Resch, der in seiner Diplomarbeit die Effektivität von Blended-Learning gestützten Brückenkursen [13] untersucht, gibt in eben dieser Arbeit Verbesserungsvorschläge und Anregungen der Studierenden zu dieser Übungsplattform an. Unter anderem wurde immer wieder der Wunsch nach einem größeren Aufgabenpool geäußert. Daher wurden im

Rahmen der vorliegenden Diplomarbeit Multiple-Choice-Aufgaben zu bestimmten Themenbereichen für diese Plattform erstellt.

Im Vorfeld wurden hierfür Interviews mit Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmern sowie Kursleiterinnen und Kursleitern durchgeführt, die in den Kapiteln 1.1 und 1.2 beschrieben werden. Der erste Teil dieser Diplomarbeit beschäftigt sich mit den erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sowie mit Fehlern, die sehr häufig sowohl von Schülerinnen und Schülern als auch von Studentinnen und Studenten gemacht werden. Es wurden Aufgaben zu den Themenbereichen „Brüche“, „Potenzen“, „Wurzeln“, „Gleichungen“ und „Ungleichungen“ erstellt. Den zweiten Teil und gleichzeitig auch den Abschluss dieser Arbeit bilden Gespräche mit Studierenden, die sich bereit erklärt haben, ausgewählte Multiple-Choice-Aufgaben zum Themenbereich „Brüche“ zu lösen und in einem 30- bis 40-minütigen Gespräch zu besprechen.

1.1 Interviews mit Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmern

Um einen Eindruck zu bekommen, wie zufrieden die Studierenden mit den Multiple-Choice-Aufgaben auf der Plattform sind, beziehungsweise welche Verbesserungsvorschläge sie haben, wurden im Oktober und November 2013 Interviews mit Studierenden, die im Sommer 2013 einen Warm-up-Kurs besuchten, durchgeführt. Vier Studentinnen und zwei Studenten erklärten sich dankenswerterweise bereit, in einem circa zehnminütigen Gespräch Rückmeldungen zu den Multiple-Choice-Aufgaben auf der Online-Übungsplattform sowie zur Plattform selbst zu geben. Zusammen mit Florian Resch wurde ein Interviewleitfaden erstellt. Im Folgenden wird aber nur auf den für diese Arbeit relevanten Teil der Interviews eingegangen.

1.1.1 Leitfaden

In den Interviews mit den Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmern sollen die angeführten Fragen beantwortet werden, wobei die Fragen 1 und 2 klären sollen, ob Mathematik dem/der Befragten leicht oder schwer fällt. Die Fragen 3-7 sollen, wie bereits erwähnt, Rückschlüsse über die Zufriedenheit der Studierenden geben und eventuell vorhandene Mängel aufdecken.

1. Wie ist Mathematik für dich? (Leicht? Schwierig?)

2. Wie war Mathematik für dich in der Schule?

3. Wie kommst/ kamst du mit der Aufgabenauswahl zurecht? Gibt es genug Aufgaben zum Üben oder hättest du gerne mehr Auswahl?

4. Gibt es ein (schwierigeres) Thema, zu dem du gerne mehr Multiple-Choice-Aufgaben zum Üben hättest?

5. Wie ist der Schwierigkeitsgrad derzeit und was wäre optimal?

6. Hast du bezüglich der Aufgaben irgendwelche Wünsche oder Anregungen?

7. Gibt es sonstige Bemerkungen zu den Multiple-Choice-Aufgaben?

1.1.2 Auswertung der Interviews

Die Befragten werden in diesem Kapitel als Studentin A, Studentin B, Studentin C, Student D, Student E und Studentin F bezeichnet. Passagen, die unter Anführungszeichen gesetzt sind, sind direkt aus den Interviews übernommen.

Wie ist Mathematik für dich? (Leicht/Schwierig?) Wie war Mathematik für dich in der Schule?

Für den Großteil der Befragten ist Mathematik nicht schwierig. Nur Studentin F würde sich eher als mittelmäßig bis schlecht einstufen, obwohl sie in der Schule eine relativ gute Schülerin war. Ihre Einstufung „mittel bis unten“ bezieht sie auf ihr Studium, da sie erst jetzt merke, „wo die Lücken sind“. Für Studentin C ist Mathematik teilweise leicht und teilweise schwierig. Sie hat keine Probleme bei logischen Dingen und in Algebra, die Theorie hingegen fällt ihr schwerer und sie sagt, dass sie „vor der Matura ausgestiegen ist“. Für die anderen Studierenden ist Mathematik leicht. Studentin B fällt Mathematik leicht, sie war aber in der Schule keine so gute Schülerin. Der Grund dafür war, dass sie sehr viel auswendig lernen musste.

Wie kommst/ kamst du mit der Aufgabenauswahl zurecht? Gibt es genug Aufgaben zum Üben? Hättest du gerne mehr Auswahl?

Student E findet, dass es „unbedingt mehr“ Aufgabenauswahl auf der Plattform geben sollte. Zwei Studierende sind der Meinung, dass es von Themengebiet zu Themengebiet Unterschiede gibt. Zu manchen Themen gibt es ausreichend Aufgaben, zu anderen wiederum zu wenig. Drei Studentinnen und Studenten finden die Auswahl „okay“. Wobei für Studentin B persönlich die Auswahl zwar „okay“ ist, fügt sie hinzu, dass „es nicht wahnsinnig viele Aufgaben sind“. Erwähnt wird auch, dass bei manchen Themengebieten immer wieder dieselben Multiple-Choice-Aufgaben bei einem Test kommen. (Anmerkung: Wenn die Studierenden auf der Plattform üben möchten, können sie einen Themenbereich auswählen und zu diesem Bereich einen Test machen. Dieser Test besteht aus acht Multiple-Choice-Aufgaben, die zufällig ausgewählt werden.)

Gibt es ein (schwierigeres) Thema, zu dem du gerne mehr Multiple-Choice-Aufgaben zum Üben hättest?

Studentin A findet, dass es bei jedem Themengebiet einen großen Aufgabenpool geben sollte, da die Problembereiche von Person zu Person verschieden sind. Für sie persönlich ist die „Mengenlehre“ schwieriger. Studentin B möchte bei den „Textbeispielen“ eine größere Aufgabenauswahl. Für Studentin C hingegen sind die Themenbereiche „Winkelfunktionen“ und „komplexe Zahlen“ schwierig und sie wünscht sich daher bei diesen beiden Bereichen mehr Aufgaben, insbesondere auch, weil sie der Meinung ist, dass es bei diesen beiden Themengebieten sehr wenig Multiple-Choice-Aufgaben gebe. Student E findet, dass es bei

„Funktionen“ zu wenig Auswahl gebe, während Studentin F den vorhandenen Aufgabenpool ausreichend findet. Student D hat den Warm-up-Kurs nur zur Wiederholung und Auffrischung besucht und konnte aus diesem Grund die Frage nicht beantworten.

Wie ist der Schwierigkeitsgrad derzeit und was wäre optimal?

Die Antworten auf diese Frage fielen sehr unterschiedlich aus. Während Studentin C der Meinung ist, dass die Aufgaben teilweise zu schwierig seien, findet Studentin B die Aufgaben „eher zu leicht“. Student E ist ebenso der Meinung, dass die Aufgaben schwerer sein könnten. Aus seiner Sicht wäre optimal, wenn die Aufgaben aufbauend sind und es eine Übersicht gibt, aus der man sich die Aufgabe, die man machen möchte, aussuchen kann. Student D kann zum Schwierigkeitsgrad keine Angaben machen und Studentin A sagt, dass es von Themengebiet zu Themengebiet unterschiedlich sei. Studentin F findet mittelschwere Aufgaben am besten, denn zu leichte Aufgaben seien langweilig und schwierige Aufgaben möchte man nicht rechnen.

In den Warm-up-Kursen gab es auch immer wieder Rückmeldungen von Studierenden, die überrascht waren, dass man bei manchen Multiple-Choice-Aufgaben (die sozusagen schwieriger oder aufwendiger sind) einen Zettel für eine Nebenrechnung braucht. Daher wurden die sechs Studierenden gefragt, ob sie dies als störend empfinden. Alle Befragten finden es aber in Ordnung, beziehungsweise finden es zwei Studentinnen sogar besser, wenn manchmal eine Nebenrechnung benötigt wird, „weil es der Praxis entspricht“. Studentin B meint, man könnte eventuell hinschreiben, dass ein Blatt Papier benötigt wird.

Hast du bezüglich der Aufgaben irgendwelche Wünsche/ Anregungen? Sonstige Bemerkungen zu den Aufgaben?

Folgende Wünsche/ Anregungen/ Verbesserungsvorschläge wurden genannt:

- Es soll einen Lösungsweg oder Informationsbutton geben. Wenn man also eine Aufgabe nicht lösen kann, soll die Möglichkeit bestehen, einen Tipp zu bekommen. Am idealsten dabei wäre, wenn man die Erklärung/ den Lösungsweg schrittweise öffnen könnte.

- Der Schwierigkeitsgrad soll einstellbar sein. (Die Studierenden, die diesen Wunsch geäußert haben, wussten nicht, dass dies möglich ist, wenn sie sich einloggen.)

- Es soll die Möglichkeit geben, wenn man eine Aufgabe nicht kann oder nicht machen möchte, sie zu überspringen. (Um eine Auswertung zu bekommen, muss man nämlich alle acht Multiple-Choice-Aufgaben lösen.)

1.2 Interviews mit den Lehrenden der Warm-up-Kurse

Im Jänner 2014 wurden mit den Lehrenden, die im Sommer 2013 einen Warm-up-Kurs gehalten haben, Interviews durchgeführt. Es wurden zwei Kursleiter und eine Kursleiterin in einem fünf- bis siebenminütigen Gespräch zu den im Kapitel 1.2.1 befindlichen Fragen interviewt.

1.2.1 Leitfaden

Ziel dieser Gespräche war es, in Erfahrung zu bringen, welche Themenbereiche den Studierenden am meisten Probleme bereiten und welche typischen Fehler gemacht werden. Ebenso ist es interessant zu wissen, ob die Plattform auch im Kurs verwendet wurde und welche Erfahrungen dabei gemacht wurden. Daher wurden folgende Fragen der Kursleiterin und den beiden Kursleitern gestellt:

1. Haben Sie die Mathematik Übungsplattform auch im Warm-up-Kurs verwendet?

   Wenn dies der Fall ist, werden noch folgende Fragen gestellt:

   a) Welche Erfahrungen haben Sie dabei gemacht?

   b) Gab es Probleme?

   c) Wie kamen Sie mit den Aufgaben zurecht? (Art/ Anzahl/ Schwierigkeitsgrad/...)

2. Hatten Sie den Eindruck (soweit Sie diese Frage beantworten können), dass die Studierenden die Übungsplattform (auch) privat nutzten?

   Wenn diese Frage mit „Ja“ beantwortet werden kann, werden noch folgende Fragen gestellt:

   a) Haben die Studierenden davon profitiert? (Eindruck - falls möglich)

   b) Gab es diesbezüglich irgendwelche Rückmeldungen?

3. Welche Themengebiete haben Sie ausführlicher behandelt/ welche weniger?

4. Welche Themengebiete sind erfahrungsgemäß am schwierigsten für die Studierenden? (Wo bedarf es der meisten Übung?)

5. Gibt es typische Fehler, an die Sie sich erinnern?

1.2.2 Auswertung

Die Befragten werden als Kursleiter A, Kursleiter B und Kursleiterin C bezeichnet.

Haben Sie die Mathematik Übungsplattform auch im Warm-up-Kurs verwendet?

Alle Befragten haben die Übungsplattform zu Beginn des Kurses den Studierenden vorgestellt, um zu zeigen, dass es die Plattform gibt und wie sie bedient wird. Kursleiter A und Kursleiter B haben in den ersten Einheiten des Warm-up-Kurses auch immer wieder Aufgaben von der Plattform verwendet. Kursleiter A erschien die Übungsplattform aber nicht sehr dafür geeignet, sie im Kurs zu verwenden und hat sie deshalb nicht weiter im Kurs eingesetzt. Er hat den Studentinnen und Studenten aber immer wieder nahe gelegt, sie zu nutzen. Kursleiterin C hat die Übungsplattform ebenfalls den Studierenden gezeigt und diese auch aufgefordert, sie zu verwenden. Da aber am nächsten Tag ein Student mit einer Liste von Fehlern, die er gefunden hatte, zu ihr kam, hat sie (mit Rücksprache) die Plattform nicht mehr verwendet.

Hatten Sie den Eindruck, dass die Studierenden die Lernplattform (auch) privat nutzten? Haben die Studierenden davon profitiert?

Kursleiter A sagt, dass nach den eigenen Angaben der Studentinnen und Studenten nur wenige die Plattform oft benutzt haben. Ob sie profitiert haben, ist schwer zu sagen, aber Kursleiter A glaubt schon.

Kursleiter B: „Ich habe dann gemerkt, sie tun sowieso was, sie haben gesagt sie benutzen sie und dann gab es ein paar, die sowieso gemeint haben, sie haben keine Zeit für mehr. [...] Immer schwierig das abzuschätzen [...], weil was wäre gewesen, wenn sie es nicht gemacht hätten. Woran erkennt man das. Aber ich hatte schon den Eindruck, dass es ihnen etwas bringt“, wenn sie die Plattform verwenden.

Kursleiterin C: „Meine [KursteilnehmerInnen] haben sie glaub ich nicht mehr weiter verwendet. [...] Ich habe gesagt, sie sollen es dann lassen, weil offensichtlich noch so viele Fehler sind.“

Es gab folgende Rückmeldungen von den Studierenden:

- Die Übungsplattform ist nützlich.
- Die Plattform gefällt den Studierenden sehr gut.
- Es gibt zu wenig Aufgaben.
- In manchen Themenbereichen gibt es noch keine oder zu wenig Aufgaben.
- Die Aufgaben sind zu schwierig.
- Die Aufgaben beinhalten einen anderen Themenbereich als gewählt wurde.

Welche Themen haben Sie ausführlicher behandelt?

Es wurden folgende Themen, die ausführlicher behandelt wurden, genannt:

Kursleiter A:

- Fallunterscheidungen - Aufgrund der Erfahrungen, die er im Jahr zuvor gemacht hat und weil es ihn interessiert hat, warum Fallunterscheidungen so schwierig für die Studierenden sind.
- Differenzieren und die Bedeutung der Ableitung - Da das Differenzieren oft mechanisch gemacht wird und ihm ein Anliegen ist, dass die Studierenden auch Anwendungsaufgaben können.

Kursleiter B:

- Einerseits hat er den Schwerpunkt auf die Themen gelegt, die die Studierenden aus seiner Sicht brauchen, andererseits aber auch auf das, was sie noch nicht so gut konnten.

- Trigonometrie - Weil dieser Themenbereich sehr große Anwendungen in der Technik hat.
- Differenzieren und Integrieren - Weil die Studierenden diese beiden mathematischen Inhalte in den ersten Lehrveranstaltungen benötigen.

Kursleiterin C:

Kursleiterin C hat die Themenbereiche, die für die Studierenden am schwierigsten waren, am ausführlichsten gemacht.

- Umformung von Termen
- Rechnen mit Potenzen und Wurzeln
- Quadratische Gleichungen
- Ungleichungen
- Wurzelgleichungen
- Bruchterme

Welche Themengebiete sind erfahrungsgemäß am schwierigsten für die Studierenden?

Nach den Gesprächen stellte sich heraus, dass folgende Themen für die Studierenden am schwierigsten sind:

- Fallunterscheidungen
- Ungleichungen
- Rechnen mit Potenzen
- Rechnen mit Klammern
- Rechnen mit Logarithmen
- Alles, was über die pure Anwendung von Rechenregeln und einfachen Beispielen hinausgeht.
- Exponentialgleichung
- Funktionen
- Umformung von Termen

Gibt es typische Fehler, an die Sie sich erinnern?

Hier wurden folgende Fehler von den Befragten genannt:

- Fallunterscheidungen - Hier wurde vor allem beim Bestimmen der Lösungsmenge auf die Fallbedingung vergessen.
- Fehler im Umgang mit Klammern und Brüchen
- Wenn vor einer Klammer ein Minuszeichen steht, wird es oft nicht bei allen Gliedern des Terms in der Klammer angewendet, beziehungsweise die Klammer wird einfach weggelassen. Zum Beispiel: $-(3x+y-z) = -3x-y-z$ oder $-(3x+y) = -3x+y$
- Quadratische Gleichungen - Zum Beispiel, wenn in der allgemeinen Form einer quadratischen Gleichung das Vorzeichen von b negativ ist und die Lösungsformel angewendet wird, wird oft vergessen, dass „Minus mal Minus gleich Plus“ ist. Es wird also folgender Fehler gemacht: $ax^2 - bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

1.3 Fazit

Betrachtet man die Interviews mit den Studierenden, so kann man feststellen, dass die Hälfte der Befragten ein Vergrößern des Aufgabenpools auf der Plattform für notwendig hält. Ein Student sagt, dass es unbedingt mehr Auswahl geben solle, zwei weitere Studierende sind der Meinung, dass manche Themengebiete zu wenig Auswahl an Multiple-Choice-Aufgaben haben. Die anderen finden die Auswahl zwar „okay“, fügen aber hinzu, dass es nicht sehr viele Aufgaben seien. Da aber nur sechs Studierende befragt wurden, ist dieses Ergebnis nicht sehr aussagekräftig. Ebenso muss angemerkt werden, dass die befragten Studentinnen und Studenten zufällig diejenigen waren, für die Mathematik nicht allzu schwierig ist. Deshalb wurden auch eine Kursleiterin und zwei Kursleiter befragt, ob es Rückmeldungen zu den Multiple-Choice-Aufgaben auf der Übungsplattform gab. Eine dieser Rückmeldungen war, dass es zu wenig Aufgaben gebe. Es kann also festgehalten werden, dass es mehr Multiple-Choice-Aufgaben geben soll.

Da ich nicht zu allen Themenbereichen Multiple-Choice-Aufgaben entwickeln konnte, stellte sich für mich natürlich die Frage, welche Themengebiete ausgewählt werden sollen. Die befragten Studierenden, die, wie bereits erwähnt, relativ gute Mathematikerinnen und Mathematiker sind, nannten alle unterschiedliche Themenbereiche, für die es ihrer Meinung nach mehr Aufgaben geben soll. Diese waren „Mengenlehre“, „Textbeispiele“, „Winkelfunktionen“, „Komplexe Zahlen“ und „Funktionen“. Die Themengebiete, die laut Lehrenden erfahrungsgemäß für den Großteil der Studierenden am schwierigsten sind, sind unter anderem „Fallunterscheidungen“, „Ungleichungen“, „Potenzen“, „Termumformungen“ und „Rechnen mit Klammern“.

Um eine Entscheidung, zu welchen Themengebieten Multiple-Choice-Aufgaben erstellt werden sollen, zu treffen, habe ich nicht nur die Interviews mit den Studierenden sowie den Kursleitern und der Kursleiterin herangezogen, sondern auch die Endtests der Studierenden vom Sommer 2013. Endtests (siehe Anhang) sind Tests, die am Ende der Warm-up-Kurse von den Studierenden absolviert werden. Zusammen mit den Anfangstests, die am Beginn der Kurse durchgeführt werden, sollen sie der Qualitätsverbesserung der Kurse, sowie zur Messung des Leistungszuwachses dienen, nicht aber der Beurteilung. Sie wurden 2012 im Rahmen einer Diplomarbeit von Carina Heiss erstellt, um die Effizienz dieser Warm-up-Kurse zu untersuchen. [9]

Es wurden schließlich zu den Themengebieten „Brüche“, „Potenzen“, „Wurzeln“, „Gleichungen“ und „Ungleichungen“ Multiple-Choice-Aufgaben erstellt. Fallunterscheidungen, die laut Lehrenden zu den für die Studierenden schwierigsten Themenbereichen gehören, kann man bei „Ungleichungen“ sowie „Betragsgleichungen“ (siehe Gleichungen) finden.

Eine weitere Rückmeldung (siehe Interviews mit den Lehrenden der Warm-up-Kurse) war, dass die Aufgaben zu schwierig sind. Außerdem möchte man auch den Studierenden, die schon länger nichts mit Mathematik gemacht haben - zum Beispiel Studierende, die schon einige Jahre im Berufsleben standen und stehen - oder die in Mathematik nicht so gut sind, die Möglichkeit geben, schrittweise ihre Mathematikkenntnisse wieder aufzufrischen. Aus diesen beiden Gründen sollen also auch (sehr) einfache Multiple-Choice-Aufgaben auf der Übungsplattform zur Verfügung gestellt werden.

Zusammenfassend:
Es soll mehr Multiple-Choice-Aufgaben geben.
Es soll auch einfache Aufgaben geben.

1.4 Erklärungen

Für das Erstellen der Multiple-Choice-Aufgaben wurden einerseits typische in der fachdidaktischen Literatur dokumentierte Schüler- und Schülerinnenfehler sowie andererseits häufige Fehler, die von den Studierenden in den Endtests gemacht wurden, herausgearbeitet. Zu Letzterem wurden die Endtests von 125 Studierenden herangezogen. Manchmal, aber nicht immer, wird in den folgenden Kapiteln auch die Häufigkeit, mit der ein Fehler auftritt, angegeben. Dies soll nur der Veranschaulichung dienen, ob ein Fehler häufig oder vereinzelt auftritt, und ist keine quantitative Analyse. In den folgenden Kapiteln werden zu den jeweiligen Fehlern/ Problembereichen die dazu erstellten Multiple-Choice-Aufgaben angeführt. Manchmal kann eine Aufgabe zwei oder mehreren Problembereichen zugeordnet werden, ich habe mich aber für eine Zuordnung zu einem dieser Bereiche entschieden. Außerdem wurde beim Erstellen der Aufgaben darauf geachtet, dass nur nach wahren/ richtigen Aussagen gefragt wird. Dies wurde gemacht, um zu verhindern, dass die Studierenden unnötig verwirrt werden und eventuell bereits an der Aufgabenstellung scheitern.

Teil 1
Erstellung von Multiple-Choice-Aufgaben und Herausarbeiten von mathematischen Fehlvorstellungen

2 Brüche

Für das Erstellen der Multiple-Choice-Aufgaben zum Themenbereich „Brüche“ suchte ich zuerst in der fachdidaktischen Literatur nach typischen Schüler- und Schülerinnenfehlern. Zu diesen Fehlern entwickelte ich dann Aufgaben, die ein Üben eben dieser Problembereiche ermöglichen sollen. Ebenso ist in diesem Kapitel eine Auflistung einiger Fehler der Studierenden aus den Endtests mit den dazu entwickelten Multiple-Choice-Aufgaben zu finden.

Wie in Kapitel 1 bereits erwähnt, will man auch einfache Multiple-Choice-Aufgaben auf der Übungsplattform zur Verfügung stellen. Ein paar von der Autorin entwickelten Aufgaben sind hier angeführt:

B1.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{9}{3} = 3$

b) $\frac{9}{0} = 0$

c) $\frac{9}{0} = 1$

d) $\frac{9}{2} = 4,5$

B2.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{20}{10} = 2$

b) $\frac{77}{3} = 25$

c) $11,6 = \frac{58}{5}$

d) $\frac{156}{9} = 17,3$

B3.) Welche Brüche sind richtig gekürzt?

a) $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{99}{22} = \frac{9}{2}$

c) $\frac{24}{16} = \frac{6}{4}$

d) $\frac{48}{38} = \frac{4}{3}$

B4.) Welche Brüche sind richtig gekürzt?

a) $\frac{172}{36} = \frac{86}{18}$

b) $\frac{172}{36} = \frac{43}{9}$

c) $\frac{172}{36} = \frac{32}{6}$

d) $\frac{172}{36} = 5$

2.1 Literatur

Für den Themenbereich „Brüche“ ist es nicht schwierig, in der fachdidaktischen Literatur typische Schüler - und Schülerinnenfehler zu finden. In diesem Abschnitt werden aber vor allem ein Buch von Friedhelm Padberg und ein Artikel aus der Zeitschrift „Mathematik Lehren“ herangezogen.

2.1.1 Buch: Didaktik der Bruchrechnung

In „Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung“ von Friedhelm Padberg [10] kann man folgende Fehler zur Bruchrechnung, die von Schülerinnen und Schülern häufig gemacht werden, finden:

1. **Addition/Subtraktion zweier Brüche beziehungsweise einer ganzen Zahl und einem Bruch**
   Beispiele für Fehlvorstellungen:

   i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ beziehungsweise $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$
   ii) $\frac{a}{b} + c = \frac{a+c}{b}$ beziehungsweise $\frac{a}{b} - c = \frac{a-c}{b}$
   iii) $a + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ beziehungsweise $a - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   B5.) Welche Rechnungen sind richtig?
   a) $\frac{17}{5} - 1 = \frac{12}{5}$
   b) $\frac{6}{4} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$
   c) $\frac{7}{5} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
   d) $\frac{23}{7} - \frac{1}{9} = \frac{200}{63}$

   B6.) $\frac{9}{7} - \frac{2}{3} =$
   a) $\frac{7}{4}$
   b) $\frac{1}{7}$
   c) $-\frac{11}{7}$
   d) $\frac{13}{21}$

   B7.) $8 - \frac{3}{2} =$
   a) $\frac{5}{2}$
   b) 6,5
   c) $\frac{13}{2}$
   d) $\frac{5}{6}$

B8.) $\frac{14}{5} + \frac{4}{2} =$

a) $\frac{18}{7}$

b) $\frac{48}{10}$

c) $\frac{28}{5}$

d) $\frac{24}{5}$

B9.) $\frac{7}{3} + 1 =$

a) $\frac{8}{3}$

b) $2{,}\dot{6}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $3{,}\dot{3}$

B10.) Welche Rechnungen sind richtig?

a) $\frac{17}{15} + \frac{1}{2} = \frac{18}{17}$

b) $\frac{16}{5} + \frac{5}{3} = \frac{16}{3}$

c) $1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5}$

d) $3 + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

e) $3 + \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$

B11.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

b) $a - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

d) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{a \cdot c}$

B12.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{a}{b} + c = \frac{a+c}{b}$

b) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

c) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

2. **Multiplikation zweier Brüche oder Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Bruch**
   Beispiele für Fehlvorstellungen:
   i) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$
   ii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{2b}$
   iii) $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ beziehungsweise $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   B13.) Welche Aussagen sind wahr?
   a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$
   b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b+b}$
   c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b^2}$
   d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{2b}$

   B14.) $3 \cdot \frac{4}{3} =$
   a) 4
   b) $\frac{12}{9}$
   c) $\frac{12}{3}$
   d) $\frac{12}{6}$

   B15.) $\frac{3}{9} \cdot \frac{7}{9} =$
   a) $\frac{21}{18}$
   b) $\frac{21}{81}$
   c) $\frac{10}{18}$
   d) $\frac{7}{27}$

   B16.) Welche Aussagen sind wahr?
   a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$
   b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$
   c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$
   d) $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{10} = \frac{8}{60}$

B17.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $n + \frac{a}{b} = \frac{n+a}{b}$

b) $n = \frac{n}{n}$

c) $\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

d) $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$

e) $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$

3. **Division zweier Brüche beziehungsweise einer ganzen Zahl und einem Bruch**
   Beispiele für Fehlvorstellungen:

   i) $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a:c}{b}$

   ii) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d}$

   iii) $\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

   iv) $a : \frac{a}{b} = \frac{a:a}{b} = \frac{1}{b}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

B18.) $\frac{10}{9} : \frac{5}{9} =$

a) $\frac{2}{9}$

b) 2

c) $\frac{5}{9}$

d) $\frac{1}{2}$

B19.) $\frac{4}{7} : \frac{3}{4} =$

a) $\frac{16}{21}$

b) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{21}{16}$

d) $\frac{7}{3}$

B20.) $\frac{1}{3} : 8 =$

a) 24

b) $\frac{8}{24}$

c) $\frac{8}{3}$

d) $\frac{1}{24}$

B21.) $7 : \frac{7}{9} =$

a) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{49}{9}$

c) 9

d) $\frac{49}{63}$

B22.) $7 : \frac{5}{9} =$

a) $\frac{63}{5}$

b) $\frac{2}{9}$

c) $\frac{5}{63}$

d) $\frac{35}{63}$

B23.) Welche Rechnungen sind richtig?

a) $5 : \frac{5}{2} = 2$

b) $7 : \frac{3}{14} = \frac{3}{7 \cdot 14} = \frac{3}{98}$

c) $\frac{18}{5} : 2 = \frac{9}{5}$

d) $\frac{4}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

B24.) Welche Rechnungen sind richtig?

a) $\frac{18}{5} : 18 = \frac{1}{5}$

b) $\frac{18}{5} : 18 = \frac{0}{5} = 0$

c) $18 : \frac{18}{5} = 5$

d) $18 : \frac{18}{5} = \frac{1}{5}$

B25.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a:c}{b}$

b) $\frac{7}{8} : \frac{3}{8} = \frac{7}{3}$

c) $\frac{4}{9} : \frac{1}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$

e) $\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

B26.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{8}{9} : 5 = \frac{40}{45}$

b) $8 : \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

c) $\frac{7}{6} : \frac{3}{4} = \frac{14}{9}$

d) $7 : \frac{7}{6} = 6$

4. Viele Schülerinnen und Schüler haben große Schwierigkeiten beim **Ordnen von Brüchen der Größe** nach. Oft wird nur die Größe des Nenners oder Zählers zur Bestimmung der Ordnung der Brüche herangezogen. So glauben zum Beispiel viele, dass $\frac{4}{7}$ größer als $\frac{4}{5}$ sei, weil $\frac{4}{7}$ „*die größeren Zahlen hat*" [14]. Peter-Koop und Specht sprechen von einem „*Denken in ganzen Zahlen*" [14].

   Weitere Beispiele für Fehlvorstellungen:

   i) $\frac{1}{6} > \frac{1}{5}$, da $6 > 5$
   ii) $\frac{7}{9} > \frac{4}{5}$, da $7 > 4$
   iii) $\frac{4}{5} < \frac{1}{7}$, da $5 < 7$
   iv) $\frac{3}{4} < \frac{4}{7}$, da $3 < 4$ und $4 < 7$

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   B27.) Welche Zahl ist am größten?

   a) $\frac{1}{3}$
   b) $\frac{5}{7}$
   c) $\frac{3}{4}$
   d) $\frac{3}{5}$

   B28.) Welche Zahl ist am kleinsten?

   a) $\frac{2}{3}$
   b) $\frac{5}{8}$
   c) $\frac{7}{9}$
   d) $\frac{4}{5}$

   B29.) Welche Aussagen sind wahr?

   a) $\frac{2}{5} > \frac{1}{4}$
   b) $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$
   c) $1{,}2 > \frac{6}{5}$
   d) $\frac{13}{15} \geq \frac{65}{75}$

   B30.) Welche Aussagen treffen zu?

   a) $\frac{1}{1} < \frac{1}{2}$
   b) $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}$
   c) $\frac{1}{6} < \frac{1}{8}$
   d) $\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$

5. **Brüche wie $\mathbf{\frac{6}{12}}, \mathbf{\frac{4}{8}}, \mathbf{\frac{9}{18}}$:**

   Es wurde festgestellt, dass das Kürzen dieser speziellen Brüche vermehrt zu Problemen führt. Viele Schülerinnen und Schüler kürzen diese Brüche folgendermaßen: $\frac{6}{12} = \frac{1}{6}$.

   Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

   B31.) Welche Brüche sind richtig gekürzt?

   a) $\frac{6}{12} = \frac{1}{6}$
   b) $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$
   c) $\frac{16}{32} = \frac{4}{8} = \frac{1}{4}$
   d) $\frac{10}{20} = \frac{1}{10}$

2.1.2 Zeitschrift: Mathematik Lehren

Im Artikel „Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung“ aus „Mathematik Lehren“ [17] findet man folgende Probleme angeführt:

1. Vielen Schülerinnen und Schülern fällt die Vorstellung, dass zwischen zwei Bruchzahlen unendlich viele Bruchzahlen sind, schwer.

   Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

   B32.) Welche Aussagen treffen zu?

   a) Zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ gibt es keinen Bruch
   b) Zwischen $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{21}$ gibt es unendlich viele Bruchzahlen
   c) $\frac{11}{60}$ liegt zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$
   d) Die Brüche $\frac{23}{120}, \frac{22}{120}, \frac{21}{120}$ sind die einzigen drei Brüche, die es zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ gibt

2. Fehlvorstellungen treten auch bei der Multiplikation und Division von Brüchen und ganzen Zahlen auf. Für viele Schülerinnen und Schüler ist die Multiplikation ein Vergrößern und die Division ein Verkleinern. Dass bei der Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Bruch auch ein Verkleinern möglich ist, ist für viele unvorstellbar. Laut Susanne Prediger führt diese vertraute Operation der Multiplikation oder Division deshalb zu Verwirrungen, weil „*Grunderfahrungen und -überzeugungen über mathematische Operationen in Frage gestellt werden.*“ [12]

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

B33.) Welche Aussagen treffen zu?

a) $3 : \frac{5}{9} > 3$

b) $3 : \frac{5}{9} < 3$

c) $3 : \frac{11}{9} > 3$

d) $3 : \frac{11}{9} < 3$

B34.) Welche Aussagen treffen zu?

a) $8 \cdot \frac{9}{4} < 8$

b) $8 \cdot \frac{9}{4} > 8$

c) $8 \cdot \frac{3}{4} < 8$

d) $8 \cdot \frac{3}{4} > 8$

2.2 Endtest

In den folgenden beiden Kapiteln (2.2.1 und 2.2.2) werden Fehler aus den Aufgaben 3b und 6b des Endtests, die von den Studierenden in Bezug auf Brüche gemacht wurden, aufgelistet, ebenso die zu diesen Problembereichen erstellten Multiple-Choice-Aufgaben.

2.2.1 Endtest-Aufgabe 3b

Die Aufgabe 3b lautet im Endtest wie folgt:

Lösen Sie die folgende Gleichung: $\frac{15}{x} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2$

Bei dieser Aufgabe erreichten 76 von 125 Studierenden keinen Punkt. Davon haben 16 Studentinnen und Studenten nichts hingeschrieben beziehungsweise nur wenige (teilweise ungeschickte oder irrelevante) Umformungen durchgeführt und dann die Aufgabe nicht fertig gelöst. 18 Studierende erreichten einen halben Punkt und 31 Studierende einen Punkt.

Abbildung 2.1 zeigt ein Beispiel für eine ungeschickte Umformung mit anschließendem Nicht-Beenden der Aufgabe. Der erste Bruch wurde hier mit $2x^2$ und der zweite Bruch mit x erweitert, anstatt den kleinsten gemeinsamen Nenner zu wählen. Zusätzlich wurde hier auch noch ein Vorzeichenfehler gemacht. In der zweiten Zeile wird der Zähler des zweiten Bruchs nicht mehr vom Zähler des ersten Bruchs subtrahiert, sondern addiert.

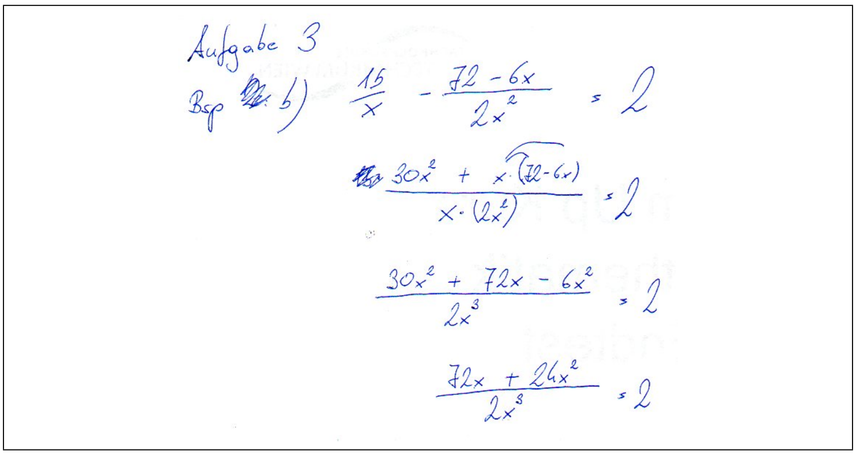


Abbildung 2.1: Beispiel für eine ungeschickte Umformung mit anschließendem Nicht-Beenden der Aufgabe

Häufige Fehler

1. 38 Studentinnen und Studenten beachten das **Minuszeichen** vor dem zweiten Bruch nicht. Sie bringen die beiden Brüche auf gemeinsamen Nenner, setzen aber keine Klammer im Zähler des zweiten Bruchs:

$$\frac{15}{x} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{30x-72-6x}{2x^2} = 2$$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

B35.) Vereinfachen Sie: $\frac{7}{x} - \frac{1+2x^2}{3x^3} \cdot 10 = 5 \qquad (x \neq 0)$

a) $15x^3 - 41x^2 = -10$

b) $15x^3 - 230x^2 = -10$

c) $15x^3 - x^2 = -10$

d) $x^2 - 10 = 5$

B36.) Vereinfachen Sie: $\frac{1}{2} - \frac{3a-6}{8a}$

a) $\frac{a+6}{8a}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{a-6}{8a}$

d) $\frac{5a-6}{8a}$

B37.) Vereinfachen Sie: $\frac{1+8a}{2a} - \frac{6a+10}{5}$

a) $\frac{-12a^2+20a+5}{10a}$

b) $-12a+7$

c) $-12a^2+7$

d) $\frac{-12a^2+60a+5}{10a}$

B38.) Vereinfachen Sie: $\frac{6+5a}{4} - \frac{a-3}{6}$

a) $2+26a$

b) $\frac{24+13a}{12}$

c) $\frac{12+13a}{12}$

d) $1+13a$

B39.) Vereinfachen Sie: $\frac{1}{2} - \frac{a+4}{3} + \frac{2a-1}{6}$

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{a-2}{6}$

c) -1

d) 1

B40.) Vereinfachen Sie: $\frac{3}{a} - \frac{7+9a}{3a^2}$

a) $\frac{18a-7}{3a^2}$

b) 5

c) $\frac{7}{3a^2}$

d) $-\frac{7}{3a^2}$

B41.) Vereinfachen Sie: $-\frac{4}{5} + \frac{7a-1}{4} - \frac{a-3}{2}$

a) $\frac{9+5a}{4}$

b) $\frac{9+25a}{20}$

c) $\frac{19-25a}{20}$

d) $\frac{-51+25a}{20}$

2. Eine weitere häufige Fehlerquelle ist das „**Kürzen aus der Summe**“. Beispiele für diesen Fehler sind:

i) $\frac{72-6x}{2x^2} = \frac{72-6}{2x}$

ii) $\frac{15\cdot 2x^2-(72-6x)\cdot x}{x\cdot 2x^2} = \frac{15-(72-6x)}{1}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

B42.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{12b+a}{9} = \frac{4b+a}{3}$

b) $\frac{12b+a}{9} = \frac{12}{9}b + a$

c) $\frac{x \cdot x^2+15x+2x^2}{x} = \frac{1 \cdot x+15+2x}{1}$

d) $\frac{3x^2+5xy}{x} = 3x + 5y$

B43.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{\sin(x)}{x} = \sin(1)$

b) $\frac{\sin(x)}{x} = \sin(0)$

c) $\frac{3x+1}{3} = x + 1$

d) $\frac{3x+1}{3} = x + \frac{1}{3}$

B44.) Vereinfachen Sie: $\frac{72x^2+21x+9}{6x}$

a) $\frac{24x^2+7x+3}{2x}$

b) $72x^2 + 5$

c) $36x + 24$

d) $33x + 9$

B45.) Vereinfachen Sie: $\frac{ab \cdot a^2+6ab+a^3}{6a}$

a) $ab + b + a^2$

b) $\frac{a^2b+6b+a^2}{6}$

c) $\frac{ab+6b+a^2}{6}$

d) $a^2b + b + a^2$

B46.) Vereinfachen Sie: $\frac{70ab+45a^2+60a^2b^2}{5a^2b^2}$

a) 35

b) $70ab + 45a^2 + 12$

c) $\frac{14b+9a+12ab^2}{ab^2}$

d) $\frac{14a+9+12b}{b}$

B47.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{27a+9b^2}{9b^2} = 27a$

b) $\frac{27a+9b^2}{9b^2} = 3a+1$

c) $\frac{27a+9b^2}{9b^2} = \frac{3a}{b^2}+1$

d) $\frac{27a+9b^2}{9b^2} = \frac{3a+b^2}{b^2}$

B48.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{22a+11b}{11ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$

b) $\frac{22a+11b}{11ab} = 22+1 = 23$

c) $\frac{22a+11b}{11ab} = 22$

d) $\frac{22a+11b}{11ab} = \frac{2a+b}{ab}$

B49.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{31}{a} - \frac{28-7a}{2a^2} = \frac{31\cdot(2a^2)-(28-7a)\cdot a}{a\cdot(2a^2)} = 31-28+7a = 3+7a$

b) $\frac{5b^2+b^3+27b}{b^4} = b^2+32$

c) $\frac{15b^2+b^3+5b}{5b^4} = \frac{15b+b^2+5}{5b^3}$

d) $\frac{22}{a} - \frac{5+7a}{b} = \frac{22b-5+7a\cdot a}{ab} = \frac{7a^2+22b-5}{ab}$

B50.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{8a-2b}{-4b} = -\frac{8a}{2b}$

b) $\frac{30x^2-97-3x^2}{9x^2\cdot x} = \frac{27x^2}{9x^2\cdot x} - 97 = \frac{3}{x} - 97$

c) $\frac{30x^2-2x-4x^3}{2x} = 15x-1-2x^2$

d) $\frac{30x^2-2x-4x^3}{2x} = 15x-2x^2$

e) $-\frac{4a-b}{2b} = -\frac{2a-b}{b}$

3. Die beiden Brüche werden auf den gemeinsamen Nenner gebracht. Dabei machen die Studierenden verschiedene Fehler, die hier angeführt werden. (Wobei bei i noch ein zusätzlicher Fehler - es wurde aus der Summe gekürzt - gemacht wurde.)

   i) $\frac{15}{x} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{15}{x} - \frac{66}{2x} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad 15x - 66 = 2\cdot 2x$

   ii) $\frac{15}{x} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{15x-72+6x}{2x^2} = 2$

   iii) $\frac{15}{x} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{30x^2-72+6x}{2x^2} = 2$

   iv) $\frac{15}{x} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2\cdot 15^2}{2x^2} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2$

Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

B51.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{72-6x}{2x^2} = \frac{72-6}{2x} = \frac{66}{2x}$

b) $\frac{15}{x} - \frac{63-3x}{2x^2} = \frac{15x-63+3x}{2x^2}$

c) $\frac{15}{x} - \frac{63-3x}{2x^2} = \frac{15x-63-3x}{2x^2}$

d) $\frac{72-6x}{2x^2} = \frac{36-3x}{x^2}$

2.2.2 Endtest-Aufgabe 6b

Die Aufgabe 6b im Endtest lautet:

Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne negative Hochzahlen, Wurzeln, Doppelbrüche etc.)!

$$\left(a^3 \frac{1}{b^{-3}c^4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{(2c)^3}{(ab)^{-1}}\right)^3$$

Weitere Informationen zu dieser Aufgabe sind im Kapitel 3 zu finden.

Problembereich

Ein Problembereich bei dieser Aufgabe ist das Vereinfachen von Doppelbrüchen. Einige Studentinnen und Studenten formen diesen Term so um, dass sie einen Doppelbruch erhalten, können diesen dann aber nicht richtig vereinfachen und es kommt zu Fehlern. Manche dieser Fehler sind hier als Beispiele angeführt:

i) $\frac{2c^3}{\frac{1}{ab}} = \frac{2c^3}{ab}$

ii) $\frac{\frac{(2c)^3}{1}}{\frac{1}{ab}} = \frac{(2c)^3}{ab}$

iii) $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{b^3}{c^4}a^3} = \frac{c^4a^3}{b^3}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

B52.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{\frac{5a-c}{2}}{\frac{-b}{1}} = \frac{-5ab+bc}{2}$

b) $\frac{2a-\frac{b}{2}}{1-2b} = \frac{4a-b}{2-2b}$

c) $\frac{\frac{5a-c}{2}}{\frac{-b}{1}} = \frac{5a-c}{-2b}$

d) $\frac{2a-\frac{b}{2}}{1-2b} = \frac{2a-b}{2-4b}$

B53.) Vereinfachen Sie $\frac{a+\frac{2b-a}{3}}{4a-\frac{7a-b}{2}}$ so, dass keine Doppelbrüche vorkommen.

a) $\frac{4}{3}$

b) $-\frac{4b}{9a+3b}$

c) $\frac{(a+b)^2}{3}$

d) $\frac{4(a+b)}{3(a-b)}$

B54.) Vereinfachen Sie: $\frac{\frac{1}{2}-\frac{3a+5}{3}}{\frac{7}{9}+\frac{2}{3}a}$

a) $-\frac{3}{2}$

b) $\frac{39-18a}{14+12a}$

c) -6

d) $\frac{-(7+6a)^2}{54}$

B55.) Vereinfachen Sie: $\frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}a+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{15}a}{\frac{1}{7}:\left(\frac{3a}{7}+\frac{a}{14}\right)}$

a) $\frac{203a-28a^2}{60}$

b) $\frac{4a+1}{21a}$

c) $\frac{28a^2+7a}{12}$

d) $\frac{4a+1}{6a}$

B56.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{15a^2}{\frac{1}{ab}} = \frac{15a^2}{ab} = \frac{15a}{b}$

b) $\frac{\frac{a+b}{3}}{\frac{a-b}{3}} = \frac{a+b}{a-b}$

c) $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{a^2}{7}\cdot b} = \frac{7b}{a^2}$

d) $\frac{\frac{1}{1}}{5\cdot\frac{a}{b}} = \frac{b}{5a}$

B57.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{15a^2}{\frac{1}{ab}} = 15a^3b$

b) $\frac{\frac{2a}{1}}{\frac{1}{ab}} = \frac{2a}{ab} = \frac{2}{b}$

c) $\frac{1}{\frac{5a+c}{b}} = \frac{b}{5a+c}$

d) $\frac{\frac{3b}{1}}{\frac{1}{a}} = 3ab$

B58.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $-\frac{a-\frac{b}{3}}{\frac{c}{2}} = \frac{-2(a-b)}{3c}$

b) $\frac{\frac{3b}{a}-\frac{1}{5}}{-b\cdot 3} = \frac{3b-1}{-3ab+15b}$

c) $-\frac{a-\frac{b}{3}}{\frac{c}{2}} = -\frac{6a-2b}{3c}$

d) $\frac{\frac{3b}{a}-\frac{1}{5}}{-3b} = \frac{15b-a}{-15ab}$

e) $\frac{\frac{3b}{a}-\frac{1}{5}}{-3b} = \frac{15b-a}{-15ab} = \frac{-a}{-a} = 1$

B59.) Berechnen Sie: $\frac{\frac{1}{2}\cdot 3-(5\cdot\frac{3}{25}+\frac{8}{9}:\frac{4}{27})\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}\left((\frac{3}{7}+\frac{1}{2})\cdot\frac{2}{13}-\frac{4}{7}\right)}$

a) $\frac{14}{3}$

b) $-\frac{14}{3}$

c) $-\frac{6}{175}$

d) $\frac{175}{9}$

2.3 Weitere Aufgaben

In diesem Abschnitt sind noch weitere Multiple-Choice-Aufgaben angeführt, die den Aufgabenpool der Übungsplattform vergrößern und zur weiteren Übung und Vertiefung dienen sollen.

B60.) $\frac{7}{3} + 7 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$

a) $5 + \frac{7}{12}$

b) $\frac{67}{12}$

c) $\frac{47}{12}$

d) $\frac{8}{1}$

B61.) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{8}{9} - \frac{3}{4}\right) =$

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{42}$

c) $\frac{42}{5}$

d) $\frac{5}{3}$

B62.) $\left(3 \cdot \frac{5}{4}\right) - \left(2 : \frac{5}{6} + 1\right) =$

a) $\frac{7}{20}$

b) $\frac{117}{44}$

c) $\frac{11}{6}$

d) $-\frac{1}{6}$

B63.) $\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{5}\right) \cdot 3 - \left(\frac{9}{5} : 4\right) =$

a) $\frac{417}{140}$

b) $\frac{21}{4}$

c) $\frac{313}{90}$

d) $\frac{17}{4}$

B64.) Berechnen Sie: $\frac{3}{4} - \left(\frac{4}{7} : 4 + \frac{18}{5} \cdot \frac{10}{21}\right) \cdot 4$

a) $-\frac{187}{28}$

b) $-\frac{25}{4}$

c) $-(34 + \frac{3}{28})$

d) $-\frac{31}{28}$

B65.) Berechnen Sie: $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{9}{2} - (\frac{1}{4} + \frac{3}{6}) \cdot 4 + 5 \cdot (\frac{1}{8} : \frac{5}{64})\right)$

a) 11

b) $\frac{47}{4}$

c) 12

d) $\frac{38}{3}$

B66.) Berechnen Sie: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + (\frac{7}{8} - \frac{1}{3}) \cdot 8 - 13 \cdot (\frac{25}{3} : \frac{65}{12})\right)$

a) $-\frac{257}{12}$

b) $-\frac{179}{24}$

c) $\frac{257}{120}$

d) $-\frac{367}{24}$

B67.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{a}{4} \cdot \frac{b+2a}{2a^2} = \frac{b+2a}{8a}$

b) $\frac{1}{2} + x = \frac{x}{2}$

c) $\frac{4x+y-4xy}{4} = \frac{4(x+y-xy)}{4} = x + y - xy$

d) $\frac{a}{3} \cdot \frac{1+bc}{2} - ab = \frac{a \cdot 1 \cdot abc}{6} - ab$

e) $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot b - ab = \frac{2a}{2}b - ab = 0$

B68.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{4a-b}{b} = 4a - 1$

b) $\frac{4a-b}{4} \cdot \frac{2}{b-2b} = \frac{4a-b}{2} \cdot \frac{1}{b-2b} = \frac{4a-b}{-b}$

c) $\frac{a}{\frac{b}{2}} \cdot 2 = \frac{4a}{b}$

d) $\frac{a}{\frac{b}{2}} \cdot 2 = \frac{a}{b}$

3 Potenzen

In diesem Kapitel werden Grundlagen sowie typische Fehler zum Themenbereich „Potenzen“ näher betrachtet. Dazu werden einerseits wieder die Fehler der Studierenden aus den Endtests und die dazu erstellten Multiple-Choice-Aufgaben angeführt, andererseits werden aber auch grundlegenden Rechenregeln, die beim Rechnen mit Potenzen gekonnt werden müssen, aufgelistet. In den Abschnitten „Weitere Aufgaben 1“ und „Weitere Aufgaben 2“ gibt es zusätzliche Multiple-Choice-Aufgaben, die den Studierenden auf der Übungsplattform zur Verfügung gestellt werden und im Rahmen dieser Arbeit erstellt wurden.

3.1 Literatur

Wie bereits erwähnt, werden im Folgenden die Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen aufgelistet. Hierzu wurden das Buch „Taschenbuch Mathematischer Formeln“ [7] und die Internetseite http://www.mathe-online.at/ [1] herangezogen.

Es werden auch immer wieder mögliche Problembereiche beziehungsweise mögliche Fehler angeführt, die auch in den erstellten Multiple-Choice-Aufgaben eingebaut sind. Unter anderem können Fehler durch Übertragung von Regeln entstehen, wenn also zum Beispiel eine Regel, die für die Multiplikation gilt, auf die Addition übertragen wird. [15] Dieser Fehler wird im Folgenden als »**F1**« bezeichnet.

1. $\boldsymbol{a^0 = 1}$

   Möglicher Fehler: $a^0 = 0$

2. $\boldsymbol{(-a)^g = a^g}$ und $\boldsymbol{(-a)^u = -a^u}$, wenn g eine gerade ganze Zahl und u eine ungerade ganze Zahl ist

   Möglicher Fehler: $(-a)^g = -a^g$ oder $(-a)^u = a^u$

   Die zu diesen Problembereichen erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   P1.) Welche Rechnungen sind richtig?

   a) $(-5)^3 = -125$
   b) $(-5)^2 = -25$
   c) $-5^2 = -25$
   d) $(-5)^3 = 125$

P2.) Welche Rechnungen sind richtig?

a) $2^0 = 2$

b) $-2^2 = 4$

c) $(-2)^3 = -8$

d) $5^0 = 0$

P3.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $u^0 = 1$

b) $(-u^3) = u^3$

c) $u^0 = 0$

d) $(-u)^4 = u^4$

P4.) $a^3 - (-a)^3 =$

a) $2a^3$

b) 0

c) $a^3 + a^3$

d) a^6

3. **Multiplikation und Addition**

i) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

Mögliche Fehler: $a^m + b^m = (a + b)^m$ (F1) oder $a^m \cdot b^m = (a + b)^m$

ii) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Mögliche Fehler: $a^m + a^n = a^{m+n}$ (F1) oder $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ oder $a^m + a^n = a^{m \cdot n}$ (F1) oder $a^m \cdot a^n = (a \cdot a)^{m+n}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P5.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $2^m + 3^m = (2 + 3)^m = 5^m$

b) $2^m \cdot 3^m = (2 \cdot 3)^m = 6^m$

c) $2^r + 2^s = 2^{r+s}$

d) $2^r \cdot 2^s = 2^{r \cdot s}$

P6.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $x^7 - x^4 = x^{7-4} = x^3$

b) $x^7 + x^4 = x^{7 \cdot 4} = x^{28}$

c) $x^7 \cdot x^4 = x^{7 \cdot 4} = x^{28}$

d) $x^4 \cdot y^4 = (xy)^4$

P7.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $2^m + 3^m \neq (2+3)^m$

b) $a^m + b^m = (a+b)^m$

c) $2^m \cdot 3^m = (2+3)^m = 5^m$

d) $2^r \cdot 2^s = (2 \cdot 2)^{r+s} = 4^{r+s}$

P8.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$

b) $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$

c) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

d) $(a^m)^n = a^{m^n}$

P9.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $a^n + a^m = a^{n+m}$

b) $a^n + a^m \neq a^{n+m}$

c) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

d) $a^{m+n} \neq a^m \cdot a^n$

P10.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $a^n \cdot a^m = a^{n \cdot m}$

b) $a^n \cdot a^m \neq a^{n \cdot m}$

c) $(ab)^m = a^m b^m$

d) $(ab)^m \neq a^m b^m$

4. **Division und Subtraktion**

i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Mögliche Fehler: $\frac{a^m}{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$ oder $a^m - a^n = a^{m-n}$ (F1)

ii) $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$

Möglicher Fehler: $a^m - b^m = (a-b)^m$ (F1)

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P11.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $2^m : 3^m = \left(\frac{2}{3}\right)^m$

b) $2^m - 3^m = \left(\frac{2}{3}\right)^m$

c) $2^m : 2^n = 2^{\frac{m}{n}}$

d) $2^m - 2^n = 2^{m-n}$

P12.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$

c) $\frac{a^m}{b^m} = (a-b)^m, b \neq 0$

d) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

5. **„Potenzieren von Potenzen"**

i) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Mögliche Fehler: $(a^m)^n = a^{m+n}$ oder $(a^m)^n = a^{m^n}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P13.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $(a^3)^5 = a^{3+5} = a^8$

b) $(3^2)^3 = 9^3$

c) $(a^3)^5 = a^{3^5} = a^{243}$

d) $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$

P14.) $\left(2^{x^3}\right)^2 =$

a) 4^{x^3}

b) 2^{x^6}

c) 2^{2x^3}

d) 4^{x^6}

6. **Negative Exponenten**

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ und $(\frac{a}{b})^{-m} = (\frac{b}{a})^m$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P15.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1^m}{a^m}$

b) $\left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}$

c) $a^{-m} = (-1) \cdot a^m$

d) $a^{-1} = \frac{1}{a}$

P16.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a}{b^m}$

c) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

d) $a^m \cdot b^{-m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

P17.) $a^{-1} \cdot a^3 \cdot a^{-4} \cdot a^3 =$

a) $4a$

b) a

c) a^4

d) a^1

7. **Binomische Formeln** - mögliche Fehler:

i) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

ii) Vorzeichenfehler, wie $(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$

iii) $(ax+y)^2 = ax^2 + 2axy + y^2$

iv) $(a+b)^3 = a^3 + b^3$

v) $(a+b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P18.) $(xy+z)^2 =$

a) $x^2y^2 + 2xyz + z^2$

b) $x^2y^2 + z^2$

c) $x^2y^2 - z^2$

d) $x^2y^2 - 2xyz - z^2$

P19.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $(u-v)^2 = u^2 + v^2$

b) $(ab+c)^2 = a^2b + 2ab + c^2$

c) $(a+b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

d) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$

e) $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

P20.) $(u-v)^2 =$

a) $u^2 - v^2$

b) $u^2 + v^2$

c) $u^2 - 2uv + v^2$

d) $u^2 - 2uv - v^2$

P21.) $(1-a)^3 =$

a) $1 - a^3$

b) $1 + a^3$

c) $1 - 2a + a^3$

d) $1 - 3a + 3a^2 - a^3$

P22.) $(a-1)^2 + (-3)^3 - a + 7 =$

a) $a^2 - 3a - 19$

b) $a^2 + a - 19$

c) $a^2 - 3a + 35$

d) $a^2 - a + 33$

P23.) $(2+a)^2 - (7-a)(a+1) + (-5)^2 =$

a) $-4a + 36$

b) $2a^2 - 6a + 22$

c) $2(a^2 - a + 11)$

d) $-8a - 14$

3.2 Weitere Aufgaben 1

In den folgenden Multiple-Choice-Aufgaben kommen die oben angeführten Rechenregeln gemischt zur Anwendung. Sie sollen den Studierenden die Möglichkeit zur weiteren Übung und Vertiefung geben.

P24.) $2^3 + \frac{1}{2^{-3}} - a + (-2)^3 + 2^3 =$

a) $-a$

b) $2 \cdot 2^3 - a$

c) $4^3 - a$

d) $4 \cdot 2^3 - a$

P25.) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-3)^3 =$

a) 3

b) 1

c) -1

d) -3

P26.) $\left(-\frac{1}{a}\right)^3 \cdot a^2 =$

a) a

b) $-\frac{1}{a}$

c) $-a^{-1}$

d) $\frac{1}{a}$

P27.) $\left(\frac{v}{2}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{9}{u^{-1}}\right) \left(-\frac{4u}{3}\right)^{-1} =$

a) $-v^{-2}$

b) $-\frac{1}{v^2}$

c) $\frac{1}{v^2}$

d) v^{-2}

P28.) Berechnen Sie: $\left((-\frac{1}{2}a)^2 \cdot (-\frac{1}{2}b)^{-2}\right)^{-1} (-ab)^3$

a) ab^5

b) a^5b

c) $-ab^5$

d) $-a^5b$

3.3 Endtest

In diesem Kapitel werden einige Fehler, die die Studierenden in Bezug auf Potenzen in den Endtests gemacht haben, sowie die zu diesen Problembereichen erstellten Multiple-Choice-Aufgaben angeführt.

3.3.1 Endtest-Aufgabe 6

Die Aufgabe 6 des Endtests lautet:

Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne negative Hochzahlen, Wurzeln, Doppelbrüche etc.)!

a) $\sqrt[3]{\frac{16x^5z^{-10}}{64y^{-7}}}$

b) $\left(a^3\frac{1}{b^{-3}c^4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{(2c)^3}{(ab)^{-1}}\right)^3$

Nähere Informationen zur Aufgabe 6a sind im Kapitel 4 (Wurzeln) zu finden. Es werden aber die Fehler, die hinsichtlich Potenzen gemacht wurden, in diesem Kapitel angeführt.

Bei Aufgabe 6b erreichten 81 von 125 Studierenden keinen Punkt. Davon haben 21 Studentinnen und Studenten nichts hingeschrieben beziehungsweise die Aufgabe nicht soweit wie möglich vereinfacht oder nicht fertig gelöst. Ein Student/ eine Studentin erreichte einen halben Punkt und 43 Studierende einen Punkt.

Abbildung 3.1 zeigt ein Beispiel, bei dem ein Student/ eine Studentin nicht soweit wie möglich vereinfacht und somit die Aufgabe nicht fertig gelöst hat.

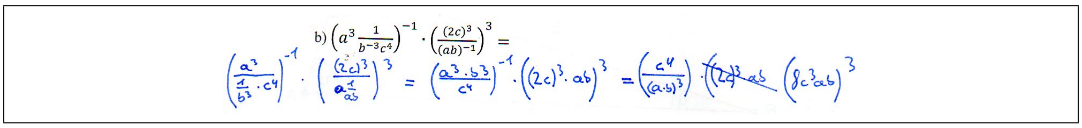


Abbildung 3.1: Beispiel für „Nicht soweit wie möglich vereinfacht“

Einige Studierende formen den Term von Aufgabe 6b auf einen oder mehrere Doppelbrüche um, wobei etliche Fehler gemacht werden. Auch „Kürzen aus der Summe“ ist eine häufige Fehlerquelle. Diese Fehler sind im Kapitel 2 (Brüche) angegeben. In diesem Kapitel werden nur die Fehler angeführt, die hinsichtlich Potenzen gemacht wurden.

Es gibt auch immer wieder Fehler, die ich als „nicht nachvollziehbare Fehler“ benennen möchte. Diese Fehler können zum Beispiel Abschreibfehler oder Schreibfehler sein. Manchmal wird eine Variable oder eine Zahl aus einem unerklärlichen Grund hinzugefügt oder eine Hochzahl, ein Vorzeichen vergessen.

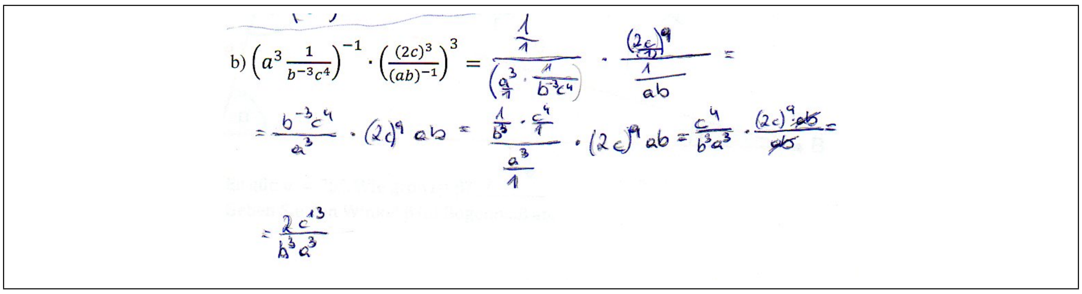


Abbildung 3.2: Beispiel für „Hinzufügen von Variablen“

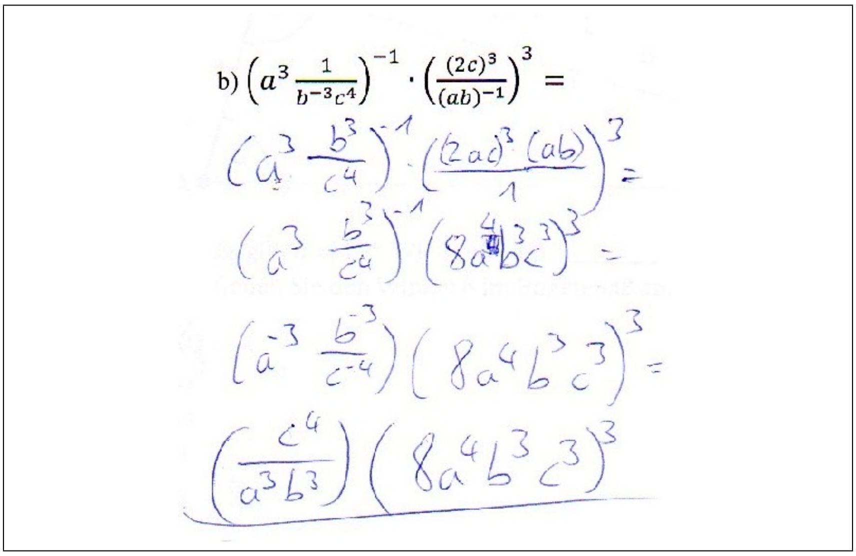


Abbildung 3.3: Beispiel für „Hinzufügen einer Variable“

Abbildungen 3.2, 3.3 und 3.4 sind Beispiele für „nicht nachvollziehbare Fehler“. In Abbildung 3.2 wird im 4. Schritt » $\frac{1}{ab}$ « hinzugefügt. Außerdem wird im 1. Schritt der Nenner des zweiten Bruchs und im letzten Schritt die Zahl vor der Variable nicht potenziert.

In Abbildung 3.3 wird ebenfalls eine Variable dazugeschrieben. (In der zweiten Zeile wird statt »$2c$« »$2ac$« geschrieben.) Auch wird die Aufgabe nicht soweit wie möglich vereinfacht und in der dritten Zeile wird b potenziert, was falsch ist. In Abbildung 3.4 wird beim zweiten Klammerausdruck auf die Potenz vergessen.

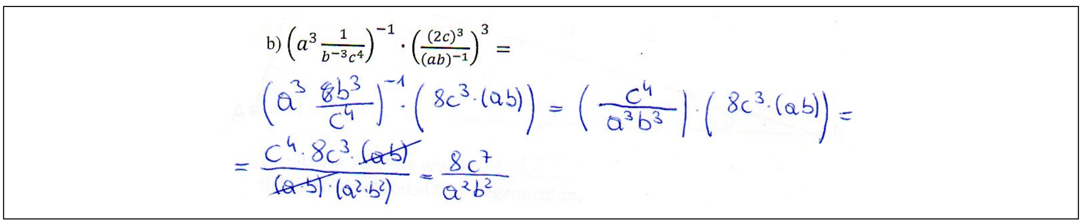


Abbildung 3.4: Beispiel für „Vergessen der Hochzahl“

3.3.2 Häufige Fehler

1. 52 Studentinnen und Studenten machen folgenden Fehler: Das Potenzieren eines Produkts oder Quotienten wird nicht vollständig bei allen Faktoren beziehungsweise Zählern und Nennern durchgeführt. Beispiele hierfür:

   i) $(2c)^9 = 2c^9$

   ii) $\left((2c)^3\right)^3 = (8c)^3$

   iii) $\left((2c)^3\right)^3 = 8c^9$

   iv) $\left(\frac{(2c)^3}{(ab)^{-1}}\right)^3 = 8c^9ab$

   v) $\left(\frac{2x^5}{8y^7}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2x^{\frac{5}{3}}}{8y^{\frac{7}{3}}}$

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   P29.) Welche Aussagen sind wahr?

   a) $(2c)^9 = 2c^9$

   b) $\left((2c)^3\right)^3 = 2c^6$

   c) $(2c^3)^3 = 8c^9$

   d) $\left((2c)^3\right)^3 = 8c^9$

   P30.) $(5a^2)^3 \cdot (25a)^{-1} =$

   a) $\frac{a^5}{5}$

   b) $25a^4$

   c) $5a^5$

   d) $(5a)^5$

   P31.) $(5a \cdot (-2b))^3 =$

   a) $10a^3b^3$

   b) $-40ab^3$

   c) $-10a^3b^3$

   d) $-1000a^3b^3$

P32.) $(-2xyz)^2 =$

a) $-2x^2y^2z^2$

b) $-4x^2y^2z^2$

c) $4x^2y^2z^2$

d) $4xyz$

P33.) $(3a)^3 - 3a^3 =$

a) 0

b) $24a^3$

c) 1

d) a^3

P34.) Vereinfachen Sie $\left(\frac{5b^3}{a^{-1}c^{-1}}\right)^2$ so, dass keine negativen Exponenten auftreten!

a) $\frac{25b^6}{a^{-2}c^{-1}}$

b) $25a^2b^6c^2$

c) $5a^2b^6c^2$

d) $25ab^6c$

P35.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{a^5}{b^2}\right)^{-1} = \frac{a^4}{b}$

b) $\frac{(2c)^9}{(ab)^{-3}} = 2c^9ab^3$

c) $(2c^3ab)^3 = 8c^3a^3b^3$

d) $\left(\frac{a^2b}{c}\right)^{-2} = \frac{c^2}{a^4b^2}$

P36.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{2a^2b^3}{5a}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}b}{\frac{5}{3}a^{\frac{1}{3}}}$

b) $\left(\frac{2a^2b^3}{5a}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2a^{\frac{2}{3}}b}{5a^{\frac{1}{3}}}$

c) $\left(\frac{2a^2b^3}{5a}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b}{5^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}}$

d) $\left(\frac{2a^2b^3}{5a}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}b = \left(\frac{2}{5}a\right)^{\frac{1}{3}}b$

P37.) Vereinfachen Sie $\sqrt[3]{\frac{18a^7b^{-3}}{21c^{-4}}}$ so, dass keine negativen Exponenten und Wurzeln vorkommen.

a) $\left(\frac{6a^7c^4}{7b^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{6}{3}a^{\frac{7}{3}}c^{\frac{4}{3}}}{\frac{7}{3}b}$

b) $\frac{6^{\frac{1}{3}}a^{\frac{7}{3}}c^{\frac{4}{3}}}{7^{\frac{1}{3}}b}$

c) $\frac{6a^{\frac{7}{3}}c^{\frac{4}{3}}}{7b}$

d) $\left(\frac{6a^7b^{-3}}{7c^{-4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6a^77c^4}{b^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{42a^{\frac{7}{3}}c^{\frac{4}{3}}}{b}$

P38.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{(-4a)^2}{(ab)^{-1}}\right)^4 = 4^8a^8ab = 4^8a^9b$

b) $\left(\frac{(-4a)^2}{(ab)^{-1}}\right)^4 = \left(\frac{16a^2}{ab^{-1}}\right)^4 = (16ab)^4 = 16^4a^4b^4$

c) $a^{-3}b^2c^{-4}d = a^{\frac{1}{3}}b^2c^{\frac{1}{4}}d$

d) $\left(\frac{(-4a)^2}{(ab)^{-1}}\right)^4 = (16a^2ab)^4 = (16a^3b)^4$

2. 30 Studentinnen und Studenten machen folgenden typischen Fehler: $\frac{a^2b^{-1}}{3c^{-4}} = \frac{a^2 \cdot 3c^4}{b}$. Wenn also eine Zahl vor einer Variable mit einer negativen Hochzahl steht, so wird die Zahl und die Variable ($3c^{-4}$) als zusammengehörend gesehen und von beiden der Kehrwert gebildet.

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P39.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{80a^{-1}b^2}{10b^3c^{-4}} = \frac{8c^4}{ab}$

b) $\frac{80a^{-1}b^2}{10b^3c^{-4}} = \frac{c^4}{8ab}$

c) $\frac{80a^{-1}b^2}{10b^3c^{-4}} = \frac{b^2c^4}{10b^380a} = \frac{c^4}{800ab}$

d) $\frac{80a^{-1}b^2}{10b^3c^{-4}} = 8a^{-1}b^{-1}c^4 = 8(ab)^{-1}c^4$

P40.) $\frac{7v^2u \cdot 2u^{-2}}{14u^2 \cdot 3v^4u} =$

a) 0

b) $3v^2u^4$

c) $3v^{-2}u^{-4}$

d) $\frac{1}{3v^2u^4}$

P41.) $\frac{5vu^2 \cdot 2v^{-3}}{30u^3} =$

a) $3^{-1}u^{-1}v^{-2}$

b) $3^{-1}u^{-1}v^{2}$

c) $3u^{-1}v^{2}$

d) $3u^{-1}v^{-2}$

P42.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{1}{25a^{-5}} = 25a^5$

b) $\frac{1}{25a^{-5}} = \frac{a^5}{25}$

c) $\frac{1}{25a^{-5}} = 25a^5 = (5a)^5$

d) $\frac{1}{25a^{-5}} = \left(\frac{a}{5}\right)^5$

3. Fehler beim Potenzieren von Potenzen: $(x^a)^b = x^{a+b}$ beziehungsweise $(x^a)^{-b} = x^{a-b}$. Die Hochzahlen werden also nicht multipliziert, sondern addiert oder subtrahiert:

i) $((2a)^3)^3 = (2a)^6$

ii) $(a^3)^{-1} = a^2$

iii) $(a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{3}}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P43.) $\left(\frac{2a^4b^3}{c^2}\right)^{-1} =$

a) $\frac{c^2}{2a^4b^3}$

b) $\frac{a^3b^2}{c}$

c) $\frac{2a^3b^2}{c}$

d) $\frac{a^3b^2}{2c}$

P44.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{a^{-2}b^4}{c^{-5}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}b^4}{c^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{1}{15}}}$

b) $\left(\frac{a^{-2}b^4}{c^{-5}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a^{-\frac{6}{3}}b^{\frac{12}{3}}}{c^{-\frac{15}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{13}{3}}}{c^{-\frac{14}{3}}}$

c) $\left(\frac{a^{-2}b^4}{c^{-5}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^4c^5}{a^2}$

d) $\left(\frac{a^{-2}b^4}{c^{-5}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{5}{3}}$

P45.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{2a^{-1}}{b^2c^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{2c^3}{ab^2}\right)$

b) $\left(\frac{2a^{-1}}{b^2c^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^{\frac{4}{4}}a^{-\frac{4}{4}}}{b^{\frac{8}{4}}c^{-\frac{12}{4}}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{4}}a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{9}{4}}c^{\frac{11}{4}}$

c) $\left(\frac{2a^{-1}}{b^2c^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{2c^3}{ab^2}}$

d) $\left(\frac{2a^{-1}}{b^2c^{-3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2c^3}{ab^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

3.3.3 Vereinzelte Fehler

1. Problembereich „Potenzieren mit rationalen Exponenten" - Die Zahl wird mit der rationalen Hochzahl multipliziert:

$$\left(\frac{2x^5}{8y^7}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}}{\frac{8}{3}y^{\frac{7}{3}}}$$

2. Problembereich „Negative Exponenten" - Hier werden Fehler angeführt, die von den Studierenden gemacht werden, wenn der Exponent negativ ist:

   i) $a^{-3} = a^{\frac{1}{3}}$

   ii) $a^{-\frac{10}{3}} = a^{\frac{3}{10}}$

   iii) $\frac{1}{(ab)^{-3}} = a^{-3}b^{-3}$

   iv) $\frac{(2c)^9}{(ab)^{-3}} = (2c)^9 \cdot \frac{1}{(ab)^3}$

   v) $\left(\frac{1}{a^{-3}}\right)^{-1} = a^3$

   vi) $\left(a^3\frac{1}{b^{-3}c^4}\right)^{-1} = \frac{a^3c^4}{b^3}$

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   P46.) Welche Aussagen sind wahr?

   a) $\frac{c^4\cdot 3^2\cdot c^5\cdot(a\cdot b)^7}{(a\cdot b)^7} = 9 + c^9$

   b) $\frac{(4a)^3}{(bc)^{-2}} = 4^3a^3 \cdot \frac{1}{(bc)^2}$

   c) $\left(\frac{2a^{-1}}{b^2c^{-3}}\right)^{-2} = \frac{a^2b^4}{4c^6}$

   d) $(-3a^2b^{-1}c^5)^{-1} = -\frac{b}{3a^2c^5}$

P47.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{b^{-5}}{ac^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\frac{1}{b^5}}{a\frac{1}{c^2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{b^{20}}}{a^{\frac{1}{4}}\frac{1}{c^8}}$

b) $\frac{1}{(ab)^{-2}} = a^{-2}b^{-2}$

c) $\left(\frac{b^{-5}}{ac^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{c^2}{ab^5}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{c^{\frac{2}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{4}}}$

d) $a^{-2}b \cdot 2c^{-1} \cdot 5a^2 = \frac{b \cdot 2c \cdot 5a^2}{a^2} = 10bc$

P48.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(b^2 \cdot \frac{1}{a^3c^{-4}}\right)^{-1} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{c^4}{a^3}$

b) $\left((4a)^2bc\right)^3 = 16a^2b^3c^3$

c) $\left(b^2 \cdot \frac{1}{a^3c^{-4}}\right)^{-1} = b^2 \cdot \frac{a^3c^4}{1}$

d) $\left((4a)^2bc\right)^3 = 4^6a^6b^3c^3$

3. „Aus einer Multiplikation wird eine Addition“ - Manche Studierende machen aus einer Multiplikation eine Addition beziehungsweise verwenden für $(a \cdot b)^2$ die binomische Formel, die für die Addition gilt.

   i) $\frac{c^4 \cdot 2^9 \cdot c^9(ab)^3}{(ab)^3} = 2^9 + c^{13}$

   ii) $\frac{c^4 \cdot 2c^9(ab)^3}{a^3b^3} = c^4 \cdot 2c^9 + 3a^2b + 3ab^2$

   iii) $(ab)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oder $(ab)^3 = a^3 \cdot 2a^2b \cdot 2ab^2 \cdot b^3$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P49.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{a^2}{b^{-4}} \cdot \frac{1}{a^2+2ab+b^2} = \frac{b^2}{2ab} = \frac{b}{2a}$

b) $(2ab)^2 = 4a^2b^2$

c) $(ab)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

d) $(ab)^2 = a^2 + b^2$

P50.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $(ab)^3 = a^3 \cdot 2a^2b \cdot 2ab^2 \cdot b^3$

b) $(ab)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

d) $(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4. Sonstige Fehler

i) $x^a \cdot y^b = (xy)^{a+b}$

ii) $a^{-3} \cdot a^3 = a$

iii) $b^{-3} \cdot b^3 = b^{-9}$

iv) $\frac{a^3}{a^{-3}} = 1$

v) $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b}$

vi) $\frac{a}{b} \cdot c^4 = \frac{4ac}{b}$

vii) $(ab+c)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot (ab+c)$

viii) $\left(\frac{1}{z^{10}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{z^{30}}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

P51.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $(2ab)^2 \cdot \frac{1}{(ac)^{-3}} = \frac{4a^2b^2}{ac^{-3}} = 4ab^2c^3$

b) $a^{-3}b^{-3}c^4 \cdot (2c^{-2})^2a^3b^3 = 4$

c) $a^{-3}b^{-3}c^4 \cdot (2c^{-2})^2a^3b^3 = a^{-3}b^{-3}c^4 \cdot 4c^{-4}a^3b^3 = 4abc$

d) $\left(\frac{5c^2d}{(ab)^{-1}}\right)^5 = \left(\frac{5c^2d}{1} \cdot \frac{1}{ab}\right)^5 = \left(\frac{5c^2d}{ab}\right)^5$

P52.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left((5c)^2(ab)^{-1}\right)^6 = (25abc^{2+(-1)})^6 = (25abc)^6$

b) $a^{-3} \cdot a^3 = a^{-9}$

c) $a^{-3} \cdot a^3 = 1$

d) $\left(a^2 \cdot \frac{1}{bc^{-3}}\right)^{-1} = \frac{c^3}{a^2b}$

P53.) Welche Rechnungen sind richtig?

a) $2ab^2 \cdot 3b^{-2} \cdot a^3b = 6a^4b$

b) $(4b)^2 - 4b^2 = 0$

c) $ab \cdot b^{-2} \cdot a^{-1}b^{-1} = \frac{1}{b^2}$

d) $a^0 \cdot 5b = 0$

P54.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b}$

b) $a^2b^{-1} \cdot a^{-2}b = 1$

c) $\frac{a}{b}c^4 = \frac{4ac}{b}$

d) $(-a^2b \cdot 3c^4)^2 = 9a^4b^2c^8$

Oft wurden mehrere Fehler in einer Aufgabe gemacht. In Abbildung 3.5 ist ein Beispiel aus dem Endtest angeführt, das einige Fehler enthält.

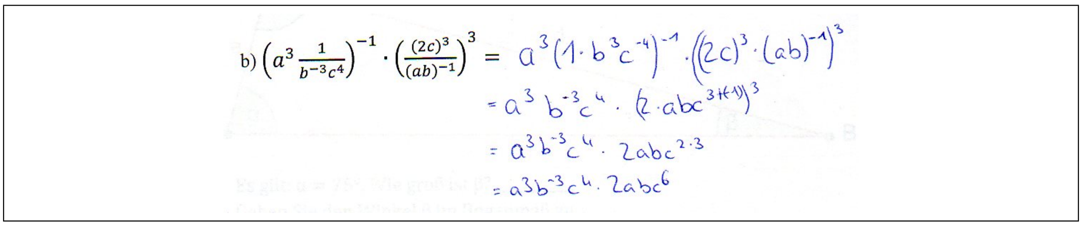


Abbildung 3.5: Beispiel für einige Fehler in einer Aufgabe

3.4 Weitere Aufgaben 2

P55.) Berechnen Sie: $\frac{(x^3)^2\left(\frac{1}{2}y\right)^2\cdot y^{-3}z^4}{(-2y)^{-3}x^9\left(\frac{1}{z}\right)^{-4}}$

a) $-2y^2$

b) $\frac{2y^2}{x^3}$

c) $-\frac{y^2}{x^3}$

d) $-\frac{2y^2}{x^3}$

P56.) Vereinfachen Sie $\sqrt[3]{\frac{7a^2b^{-5}}{5c^{-7}}}$ so, dass keine negativen Exponenten und Wurzeln vorkommen.

a) $\left(\frac{7^{\frac{3}{3}}a^{\frac{6}{3}}b^{-\frac{15}{3}}}{5^{\frac{3}{3}}c^{-\frac{21}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{7^{\frac{4}{3}}a^{\frac{7}{3}}b^{-\frac{14}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{20}{3}}}$

b) $\frac{7^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{7}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{3}}}$

c) $\frac{7a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{7}{3}}}{5b^{\frac{5}{3}}}$

d) $35a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{5}{3}}c^{\frac{7}{3}}$

P57.) Vereinfachen Sie $\frac{\left(\frac{3ab^2}{(bc)^{-1}}\right)^3}{a^3\frac{1}{b^{-4}c^3}}$ so, dass keine negativen Exponenten und kein Doppelbruch vorkommen.

a) $27b^3c^4$

b) $27a^3b^7c$

c) $27b^5c^6$

d) $9b^5c^6$

P58.) Vereinfachen Sie $\left(a^{-3}\frac{\frac{3b}{ac}}{a^{-4}c^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{(2a)^2}{(bc)^{-1}} \cdot \frac{1}{c^3}\right)^3$ so, dass keine negativen Exponenten und kein Doppelbruch vorkommen.

a) $\frac{2a^{18}}{9b^3}$

b) $\frac{64a^6b}{9}$

c) $\frac{32a^8}{9b^4c^6}$

d) $\frac{2a^6b}{3}$

4 Wurzeln

Das Kapitel „Wurzeln“ ist sehr ähnlich wie Kapitel 3 (Potenzen) aufgebaut. Auch hier werden die Fehler der Studierenden aus den Endtests und grundlegende Rechenregeln für das Rechnen mit Wurzeln sowie die erstellten Multiple-Choice-Aufgaben angeführt.

Im ganzen Kapitel wird vorausgesetzt, dass unter dem Wurzelsymbol keine negativen Zahlen auftreten.

4.1 Literatur

Für das Auflisten der Rechenregeln zum Thema „Wurzeln“ wurde das Buch „Taschenbuch Mathematischer Formeln“ [7] herangezogen.

Auch in diesem Kapitel werden immer wieder mögliche Problembereiche beziehungsweise mögliche Fehler angeführt, die in den erstellten Multiple-Choice-Aufgaben eingebaut sind. Übertragungsfehler werden wieder als »**F1**« bezeichnet (siehe Kapitel 3).

Folgende Rechenregeln und Definitionen müssen beim Rechnen mit Wurzeln gekonnt werden:

1. $\boldsymbol{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$ und $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$

   Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

   W1.) Welche Aussagen sind wahr?

   a) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

   b) $\sqrt{5} = 5^{-2}$

   c) $3^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{3}$

   d) $3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{3^7}$

2. $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

W2.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $(\sqrt{2})^2 = 4$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$

c) $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2}$

d) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

W3.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $3^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{3^7}$

b) $3^{\frac{7}{9}} = \sqrt[7]{3^9}$

c) $3^{\frac{7}{9}} = \left(3^{\frac{1}{9}}\right)^7$

d) $3^{\frac{7}{9}} = (3^7)^{\frac{1}{9}}$

W4.) $a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{8}{6}} =$

a) $\sqrt[7]{a^6}$

b) $a^{-\frac{40}{3}}$

c) $a^{\frac{7}{6}}$

d) $\sqrt[6]{a^7}$

W5.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = 9^{\frac{2}{3}}$

b) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = 3\sqrt[3]{3}$

c) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = \sqrt[3]{81}$

d) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = 3$

W6.) $\left(\sqrt{a^3 b}\right)^3 =$

a) $4ab\sqrt{ab}$

b) $a^4 b\sqrt{ab}$

c) $a^3 b\sqrt{ab}$

d) $3ab\sqrt{ab}$

3. $\boldsymbol{a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

W7.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $5^{-\frac{7}{2}} = \sqrt{5^7}$

b) $3^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}}$

c) $5^{-\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{5}$

d) $3^{-\frac{7}{2}} = \sqrt[7]{3^2}$

W8.) $a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{-\frac{7}{15}} =$

a) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$

b) $-a^{\frac{3}{5}}$

c) $\sqrt[5]{a^3}$

d) $a^{\frac{5}{3}}$

4. $\boldsymbol{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$ beziehungsweise $\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$
Möglicher Fehler (F1): $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ beziehungsweise $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

W9.) Welche Aussagen treffen (für $a, b > 0$) zu?

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

c) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

d) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

W10.) Welche Aussagen sind wahr? (Es wird angenommen, dass unter dem Wurzelsymbol keine negativen Zahlen auftreten.)

a) $\sqrt{4+4x+x^2} = 2+x$

b) $\sqrt{4+x^2} = 2+x$

c) $\sqrt{4x^2} = 2x$

d) $\sqrt{4+4x+x^2} \neq 2+x$

W11.) Welche Aussagen sind wahr? (Es wird angenommen, dass unter dem Wurzelsymbol keine negativen Zahlen auftreten.)

a) $\sqrt{9-6x+x^2} = 3+x$

b) $\sqrt{9-6x+x^2} = 3-x$

c) $\sqrt{9-6x+x^2} = \sqrt{9+x^2} - \sqrt{6x} = 3+x-\sqrt{6x}$

d) $\sqrt{9-6x+x^2} \neq 3-x$

W12.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\sqrt{3^2} = 3$

b) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

W13.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$

b) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5$

c) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} = 3$

d) $3^{\frac{5}{7}} \cdot 3^{\frac{2}{7}} = 3^7$

5. $\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$ beziehungsweise $\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$
($\sqrt{a:b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ beziehungsweise $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$)
Möglicher Fehler (F1): $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ beziehungsweise $\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

W14.) Welche Aussagen treffen zu?

a) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

b) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}, (a > b > 0)$

c) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, (a \geq 0, b > 0)$

d) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}, (a \geq 0, b > 0)$

W15.) Welche Aussagen sind wahr? (Es wird angenommen, dass unter dem Wurzelsymbol keine negativen Zahlen auftreten.)

a) $\sqrt{16x^2y^4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^4} = 4xy^2$

b) $\sqrt{\frac{9x^2y^3}{z^2}} = \frac{\sqrt{9x^2y^3}}{\sqrt{z^2}} = \frac{\sqrt{9}\sqrt{x^2}\sqrt{y^2 \cdot y}}{z} = \frac{3xy\sqrt{y}}{z}$

c) $\sqrt{25 - u^2 - v^2} = \sqrt{(5-u)^2 - v^2} = \sqrt{(5-u)^2} - \sqrt{v^2} = 5 - u - v$

d) $\sqrt{4 - v} = 2 - \sqrt{v}$

W16.) $\sqrt{\frac{1}{49}} =$

a) $= \sqrt{1} - \sqrt{49} = 1 - 7 = -6$

b) $= -\sqrt{49} = -7$

c) $= \frac{1}{7}$

d) $= 49^{-2}$

W17.) $\sqrt{\frac{72}{98}} =$

a) $= \sqrt{72} - \sqrt{98} = 6\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

b) $= \left(\frac{72}{98}\right)^{-2}$

c) $= \left(\frac{98}{72}\right)^{2}$

d) $= \frac{6}{7}$

W18.) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)^2 =$

a) $7 - 2\sqrt{10}$

b) 7

c) -3

d) $7 - 2\sqrt{7}$

6. $\boldsymbol{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$

Möglicher Fehler: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x^a} + y} = \sqrt[n \cdot m]{x^a + y}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

W19.) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} =$

a) $\sqrt[7]{5}$

b) $\sqrt[12]{5}$

c) $\sqrt[3]{5^{-4}}$

d) $5^{\frac{1}{12}}$

W20.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$

b) $\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n]{b} = a - \sqrt[n]{b}$

c) $\sqrt[6]{a^6 + b^6} = a + b$

d) $\sqrt[n]{a^n - b^n} = a - b$

W21.) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2} \cdot 2} =$

a) $\sqrt[15]{8a^2}$

b) $\sqrt[15]{2a^2}$

c) $\sqrt[15]{2 + a^2}$

d) $\sqrt[8]{8a^2}$

4.2 Weitere Aufgaben

Es wurden auch Multiple-Choice-Aufgaben erstellt, die den Studierenden die Möglichkeit geben, folgende Schwerpunkte zu üben und zu vertiefen.

i) Nenner rational machen

ii) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ aber $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \neq a$

W22.) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} =$

a) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$

b) $\sqrt[3]{a}$

c) $\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$

d) $\sqrt{a}$

W23.) Vereinfachen Sie $\frac{a^2-ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ so, dass im Nenner keine Wurzeln vorkommen!

a) $\frac{(a^2-ab)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a+b}$

b) a

c) $a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

d) $a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

W24.) Vereinfachen Sie $\frac{4a}{2a+\sqrt{8}}$ so, dass im Nenner keine Wurzeln vorkommen!

a) $\frac{a(2a-\sqrt{8})}{a^2-2}$

b) $\frac{a(2a-\sqrt{8})}{a^2-16}$

c) $\frac{2a-\sqrt{8}}{a-2}$

d) $\frac{2a(2a-\sqrt{8})}{a-4}$

W25.) Vereinfachen Sie $\frac{2a^2+5a}{\sqrt[5]{a^2}}$ so, dass im Nenner keine Wurzeln vorkommen!

a) $\frac{(2a+5)\sqrt[5]{a^2}}{a}$

b) $2a+5\sqrt[5]{a^3}$

c) $\frac{2a+5\sqrt[5]{a^3}}{a}=2+5\sqrt[5]{a^3}$

d) $(2a+5)\sqrt[5]{a^3}$

W26.) Vereinfachen Sie $\frac{12a}{\sqrt[3]{4\sqrt{a}}}$ so, dass im Nenner keine Wurzeln vorkommen!

a) $6\sqrt{a}\sqrt[3]{2a}$

b) $6\sqrt[6]{4a^5}$

c) $3\sqrt{a}\sqrt[3]{4\sqrt{a}}$

d) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{a}}$

W27.) Vereinfachen Sie $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$ so, dass im Nenner keine Wurzeln vorkommen!

a) $\frac{\sqrt[24]{a^5}}{a}$

b) $\sqrt[24]{a}$

c) $\frac{\sqrt[8]{a}\,\sqrt[12]{a^{11}}}{a}$

d) $\frac{\sqrt[8]{a}\,\sqrt[12]{a}}{a}$

W28.) Vereinfachen Sie $\frac{\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2}\sqrt{3}}}{\sqrt[8]{4}}}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2}$ so, dass kein Doppelbruch und keine Wurzeln im Nenner vorkommen!

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$

b) $\sqrt[8]{\frac{3}{8}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[8]{3}$

4.3 Endtest

Im Folgenden sind einige Fehler, die die Studierenden bei den Endtests bezüglich Wurzeln gemacht haben, sowie dazu erstellte Multiple-Choice-Aufgaben zu finden.

4.3.1 Endtest-Aufgabe 6a

Die Endtest-Aufgabe 6a lautet:

Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne negative Hochzahlen, Wurzeln, Doppelbrüche etc.)!

$$\sqrt[3]{\frac{16x^5z^{-10}}{64y^{-7}}} =$$

Bei dieser Aufgabe erreichten 86 von 125 Studierenden keinen Punkt. Davon haben 22 Studentinnen und Studenten nichts hingeschrieben beziehungsweise die Aufgabe nicht fertig gelöst. („Nicht fertig gelöst“ heißt, im Ergebnis sind Wurzeln und negative Exponenten vorhanden, obwohl die Angabe der Aufgabe vorschreibt, soweit wie möglich und ohne negative Hochzahlen und Wurzeln zu vereinfachen.) Neun Studierende erreichten einen halben Punkt und 30 Studierende einen Punkt.

4.3.2 Vorkommende Fehler

Folgende Fehler werden von den Studierenden hinsichtlich Wurzeln gemacht:

1. $\boldsymbol{\sqrt[a]{x^b} = x^{b-a}}$

Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

W29.) Vereinfachen Sie $\sqrt[5]{\frac{25a^7b^9}{32c^6}}$ so, dass keine negativen Exponenten und Wurzeln vorkommen!

a) $\frac{5^{-3}a^2b^4}{2c} = \frac{a^2b^4}{250c}$

b) $\sqrt[5]{\frac{25}{32}} \cdot \sqrt[5]{\frac{a^7b^9}{c^6}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{ab}{c}\sqrt[5]{\frac{a^2b^4}{c}}$

c) $\frac{25^{\frac{1}{5}}a^{\frac{7}{5}}b^{\frac{9}{5}}}{2c^{\frac{6}{5}}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{5^2}{2^5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{a^7b^9}{c^6}} = \frac{2}{2} \cdot \frac{a^2b^4}{c} = \frac{a^2b^4}{c}$

2. $\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{4a^5b^3}{c^{10}}} = \frac{4a^5b^3}{c^{30}}}$

Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

W30.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\left(\frac{27a^2c^{-5}}{b^{-1}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{c^{\frac{5}{3}}}$

b) $\left(\frac{27a^2c^{-5}}{b^{-1}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{5}{3}}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{7a^2b}{c^{10}}} = \left(\frac{7a^2b}{c^{10}}\right)^{-3}$

d) $\sqrt[3]{\frac{7a^2b}{c^{10}}} = \frac{7a^2b}{c^{30}}$

3. $\boldsymbol{\sqrt[3]{a} = a^{-3}}$ oder $\boldsymbol{\sqrt[3]{a} = a^3}$

Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

W31.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $a^{-5} = \sqrt[5]{a}$

b) $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

c) $a^{-5} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}$

d) $a^{-5} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

4. „**Partielles Wurzelziehen**“ wird falsch gemacht: $\sqrt[3]{x^5} = x\sqrt[3]{x}$

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   W32.) $\sqrt[5]{25x^9y^5} =$
   - a) $xy\sqrt[5]{25x^4}$
   - b) $5xy\sqrt[5]{x^4}$
   - c) $xy\sqrt[5]{25x^4y}$
   - d) $5xy\sqrt[5]{5x^4y}$

   W33.) $\sqrt{72} =$
   - a) $36\sqrt{2}$
   - b) $3\sqrt{8}$
   - c) $6\sqrt{2}$
   - d) $18\sqrt{2}$

   W34.) $\sqrt{32} + \sqrt{8} - \sqrt{50} =$
   - a) $-\sqrt{2}$
   - b) $\sqrt{-10}$
   - c) $\sqrt{2}$
   - d) $4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

5. Manche Studierende lassen die Wurzel einfach weg. (Abbildung 4.1 ist ein Beispiel, bei dem ein Student/ eine Studentin die Wurzel weggelassen hat. Außerdem wird hier noch zusätzlich der Fehler gemacht, der in Kapitel 3.3.2 Punkt 2 beschrieben wird.)

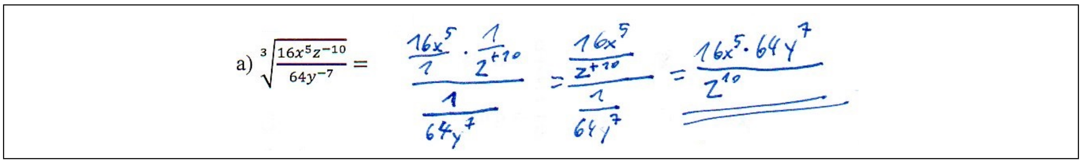


Abbildung 4.1: Beispiel für „Weglassen der Wurzel“

6. Der Term » $\sqrt[3]{\frac{16x^5z^{-10}}{64y^{-7}}}$ « wird wie bei einer Gleichung mit 3 potenziert. (Siehe Abbildung 4.2. Auch hier wird wieder der Fehler gemacht, der in Kapitel 3.3.2 Punkt 2 beschrieben wird.)

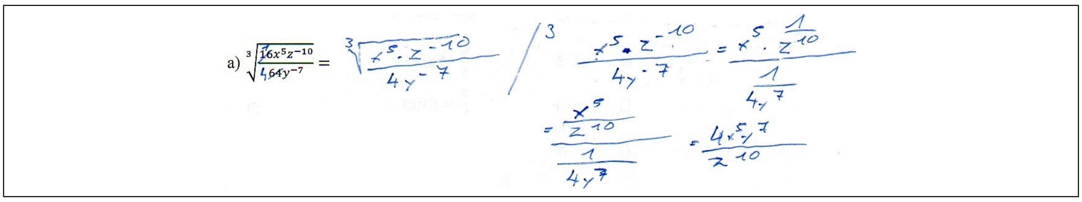


Abbildung 4.2: Beispiel für „Betrachten als Gleichung“

7. **Rechenfehler** wie:
   a) $\sqrt[3]{16} = 2$
   b) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
   c) $\sqrt[3]{\frac{16}{64}} = \sqrt[3]{4}$
   d) $16^{\frac{1}{3}} = 4$
   e) $\frac{16^{\frac{1}{3}}}{4} = 4^{\frac{1}{3}}$

5 Gleichungen

Auch für dieses Kapitel wurden die Endtests der Studierenden herangezogen und auf Fehler hinsichtlich Gleichungen untersucht. In Aufgabe 3a des Endtests sollen die Studierenden eine Betragsgleichung lösen. Durch Umformen der Bruchgleichung in Aufgabe 3b erhält man eine quadratische Gleichung, die zu lösen ist. Daher wurde dieses Kapitel unterteilt in „Betragsgleichung“, „Quadratische Gleichung“ und „Gleichungen allgemein“. Einige Fehler, die von den Studierenden gemacht wurden, werden in diesen Kapiteln aufgelistet, ebenso die zu diesen Problembereichen erstellten Multiple-Choice-Aufgaben.

5.1 Betragsgleichung

5.1.1 Endtest-Aufgabe

Die Aufgabe 3a des Endtests lautet:

Lösen Sie die folgende Gleichung: $2x - |3 - x| = 18$

Bei dieser Aufgabe erreichten 77 von 125 Studierenden keinen Punkt. Davon haben 22 Studentinnen und Studenten nichts hingeschrieben beziehungsweise nur so wenig, dass kein Lösungsansatz erkennbar war. 19 Studierende erreichten einen halben Punkt und 29 Studierende einen Punkt.

5.1.2 Häufige Fehler

1. 28 Studentinnen und Studenten machen beim Lösen dieser Betragsgleichung keine Fallunterscheidung. Sie lassen die Beträge weg und lösen die Gleichung $2x - 3 + x = 18$.

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   G1.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $-|2 + 5x| = -3$!

   a) $L = \{\frac{1}{5}\}$

   b) $L = \{-\frac{1}{5}\}$

   c) $L = \{-1, \frac{1}{5}\}$

   d) $L = \{-1, -\frac{1}{5}\}$

G2.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $|x-3|=7$!

a) $L=\{-4,10\}$

b) $x=10$

c) $L=\{-10,10\}$

d) $L=\{\}$

2. Die Fallunterscheidung wird richtig durchgeführt, das heißt, die beiden Fälle werden richtig unterschieden und die Aufgabe auch richtig durchgerechnet. Es wird aber entweder die Voraussetzung (für den jeweiligen Fall) nicht in der Lösung berücksichtigt (siehe Abbildung 5.1) oder die tatsächliche Lösungsmenge - ein Fall tritt nicht ein - wird nicht hingeschrieben. (siehe Abbildung 5.2)

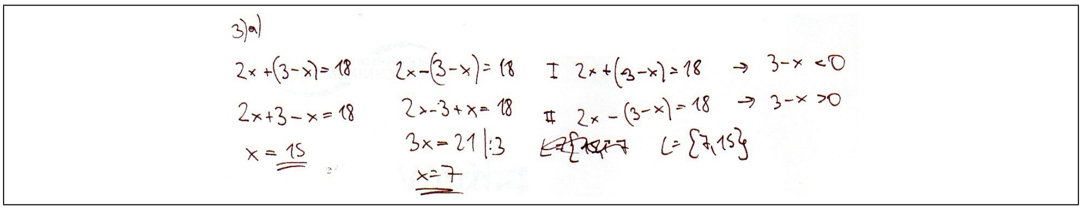


Abbildung 5.1: Beispiel für „Voraussetzung wird nicht berücksichtigt“

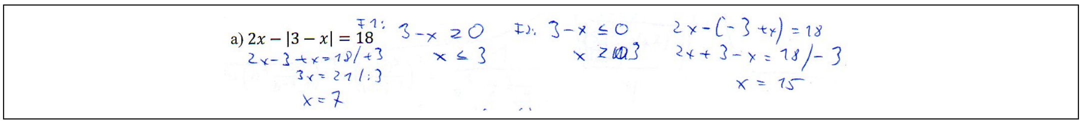


Abbildung 5.2: Beispiel für „Lösungsmenge wird nicht hingeschrieben“

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

G3.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x-|5+2x|=14$!

a) $L=\{-19,3\}$

b) $L=\{\}$

c) $L=\{-19\}$

d) $L=\{3\}$

G4.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $|x+4|=2x+1$!

a) $L=\{-\frac{5}{3},3\}$

b) $L=\{3\}$

c) $L=\{-\frac{5}{3}\}$

d) $L=\{0\}$

G5.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $|5+2x| = -3+x$!

a) $L = \{-\frac{2}{3}\}$

b) $L = \{-8, -\frac{2}{3}\}$

c) $L = \{-8\}$

d) $L = \{\}$

3. Einige Studierende unterscheiden richtig die beiden Fälle $3 - x < 0$ und $3 - x \geq 0$, jedoch das Vereinfachen der Betragsgleichung zu einer Gleichung ohne Betrag bereitet Probleme und wird falsch gemacht. So vereinfachen sie die Gleichung zu $2x - 3 - x = 18$, wenn der Ausdruck zwischen den Betragsstrichen ≥ 0 ist und zu $2x + 3 + x = 18$, wenn er < 0 ist.

4. „Falsche Fallunterscheidungen“
Manche Studentinnen und Studenten wissen, dass bei einer Betragsgleichung zwei Fälle unterschieden werden müssen, führen aber eine falsche Fallunterscheidung durch. Es werden folgende „falsche“ Fälle betrachtet:

i) $x \geq 0$ und $x < 0$

ii) $2x - 3 - x = 18$ und $2x - 3 - x = -18$

iii) $2x - 3 - x > 0$ und $2x - (-3 + x) < 0$

5. Für den negativen Fall, das heißt, wenn der Ausdruck zwischen den Betragsstrichen negativ ist, wird die Betragsgleichung vereinfacht zu $-(2x - (3 - x)) = 18$.

5.2 Quadratische Gleichungen

5.2.1 Endtest-Aufgabe

Bei der Endtest-Aufgabe 3b (siehe Kapitel 2.2.1) soll eine Bruchgleichung gelöst werden. Durch Umformen dieser erhält man die quadratische Gleichung $2x^2 - 18x + 36 = 0$ beziehungsweise $x^2 - 9x + 18 = 0$. Es kann also entweder die große oder die kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen angewendet werden.

Viele Studentinnen und Studenten formen diese Bruchgleichung bis zur quadratischen Gleichung richtig um, scheitern dann aber am Lösen dieser.

Wenn von der kleinen beziehungsweise großen Lösungsformel gesprochen wird, so wird folgendes darunter verstanden:

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$
Große Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Quadratische Gleichung der Form: $x^2 + px + q = 0$
Kleine Lösungsformel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

5.2.2 Häufige Fehler

1. 23 Studierende beendeten die Aufgabe bei der quadratischen Gleichung. Manche schrieben auch hin, dass sie die kleine beziehungsweise große Lösungsformel hier anwenden würden. Aus diesem Grund wurden Multiple-Choice-Aufgaben erstellt, bei denen das Lösen von quadratischen Gleichungen geübt werden kann:

   G6.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = 9$!

   a) $L = \{-3, 3\}$
   b) $L = \{-3\}$
   c) $L = \{3\}$
   d) $L = \{\}$

   G7.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 2 = 6$!

   a) $L = \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$
   b) $L = \{-2, 2\}$
   c) $L = \{2\}$
   d) $L = \{\}$

   G8.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = -16$!

   a) $L = \{4\}$
   b) $L = \{-4\}$
   c) $L = \{\}$
   d) $L = \{-4, 4\}$

   G9.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 9 = 0$!

   a) $L = \{-3\}$
   b) $L = \{-3, 3\}$
   c) $L = \{3\}$
   d) $L = \{\}$

   G10.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 7 = 2x^2 - 2$!

   a) $L = \{3\}$
   b) $L = \{-3, 3\}$
   c) $L = \{-3\}$
   d) $L = \{\}$

G11.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$!

a) $L = \{2\}$

b) $L = \{-3\}$

c) $L = \{-2, 3\}$

d) $L = \{-3, 2\}$

G12.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 12x = -35$!

a) $L = \{\}$

b) $L = \{-7, -5\}$

c) $L = \{5, 7\}$

d) $L = \{-5\}$

G13.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $3x^2 + 3x = 90$!

a) $L = \{-6, 5\}$

b) $L = \{10\}$

c) $L = \{5\}$

d) $L = \{\}$

G14.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{2}{6} = 0$!

a) $L = \{\}$

b) $L = \{\frac{2}{3}\}$

c) $L = \{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$

d) $L = \{6\}$

G15.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $45x^2 - 14x + 1 = 0$!

a) $L = \{\frac{28 \pm \sqrt{739}}{45}\}$

b) $L = \{\}$

c) $L = \{-\frac{1}{5}, -\frac{1}{9}\}$

d) $L = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{5}\}$

G16.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{3x^2}{2} + 6x = 48$!

a) $L = \{4\}$

b) $L = \{-8, 4\}$

c) $L = \{-3 \pm \sqrt{57}\}$

d) $L = \{\}$

2. Auch bei der Anwendung der kleinen oder großen Lösungsformel gibt es immer wieder Fehler. Ein paar Beispiele sind hier angeführt:

   i) $4x^2 - 24x + 72 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 72}}{4}$

   ii) $x^2 - \frac{24}{4}x + \frac{72}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{\frac{24}{4}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\frac{24}{4})^2}{2} - \frac{72}{4}}$

   iii) $x^2 - 9x + 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{\frac{(\frac{9}{2})^2 - 18}{4}}$

   iv) $-6x^2 - 42x + 0 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{42 \pm \sqrt{42^2 + 4 \cdot 6 \cdot 0}}{-12}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

G17.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $4x^2 + 17x - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 4 \cdot 15}}{4}$

b) $x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{15}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{17}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{8}\right)^2 + \frac{15}{4}}$

c) $x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{15}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{\frac{17}{4}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{17}{4}\right)^2}{2} + \frac{15}{4}}$

d) $4x^2 + 17x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0}}{8}$

G18.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $4x^2 + 17x - 15 = 0$!

a) $L = \{-5, \frac{3}{4}\}$

b) $L = \{-\frac{33}{4}, -\frac{1}{4}\}$

c) $L = \{\frac{11}{8}, \frac{57}{8}\}$

d) $L = \{\}$

G19.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $6x^2 + 3x = 3$!

a) $L = \{-1, \frac{1}{2}\}$

b) $L = \{-1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\}$

c) $L = \{-\frac{1}{2}, 0\}$

d) $L = \{\}$

3. Manche Studierende wollen die quadratische Gleichung durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat lösen, machen aber dabei Fehler. Zum Beispiel:

$$x^2 - 9x + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-6)^2 = 0$$

Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

G20.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $18x - 36 = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad -36 = x^2 - 6x$

b) $x^2 - 7x + 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 = 0$

c) $18x - 36 = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 12 = 0$

d) $x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2 = 0$

e) $-3x^2 + 9x + 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 10 = 0$

5.3 Gleichungen allgemein

Viele Studentinnen und Studenten haben Schwierigkeiten beim Umformen von Gleichungen und Termen. In diesem Kapitel werden daher einige Fehler, die die Studierenden diesbezüglich in den Endtests gemacht haben, angeführt. Dazu wurden die Aufgaben 3, 4 und 6 sowie die Aufgaben 5 und 7 (siehe Anhang) des Endtests herangezogen.

Folgende falsche Äquivalenzumformungen wurden gemacht:

1. Die Äquivalenzumformung ist aufgrund eines Vorzeichenfehlers falsch:

   i) $-7x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{14}{7}$

   ii) $2a = \frac{1}{2}b - bx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2a - \frac{1}{2}b}{b} = x$

   iii) $-4x^2 + 24x - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 6x - 18 = 0$

   iv) $18x - 36 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 18x - 36 = 0$

2. Problembereich: Division und Multiplikation

   i) $x = \frac{y-5}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (y-5) = 5$

   ii) $\frac{36}{x} = 76 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{76}{36}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

G21.) Welche Aussagen sind (für $x \neq 0$) wahr?

a) $2x^2 + 10x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2x+10) = 0$

b) $\frac{7}{x} = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

c) $\frac{3-5+x}{x^3} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 + x = 2x^3$

d) $7 - 2x = 2 \cdot 2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 5 = 2x \cdot 2x^3$

e) $\frac{15-72-2x}{x^3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 57 - 2x = x^3$

G22.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{3a-2}{4} - 5a = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3a - 2 - 5a = 28$

b) $x = \frac{1-x}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x(1-x) = 3$

c) $10x + 3 = 5x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 10x = 5x + 1$

d) $-7u = 14 \quad \Leftrightarrow \quad u = -7$

e) $-x + 3 = x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

3. Es wird nicht auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Rechenoperation durchgeführt:

   a) Auf einer Seite der Gleichung wird addiert, auf der anderen Seite wird subtrahiert:

      i) $10y + 20 = 3y - 15 \quad \Leftrightarrow \quad 10y = 3y + 5$

      ii) $3x - 3 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 15$

      iii) $2x + 3 - x = 18 \quad \Leftrightarrow \quad x = 21$

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   G23.) Welche Aussagen sind wahr?

   a) $3x + 5 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -1$

   b) $3x + 5 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 1$

   c) $3x - x = 3$

   d) $3x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

   e) $7x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

   G24.) Welche Aussagen sind wahr?

   a) $5x + 2 - 4x + 5 = -x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x + 10 = -x \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

   b) $5x + 2 - x = -x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = -x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{5}$

   c) $3x + 18 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 11 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{11}{3}$

   d) $15 + 7x + 2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 7x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{7}$

   b) Auf einer Seite der Gleichung wird addiert/ subtrahiert, auf der anderen Seite wird multipliziert/ dividiert:

      i) $a = \frac{bx}{4} - bx \quad \Leftrightarrow \quad bx \cdot a = \frac{bx}{4}$

      ii) $57 - 6x = 2 \cdot 2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 55 = 6x \cdot 2x^3$

c) Auf einer Seite der Gleichung wird dividiert, auf der anderen Seite multipliziert:

i) $bx \cdot a = \frac{bx}{4} \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot a \cdot 4 = bx^2$

Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

G25.) Welche Aussagen sind (für $x \neq 0$) wahr?

a) $\frac{7}{x} - \frac{5+2x}{2x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7^2 \cdot 2 - 5 - 2x}{2x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 93 - 2x = 2x^2$

b) $\frac{x}{2} + b = a \quad \Leftrightarrow \quad x = (a - b) \cdot 2$

c) $\frac{8+x}{3x^2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8+x}{x^2} = 1$

d) $a = \frac{b}{4} + x \quad \Leftrightarrow \quad 4a = b + x$

e) $a = b(1+x) - bx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = 1 + x - bx$

4. Problembereich: Multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner
Es werden nicht alle Glieder des Terms mit dem gemeinsamen Nenner multipliziert:

i) $\frac{3y-15}{5} - 2y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3y - 15 - 2y = 20$

ii) $3 \cdot \frac{y-5}{5} - 2y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y - 5 - 2y = \frac{20}{3}$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

G26.) Welche Aussagen sind (für $x \neq 0$) wahr?

a) $\frac{3}{x} + \frac{5-x}{3x} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3 + 5 - x = 7 \cdot 3x$

b) $\frac{3}{x} + \frac{5-x}{3x^2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 3x + (5-x)x = 7 \cdot 3x^2$

c) $\frac{3}{x} + \frac{5-x}{3x^2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 9x + 5 - x = 7$

d) $\frac{3}{x} + \frac{5-x}{3x} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - x = 21x$

e) $\frac{3}{x} + \frac{5-x}{3x} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{11}$

G27.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $2 \cdot \frac{a}{3} + 5 = 2 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{3} + \frac{5}{2} = a$

b) $3 \cdot \frac{a-1}{2} - 5a = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a-1}{2} - 5a = \frac{4}{3}$

c) $\frac{a-1}{2} - 5a = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad a - 1 - 5a = \frac{8}{3}$

d) $3a - 4 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a + \frac{7}{2} = 2$

e) $\frac{a+1}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad a + 4 = 5$

5. Die Äquivalenzumformung ist aufgrund von fehlenden Klammern falsch.

   i) $-\frac{bx}{2} = a - \frac{b}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -bx = a - \frac{b}{4} \cdot 2$

   ii) $\frac{15}{2x} - \frac{72-6x}{x^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{15 \cdot x - 72 + 6x \cdot 2}{2x^2} = 2$

Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

G28.) Welche Aussagen sind (für $a \neq -1; a \neq 0$) wahr?

a) $-\frac{ax}{3} = x - \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -ax = x - \frac{a}{2} \cdot 3$

b) $\frac{2}{a} = \frac{1}{3} + x + ax \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1+a} = x$

c) $a = \frac{7x}{4} - 7x \quad \Leftrightarrow \quad 7xa = \frac{7x}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 28a = 7x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4a$

d) $\frac{1}{3} = \frac{1}{a} + x - bx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{3} = x(1-b)$

e) $\frac{7ax}{2} - bx = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 7ax - bx = 6$

6. Die Rechenoperation wird nicht bei allen Termgliedern durchgeführt.

   i) $a = \frac{b}{4} + x \cdot (-\frac{b}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{-\frac{b}{2}} - \frac{b}{4} = x$

   ii) $\frac{4a-1}{b} = 2x - bx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4a-1}{2b} = x - bx$

   iii) $18x - 36 = 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad -36 = x^2 - 9x$

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

G29.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $15x + 20 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 15x = -15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

b) $3x + 6 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$

c) $7x + 3 = 17 \quad \Leftrightarrow \quad 7x = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$

d) $17x + 3 = 5x \quad \Leftrightarrow \quad 12x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}$

e) $5 + 3x - (x+2) = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 7 + 2x = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$

G30.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $\frac{30x-6}{2} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 30x - 6 = 5$

b) $\frac{30x-6}{2} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 30x - 6 = 10$

c) $5x^2 + 7 = -3 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 2x + 10 = 0$

d) $2x - 7 = 5x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 + 2x - 7 = 0$

e) $27x + 5 = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9x + 5 = x^2$

G31.) Welche Aussagen sind (für $a, b \neq 0$) wahr?

a) $\frac{1}{3} + x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{-\frac{1}{5}} - \frac{1}{3} = x$

b) $4 = \frac{1}{2}a - ax \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-\frac{1}{2}a}{a} = x$

c) $a \cdot 3 + 2x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 4 - 3a \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 - \frac{3}{2}a$

d) $x \cdot b = -2 + \frac{b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{b} + \frac{b}{4}$

e) $a + bx = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a + x = \frac{2}{b} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{b} - a$

G32.) Welche Aussagen sind (für $x \neq 0$) wahr?

a) $\frac{7x}{2} + \frac{2}{3x^2} - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 21x^3 + 4 - 30x^2 = 1$

b) $\frac{7x}{2} + \frac{2}{3x^2} - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 21x^3 + 4 - 5 = 1$

c) $\frac{7x}{2} + \frac{2}{3x^2} - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 21x^3 + 4 - 30x^2 = 6x^2$

d) $\frac{7x}{2} + \frac{2}{3x^2} - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 21x^3 + 4 - 5 = 6x^2$

e) $\frac{7x}{2} + \frac{2}{3x^2} - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 21x^3 - 36x^2 + 4 = 0$

7. Problembereich: Brüche

i) $\frac{4a}{b} = 2x + 1 - bx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4a-1}{b} = 2x - bx$

ii) $\frac{30x^2-72-6x^2}{2 \cdot x^2 \cdot x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{24x^2}{2x^3} - 72 = 2$

6 Ungleichungen

In diesem Kapitel werden Fehler aus den Endtests der Studierenden, die diese hinsichtlich „Ungleichungen“ gemacht haben, angeführt. Einen großen Problembereich stellen hier, wie auch bei den Betragsgleichungen, die Fallunterscheidungen dar. Sehr viele Fehler werden auch beim Umformen der Ungleichung gemacht. Deshalb sollen die für diesen Themenbereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben den Studierenden die Möglichkeit geben, das Lösen sowie das Umformen von Ungleichungen zu üben.

6.1 Endtest-Aufgabe

Die Aufgabe 4 des Endtests lautet:

Lösen Sie die folgende Ungleichung: $\frac{3x+1}{x-3} < 5$

Bei dieser Aufgabe erreichten 64 von 125 Studierenden keinen Punkt. Davon haben 19 Studentinnen und Studenten nichts hingeschrieben beziehungsweise nur so wenig, dass kein Lösungsansatz erkennbar war. 39 Studierende erreichten einen halben Punkt und 22 Studierende einen Punkt.

6.2 Häufige Fehler

1. 30 Studentinnen und Studenten machen keine Fallunterscheidung. Sie lösen die Ungleichung $3x + 1 < 5 \cdot (x - 3)$. In Abbildung 6.1 ist ein Beispiel eines Studenten/ einer Studentin angeführt, der/ die die Aufgabe ohne Fallunterscheidung gelöst hat.

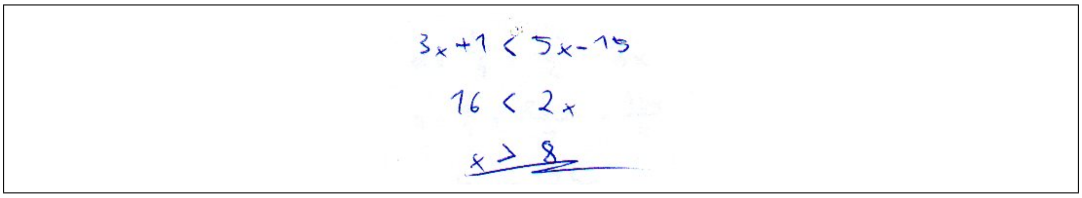


Abbildung 6.1: Beispiel für „Lösen ohne Fallunterscheidung“

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

U1.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{3+x}{2x+2} < 5$!

a) $L = \{\}$

b) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{7}{9}\}$

c) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{7}{9}\}$

d) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > -\frac{7}{9}\}$

U2.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{7x+2}{x} > 3$!

a) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \vee x > -\frac{1}{2}\}$

b) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \vee x > 0\}$

c) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\}$

d) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < 0\}$

U3.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{3+5x}{x+1} > 2$!

a) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\}$

b) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \vee x > -\frac{1}{3}\}$

c) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > -\frac{1}{3}\}$

d) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

2. Es werden die Ungleichungen $3x + 1 < 5(x - 3)$ und $3x + 1 > 5(x - 3)$ zwar richtig gelöst, jedoch werden die Voraussetzungen, für welche der Nenner größer beziehungsweise kleiner als Null ist, in der Lösungsmenge nicht berücksichtigt. (Beispiel: siehe Abbildung 6.2)

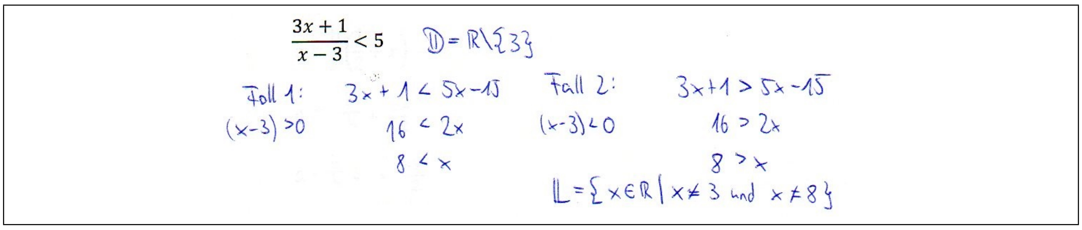


Abbildung 6.2: Beispiel für „Fallbedingungen werden nicht berücksichtigt“

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

U4.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{8+2x}{x-3} \leq 9$!

a) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \vee x \geq 5\}$

b) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

c) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{19}{11} \vee x \geq 5\}$

d) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5 \vee x \geq 5\}$

U5.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{5x-3}{x-7} < -3$!

a) $L = (3, 7)$

b) $L = \emptyset$

c) $L = (-\infty, 3)$

d) $L = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

3. „Falsche Fallunterscheidungen“
Manche Studentinnen und Studenten wissen (wie auch bei der Betragsgleichung), dass bei manchen Ungleichungen zwei Fälle unterschieden werden müssen, sie führen aber eine falsche Fallunterscheidung durch. Es werden folgende „falsche“ Fälle unterschieden:

i) Die Fallunterscheidung wird für $x > 0$ und $x < 0$ durchgeführt.

ii) Die Fälle $x - 3 < 5$ und $x - 3 > 5$ beziehungsweise

iii) $3x + 1 < 0$ und $3x + 1 > 0$ beziehungsweise

iv) $\frac{3x+1}{x-3} < 0$ und $\frac{3x+1}{x-3} \geq 0$ werden betrachtet.

Die zu diesem Problembereich erstellte Multiple-Choice-Aufgabe ist hier angeführt:

U6.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{9-x}{x+1} \geq 3$!

a) $L = (-\infty, -1) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

b) $L = \left(-1, \frac{3}{2}\right]$

c) $L = \emptyset$

d) $L = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

4. Manche Studentinnen und Studenten ändern für den negativen Fall, das heißt, für den Fall, bei dem der Ausdruck im Nenner negativ ist, nicht das Ungleichheitszeichen, sondern das Vorzeichen des Nenners. Dieser Fehler wird in Abbildung 6.3 veranschaulicht, wobei dieser Student/ diese Studentin den zusätzlichen Fehler macht, die Fallvoraussetzung nicht in der Lösung zu berücksichtigen.

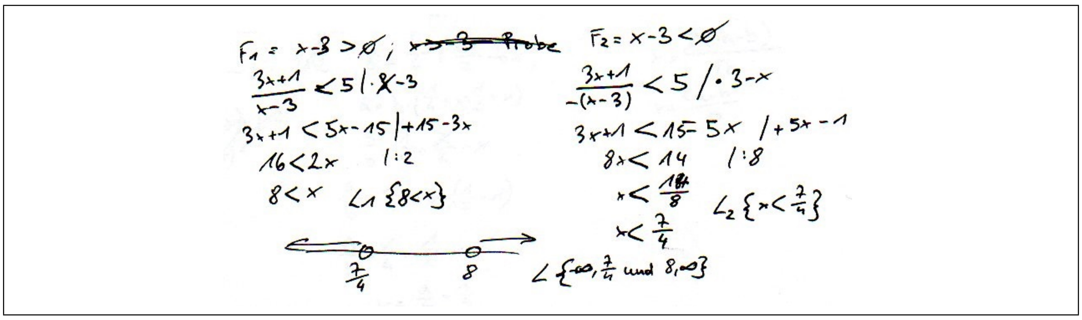


Abbildung 6.3: Beispiel für „Vorzeichen des Nenners wird geändert“

5. „Falsche Äquivalenzumformungen“
   Folgende falsche Umformungen wurden unter anderem von den Studentinnen und Studenten gemacht:

   i) $3 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3$

   ii) $16 < 2x \quad \Leftrightarrow \quad x < 8$

   iii) $3x + 1 < 5x - 15 \quad \Leftrightarrow \quad 16 < 8x$

   iv) $3x + 1 < 5x - 15 \quad \Leftrightarrow \quad -2x < -15$

   v) $3x + 1 < x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$

   vi) $3x + 1 < 5(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 1 < 5x - 3$

   vii) $3x + 1 < 5(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 1 < 5x + 2$

   Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

   U7.) Die Ungleichung $3x - 1 > 0$ ist äquivalent zu

   a) $x > \frac{1}{3}$
   b) $x < \frac{1}{3}$
   c) $x > -2$
   d) $x > -4$

   U8.) Die Ungleichung $-2x + 4 > -2$ ist äquivalent zu

   a) $x < -1$
   b) $x < 3$
   c) $x > 3$
   d) $x > -1$

U9.) Die Ungleichung $-x+3<2x-6$ ist äquivalent zu

a) $x<-3$

b) $x>-3$

c) $x>3$

d) $x<3$

U10.) Die Ungleichung $-x-3<3x+1$ ist äquivalent zu

a) $x<-1$

b) $x>\frac{1}{2}$

c) $x<\frac{1}{2}$

d) $x>-1$

U11.) Die Ungleichung $\frac{3x-2}{-3}>1$ ist äquivalent zu

a) $x>-\frac{1}{3}$

b) $x<-\frac{1}{3}$

c) $x<-\frac{5}{3}$

d) $x<\frac{1}{3}$

U12.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $2x+1<7x-14 \quad \Leftrightarrow \quad -13<9x$

b) $2x+1<7x-15 \quad \Leftrightarrow \quad -5x<-15$

c) $-2x>-16 \quad \Leftrightarrow \quad x>8$

d) $-2x+1>-15 \quad \Leftrightarrow \quad x<8$

U13.) Welche Aussagen sind wahr?

a) $7x+\frac{1}{2}>-x\cdot\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x>-\frac{1}{17}$

b) $8x+1<5(2x-5) \quad \Leftrightarrow \quad 8x+1<10x-5$

c) $\frac{3}{7}x+\frac{1}{8}<x-4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{8}+4<x+\frac{3}{7}x$

d) $8x+1<10x-5 \quad \Leftrightarrow \quad -2x<-6 \quad \Leftrightarrow \quad x>3$

6.3 Vereinzelte Fehler

1. Die Ungleichung wurde richtig gelöst, es wurden die beiden Fälle richtig unterschieden und durchgerechnet, die Lösungsmenge wurde aber falsch bestimmt. Es wurden die Lösungen und Bedingungen der jeweiligen Fälle auf einer Zahlengerade eingezeichnet, aber eine falsche Lösungsmenge „abgelesen“. (Siehe Abbildung 6.4)

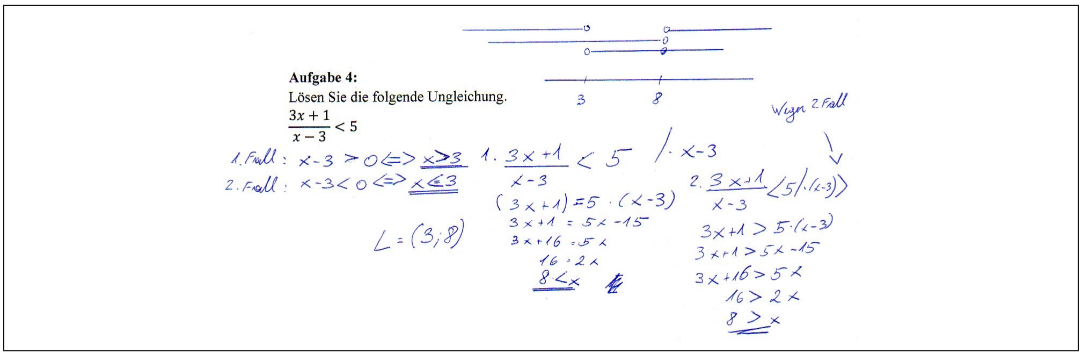


Abbildung 6.4: Beispiel für „Falsche Lösungsmenge“

2. Das Ungleichheitszeichen wird durch ein Gleichheitszeichen ersetzt und die dadurch entstehende Gleichung gelöst. Die als Lösung erhaltene Zahl wird dann in die Ungleichung eingesetzt. Der Student/ Die Studentin erhält eine falsche Aussage und schließt daraus auf eine leere Lösungsmenge.

3. Es werden die beiden Fälle richtig unterschieden. Für den Fall, bei dem der Nenner negativ ist, wird aber das Ungleichheitszeichen bei der Multiplikation mit dem Nenner nicht geändert. Ebenso tritt auch immer wieder der Fehler auf, dass bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen nicht umgedreht wird.

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

U14.) Die Ungleichung $5x - (3 - 2x) < 9x + 5$ ist äquivalent zu

a) $x > -4$

b) $x < 4$

c) $x < -4$

d) $x > 4$

U15.) Die Ungleichung $\frac{-5x+7}{2} < 3$ ist äquivalent zu

a) $x < \frac{1}{5}$

b) $x > \frac{6}{5}$

c) $x > \frac{1}{5}$

d) $x < -\frac{1}{5}$

U16.) Die Ungleichung $3x + 2 < 6x - 3$ ist äquivalent zu

a) $x > \frac{5}{9}$

b) $x < -\frac{5}{3}$

c) $x < \frac{5}{3}$

d) $x > \frac{5}{3}$

4. Die Lösungsmenge wird falsch angegeben, da die Lösungsmengen der beiden Fälle nicht vereinigt, sondern geschnitten werden. Dies wird in Abbildung 6.5 veranschaulicht, wobei bei diesem Beispiel auch noch ein zusätzlicher Fehler gemacht wird: Das Ungleichheitszeichen wird auch im Falle eines positiven Nenners bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht.

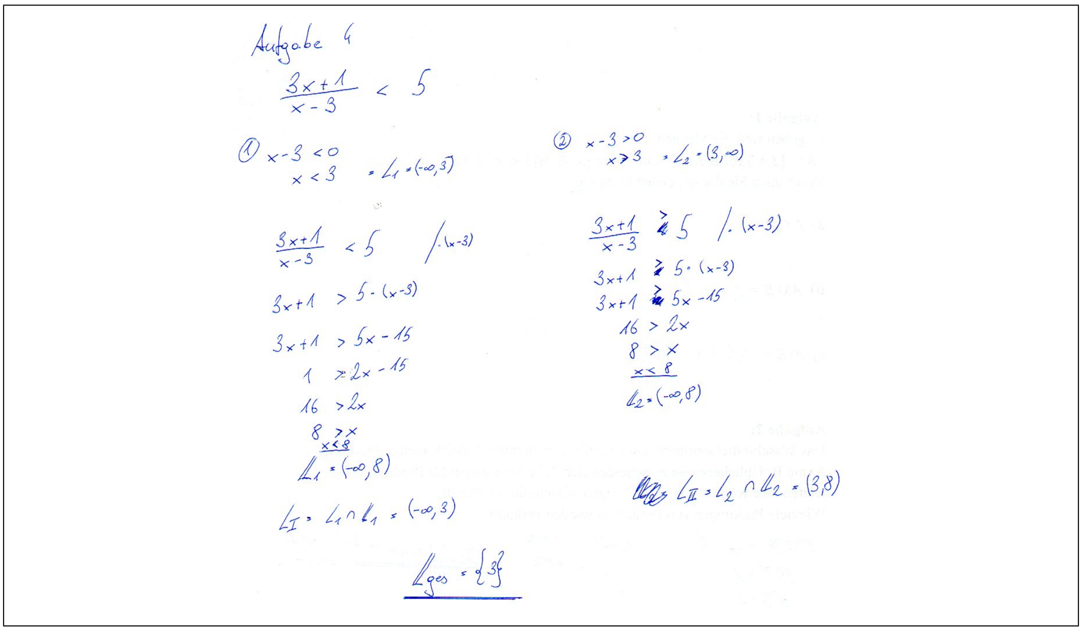


Abbildung 6.5: Beispiel für „Lösungsmengen werden geschnitten“

Die zu diesem Problembereich erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind hier angeführt:

U17.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{2x-3}{x} < 5$!

a) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > 0\}$

b) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > 1\}$

c) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \vee x > 0\}$

d) $L = \{\}$

Teil 2
Feedback zu Multiple-Choice-Aufgaben

7 Gespräche mit Studierenden

Um ein Feedback zu den entwickelten Aufgaben zu erhalten sowie um die Einstellungen der Studentinnen und Studenten bezüglich Multiple-Choice-Aufgaben zu erfahren, wurden im August 2014 Gespräche mit 13 Studierenden, die sich dankenswerterweise freiwillig zur Verfügung gestellt haben, durchgeführt. Für diese Gespräche wurden aus dem Themenbereich „Brüche“ einige Aufgaben ausgewählt, die im Kapitel 7.1 zur Übersicht noch einmal gesammelt aufgelistet sind. Außerdem sind sie mit den Zahlen 1 bis 27 nummeriert, um das Lesen in den folgenden Kapiteln zu erleichtern. Sie entsprechen den Aufgaben B1, B5, B7, B3, B10, B12, B13, B16, B17, B19, B25, B32, B34, B61, B63, B37, B45, B46, B47, B48, B49, B52, B53, B54, B65, B56 und B57.

7.1 Aufgaben

Folgende Aufgaben sollten von den Studentinnen und Studenten gelöst und im Gespräch diskutiert werden:

1. Welche Aussagen sind wahr?
   a) $\frac{9}{3} = 3$
   b) $\frac{9}{0} = 0$
   c) $\frac{9}{0} = 1$
   d) $\frac{9}{2} = 4,5$

2. Welche Rechnungen sind richtig?
   a) $\frac{17}{5} - 1 = \frac{12}{5}$
   b) $\frac{6}{4} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$
   c) $\frac{7}{5} - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$
   d) $\frac{23}{7} - \frac{1}{9} = \frac{200}{63}$

3. $8 - \frac{3}{2} =$
   a) $\frac{5}{2}$
   b) $6,5$
   c) $\frac{13}{2}$
   d) $\frac{5}{6}$

4. Welche Brüche sind richtig gekürzt?
   a) $\frac{6}{12} = \frac{1}{6}$
   b) $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$
   c) $\frac{16}{32} = \frac{4}{8} = \frac{1}{4}$
   d) $\frac{10}{20} = \frac{1}{10}$

5. Welche Rechnungen sind richtig?
   a) $\frac{17}{15} + \frac{1}{2} = \frac{18}{17}$
   b) $\frac{16}{5} + \frac{5}{3} = \frac{16}{3}$
   c) $1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5}$
   d) $3 + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$
   e) $3 + \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$

6. Welche Aussagen sind wahr?
   a) $\frac{a}{b} + c = \frac{a+c}{b}$
   b) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$
   c) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$
   d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

7. Welche Aussagen sind wahr?
   a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$
   b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b+b}$
   c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b^2}$
   d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{2b}$

8. Welche Aussagen sind wahr?
   a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$
   b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$
   c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$
   d) $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{10} = \frac{8}{60}$

9. Welche Aussagen sind wahr?
   a) $n + \frac{a}{b} = \frac{n+a}{b}$
   b) $n = \frac{n}{n}$
   c) $\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$
   d) $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$
   e) $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$

10. $\frac{4}{7} : \frac{3}{4} =$
    a) $\frac{16}{21}$
    b) $\frac{3}{7}$
    c) $\frac{21}{16}$
    d) $\frac{7}{3}$

11. Welche Aussagen sind wahr?
    a) $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a:c}{b}$
    b) $\frac{7}{8} : \frac{3}{8} = \frac{7}{3}$
    c) $\frac{4}{9} : \frac{1}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$
    d) $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$
    e) $\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

12. Welche Aussagen treffen zu?
    a) Zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ gibt es keinen Bruch.
    b) Zwischen $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{21}$ gibt es unendlich viele Bruchzahlen.
    c) $\frac{11}{60}$ liegt zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$.
    d) Die Brüche $\frac{23}{120}$, $\frac{22}{120}$, $\frac{21}{120}$ sind die einzigen drei Brüche, die es zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ gibt.

13. Welche Aussagen treffen zu?
    a) $8 \cdot \frac{9}{4} < 8$
    b) $8 \cdot \frac{9}{4} > 8$
    c) $8 \cdot \frac{3}{4} < 8$
    d) $8 \cdot \frac{3}{4} > 8$

14. $(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}) : (\frac{8}{9} - \frac{3}{4}) =$
    a) $\frac{3}{5}$
    b) $\frac{5}{42}$
    c) $\frac{42}{5}$
    d) $\frac{5}{3}$

15. $(\frac{1}{2} + \frac{7}{5}) \cdot 3 - (\frac{9}{5} : 4) =$
    a) $\frac{417}{140}$
    b) $\frac{21}{4}$
    c) $\frac{313}{90}$
    d) $\frac{17}{4}$

16. Vereinfachen Sie: $\frac{1+8a}{2a} - \frac{6a+10}{5}$
    a) $\frac{-12a^2+20a+5}{10a}$
    b) $-12a + 7$
    c) $-12a^2 + 7$
    d) $\frac{-12a^2+60a+5}{10a}$

17. Vereinfachen Sie: $\frac{ab \cdot a^2+6ab+a^3}{6a}$
    a) $ab + b + a^2$
    b) $\frac{a^2b+6b+a^2}{6}$
    c) $\frac{ab+6b+a^2}{6}$
    d) $a^2b + b + a^2$

18. Vereinfachen Sie: $\frac{70ab+45a^2+60a^2b^2}{5a^2b^2}$
    a) 35
    b) $70ab + 45a^2 + 12$
    c) $\frac{14b+9a+12ab^2}{ab^2}$
    d) $\frac{14a+9+12b}{b}$

19. Welche Aussagen sind wahr?
    a) $\frac{27a+9b^2}{9b^2} = 27a$
    b) $\frac{27a+9b^2}{9b^2} = 3a + 1$
    c) $\frac{27a+9b^2}{9b^2} = \frac{3a}{b^2} + 1$
    d) $\frac{27a+9b^2}{9b^2} = \frac{3a+b^2}{b^2}$

20. Welche Aussagen sind wahr?
    a) $\frac{22a+11b}{11ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$
    b) $\frac{22a+11b}{11ab} = 22 + 1 = 23$
    c) $\frac{22a+11b}{11ab} = 22$
    d) $\frac{22a+11b}{11ab} = \frac{2a+b}{ab}$

21. Welche Aussagen sind wahr?
    a) $\frac{31}{a} - \frac{28-7a}{2a^2} = \frac{31\cdot(2a^2)-(28-7a)\cdot a}{a\cdot(2a^2)} = 31 - 28 + 7a = 3 + 7a$
    b) $\frac{5b^2+b^3+27b}{b^4} = b^2 + 32$
    c) $\frac{15b^2+b^3+5b}{5b^4} = \frac{15b+b^2+5}{5b^3}$
    d) $\frac{22}{a} - \frac{5+7a}{b} = \frac{22b-5+7a\cdot a}{ab} = \frac{7a^2+22b-5}{ab}$

22. Welche Aussagen sind wahr?
    a) $\frac{\frac{5a-c}{2}}{\frac{-b}{1}} = \frac{-5ab+bc}{2}$
    b) $\frac{2a-\frac{b}{2}}{1-2b} = \frac{4a-b}{2-2b}$
    c) $\frac{\frac{5a-c}{2}}{\frac{-b}{1}} = \frac{5a-c}{-2b}$
    d) $\frac{2a-\frac{b}{2}}{1-2b} = \frac{2a-b}{2-4b}$

23. Vereinfachen Sie $\frac{a+\frac{2b-a}{3}}{4a-\frac{7a-b}{2}}$ so, dass keine Doppelbrüche vorkommen.
    a) $\frac{4}{3}$
    b) $-\frac{4b}{9a+3b}$
    c) $\frac{(a+b)^2}{3}$
    d) $\frac{4(a+b)}{3(a-b)}$

24. Vereinfachen Sie: $\frac{\frac{1}{2}-\frac{3a+5}{3}}{\frac{7}{9}+\frac{2}{3}a}$
    a) $-\frac{3}{2}$
    b) $\frac{39-18a}{14+12a}$
    c) -6
    d) $\frac{-(7+6a)^2}{54}$

25. Berechnen Sie: $\frac{4}{3} \cdot (\frac{9}{2} - (\frac{1}{4} + \frac{3}{6}) \cdot 4 + 5 \cdot (\frac{1}{8} : \frac{5}{64}))$
    a) 11
    b) $\frac{47}{4}$
    c) 12
    d) $\frac{38}{3}$

26. Welche Aussagen sind wahr?
    a) $\frac{15a^2}{\frac{1}{ab}} = \frac{15a^2}{ab} = \frac{15a}{b}$
    b) $\frac{\frac{a+b}{3}}{\frac{a-b}{3}} = \frac{a+b}{a-b}$
    c) $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{a^2}{7} \cdot b} = \frac{7b}{a^2}$
    d) $\frac{\frac{1}{1}}{5 \cdot \frac{a}{b}} = \frac{b}{5a}$

27. Welche Aussagen sind wahr?
    a) $\frac{15a^2}{\frac{1}{ab}} = 15a^3b$
    b) $\frac{\frac{2a}{1}}{\frac{1}{ab}} = \frac{2a}{ab} = \frac{2}{b}$
    c) $\frac{1}{\frac{5a+c}{b}} = \frac{b}{5a+c}$
    d) $\frac{\frac{3b}{1}}{\frac{1}{a}} = 3ab$

7.2 Leitfaden

Das Gespräch mit den Studentinnen und Studenten gliedert sich in drei Teile: „Allgemeine Fragen zur Person“, „Lösen und Besprechen der Multiple-Choice-Aufgaben“ und „Sonstige Fragen“.

Teil 1 - Allgemeine Fragen zur Person

Zu Beginn des Gespräches wurden die Studierenden ersucht, folgende Fragen zu beantworten, unter anderem, um einen Eindruck zu bekommen, ob für den Befragten / die Befragte Mathematik eher leicht oder schwierig ist:

1. Wie würdest du dich in Mathematik einstufen? (Bist du gut in Mathematik oder eher nicht?)

2. Wie leicht oder schwierig ist Mathematik für dich?

3. Wie war Mathematik für dich in der Schule?

4. Kommst du direkt von der Schule oder hast du nach dem Ende deiner Schulzeit zuerst gearbeitet, bevor du dich für ein Studium entschieden hast?

Teil 2 - Lösen und Besprechen der Multiple-Choice-Aufgaben

Für diesen Teil des Gesprächs wurden 30 Minuten eingeplant. Es sollte immer eine Aufgabe gelöst werden, dann wurde sie gemeinsam besprochen und die unten angeführten Fragen dazu beantwortet, bevor die nächste Aufgabe gelöst wurde.

Folgende Fragen sollten die Studierenden zu jeder Multiple-Choice-Aufgabe beantworten:

1. Ist diese Aufgabe klar formuliert?
2. Wie würdest du die Aufgabe einstufen? (leicht, mittel, schwierig)
3. Würdest du dir bei dieser Aufgabe einen Lösungsweg wünschen?
4. Gibt es sonstige Bemerkungen/Hinweise?

Teil 3 - Sonstige Fragen

Nach 30 Minuten wurde das Lösen und Besprechen der Multiple-Choice-Aufgaben beendet, auch wenn nicht alle Aufgaben gelöst wurden. Dann wurden den Studierenden noch folgende Fragen gestellt:

1. Hast du beim Lösen und Besprechen dieser Multiple-Choice-Aufgaben etwas gelernt?
2. Was ist deine generelle Einstellung zu Multiple-Choice-Aufgaben? Findest du sie sinnvoll?
3. Benützt du die Übungsplattform regelmäßig? Wenn ja, was sind deine Eindrücke? Gibt es genug Aufgabenauswahl?
4. Gibt es sonstige Anregungen/ Wünsche?

7.3 Allgemeines

7.3.1 Informationen zu den Befragten

Sechs Studentinnen und sieben Studenten erklärten sich bereit, in einem 30- bis 40-minütigen Gespräch, ausgewählte Multiple-Choice-Aufgaben zu lösen und zu besprechen. Die Befragten werden in den folgenden Kapiteln mit Student 1, Student 2, Studentin 3, Studentin 4, Studentin 5, Studentin 6, Studentin 7, Student 8, Student 9, Student 10, Student 11, Student 12 und Studentin 13 bezeichnet. Passagen, die unter Anführungszeichen gesetzt sind, sind direkt aus den Interviews übernommen.

Aus den Gesprächen ergaben sich folgende Informationen zu den Befragten:

Student 1 absolvierte ein Jahr zuvor die Reifeprüfung. Er war in Mathematik ein guter Schüler, merke aber jetzt, dass er trotzdem „einen Rückstand hat“. Im Warm-up-Kurs lernte er viele Inhalte, die in der Schule nur kurz oder nicht behandelt wurden.

Student 2 stuft sich als ein schlechter bis durchschnittlicher Mathematiker ein. Er hat schon einiges, was er in der Schule, die er drei Jahre zuvor abgeschlossen hat, gelernt hat, vergessen.

Studentin 3 war eine gute Schülerin, da sie aber nur wenig für Mathematik gelernt hatte, waren ihre Noten eher durchschnittlich. Ihr Verständnis für Mathematik ist laut eigenen Angaben ganz gut, wenn sie aber zu wenig übt, merkt sie sich bestimmte Dinge nicht. Folglich stuft sie sich als durchschnittliche Mathematikerin ein. Den Warm-up-Kurs besuchte sie zur Auffrischung, da ihr Schulabschluss schon neun Jahre zurückliegt.

Studentin 4 legte vor zehn Jahren ihre Reifeprüfung ab und stuft sich als durchschnittliche Mathematikerin ein. Manche mathematischen Inhalte findet sie einfach, aber insbesondere mathematische Grundlagen, die in der Unterstufe des Gymnasiums gelernt werden, stellen für sie oft ein Problem dar. Auch das Themengebiet „Brüche“ ist für sie schwieriger. Der Grund für dieses Fehlen der Grundlagen ist, dass sie in der Unterstufe für ihre Schularbeiten nichts gelernt hat, da ihre Lehrerin während den Schularbeiten geschlafen hat. In der Oberstufe kämpfte sich Studentin 4 dann laut eigenen Aussagen irgendwie durch.

Studentin 5 machte ebenfalls ihre Reifeprüfung vor zehn Jahren. Sie versteht jetzt Mathematik besser als in der Schule. Wenn sie sich konzentriert, fällt ihr Mathematik nicht schwer, wenn sie aber nur wenig lernt, macht sie Fehler. Sie neigt auch zu Flüchtigkeitsfehlern.

Studentin 6 legte ein Jahr zuvor ihre Reifeprüfung ab. Für sie ist Mathematik nicht schwierig, wenn sie im Selbststudium übt. In der Schule war sie eine durchschnittliche Mathematikerin, da sie nur wenig für Mathematik gelernt hatte. Sie hätte aber laut eigener Aussage besser sein können.

Studentin 7 absolvierte ihre Reifeprüfung vor 15 Jahren. Obwohl sie laut eigener Aussage eine sehr schlechte Mathematikerin in der Schule war, zählte Mathematik zu ihren Lieblingsfächern. Sie glaubt, dass sie sich immer eingeredet habe, sie könne Mathematik nicht verstehen. Nach der Schule fehlte ihr Mathematik schnell und sie setzte sich deshalb zuhause mit verschiedenen mathematischen Inhalten auseinander und „irgendwann hat sich ein Knoten gelöst“. Ihre Einstufung jetzt ist, dass sie keine schlechte Mathematikerin ist, aber auch „kein Genie“.

Student 8 stuft sich als durchschnittlicher Mathematiker ein. Er besuchte nach der Hauptschule eine HTL, die er nicht beendete. Daraufhin begann er eine Lehre, da sie ihm aber nicht zusagte, machte er nebenbei die Berufsreifeprüfung. Die Voraussetzungen an der Fachhochschule sind laut seinen Angaben aber ganz anders und so lernte er im Warm-up-Kurs viel Neues.

Student 9 war in der Schule ein durchschnittlicher Mathematiker. Er lernte viel für Mathematik. Die Reifeprüfung absolvierte er im Schuljahr 2012/2013.

Student 10 steht seit 14 Jahren im Berufsleben. Er sagt, er habe das Gymnasium in der 5. Klasse aufgrund von Faulheit abgebrochen und studiert jetzt ohne Reifeprüfung. In der Schule war er nicht gut in Mathematik. Als Grund gibt er an, dass er zu faul gewesen sei. Mittlerweile ist er in Mathematik besser geworden und meint, dass Mathematik „geht, wenn man nicht faul ist“.

Student 11 machte die Reifeprüfung vor einem Jahr und würde sich als schlechter Mathematiker einstufen. Er besuchte den Kurs zur Wiederholung und Auffrischung. Auch ist zu vermerken, dass Student 11 das Asperger-Syndrom, eine Form des Autismus, hat. Er erklärt, dass er deshalb Dinge teilweise anders oder falsch wahrnehme und leicht überfordert sei.

Student 12 hatte 10 Jahre lang nichts mit Mathematik zu tun und besuchte deshalb den Warm-up-Kurs. Er sagt: „Jetzt bin ich aber in einer gewissen Weise überrascht, wie viel dann doch noch irgendwie von vor zehn Jahren hängen geblieben ist, also, von dem her, würde ich sagen, liegt mir Mathematik einigermaßen“. In der Schule war er in Mathematik ein durchschnittlicher Schüler, er hatte nie Probleme, war aber auch nicht sehr gut darin.

Studentin 13 schloss die Schule vor circa 20 Jahren ab. Auf die Frage, ob ihr Mathematik leicht oder schwer falle, antwortet sie, dass dies vom Thema abhänge. Manche Themenbereiche sind einfach für sie, andere wiederum schwierig. Auch in der Schule war es ganz unterschiedlich: „Ich hab eine Professorin gehabt, die war jetzt nicht so toll im Erklären, da hab ich mir relativ schwer getan, und bei einer anderen Professorin, die hat das super erklärt, und da war ich dann eigentlich auch immer gleich mit dabei.“

7.3.2 Verlauf der Gespräche

Es stellte sich im Verlauf der ersten Gespräche heraus, dass es nicht sehr sinnvoll ist, wie geplant, bei jeder Multiple-Choice-Aufgabe die im Kapitel 7.2 (Lösen und Besprechen der Multiple-Choice-Aufgaben) erwähnten Fragen zu stellen. Daher wurde diesbezüglich eine Änderung unternommen und diese Fragen nicht bei jeder einzelnen Aufgabe gestellt, sondern nach einer gewissen Anzahl von bereits gelösten Aufgaben. Das heißt, es wurde zum Beispiel nicht nach Aufgabe 3 gefragt, ob diese klar formuliert war, sondern es wurde gefragt, ob die Aufgaben insgesamt verständlich formuliert waren.

Ebenso wurde festgestellt, dass nicht alle ausgewählten Multiple-Choice-Aufgaben für dieses Gespräch geeignet waren und diese wurden infolgedessen in den folgenden Interviews weggelassen. Bei den Aufgaben 2, 3 und 5 mussten die Studierenden einfache Bruchrechnungen durchführen, was für die meisten Studierenden kein Problem ist, aber dennoch eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt. Daher wurde beschlossen, sie in den weiteren Gesprächen nicht mehr zu verwenden.

In verschieden Quellen kann man finden, dass eine Maßnahme zu Vermeidung von Fehlern unter anderem auch darin besteht, den Schülerinnen und Schülern Fehlersuchaufgaben vorzulegen. [6] Denn „*konfrontiert man Lernende mit fingierten oder realen, aber fehlerhaften Lösungen und fordert sie auf zur Stellungnahme, so können sie sich mit Fehlern auseinandersetzen, ohne alle Fehler selbst gemacht haben zu müssen*“ [11]. „*Das Analysieren und Beschreiben fremder Fehler kann zu einem Kompetenzzuwachs für* *den Umgang mit eigenen Fehlern führen. Wenn fremde Fehler auch eigene Fehlmuster enthalten, können diese aufgebrochen und bearbeitet werden*“ [8].

In den erstellten Multiple-Choice-Aufgaben sind immer wieder mathematische Fehlvorstellungen eingebaut. Zum Beispiel werden in Aufgabe 2b zwei Brüche subtrahiert, indem die Zähler und die Nenner subtrahiert werden. Es war also interessant zu erfahren, ob die Studierenden diese mathematischen Fehlvorstellungen erkennen würden. Dabei wurde festgestellt, dass manche Studierende die eingebauten Fehler sofort sehen, andere wiederum konnten absichtlich eingebaute Fehler nicht nachvollziehen.

7.3.3 Anzahl der gelösten Aufgaben

In der folgenden Tabelle wird angegeben, wie viele Aufgaben die Studierenden jeweils gelöst haben (Spalte „Anzahl“). Die Spalte „Ausgelassen“ enthält die Aufgaben, die im Gespräch mit dem jeweiligen Studenten/ der jeweiligen Studentin nicht gemacht wurden. Wobei die Aufgaben 2, 3 und 5 nicht extra in diese Spalte eingetragen wurden, da sie beim Großteil der Studierenden weggelassen wurden. (Aufgabe 2 wurde mit den Studenten 1 und 2 sowie mit den Studentinnen 3 und 4 besprochen. Aufgabe 3 wurde von den Studierenden 1, 2 und 3 richtig gelöst und Aufgabe 5 wurde von Student 1 richtig gelöst, mit Student 2 und Studentin 3 wurde diese Aufgabe nur besprochen. Bei den anderen Studierenden wurden diese Aufgaben nicht gelöst und nicht besprochen.)

Student/Studentin	Anzahl	Ausgelassen
1	17	
2	17	
3	17	
4	17	
5	15	18
6	14	
7	19	
8	14	
9	22	
10	14	
11	11	
12	18	
13	17	18

7.4 Auswertung

7.4.1 Auswertung der Aufgaben: Übersicht

Eine Einteilung in „Richtig gelöst“ und „Falsch gelöst“ zu machen, ist nicht sehr einfach. Bei einem Gespräch hat man die Möglichkeit, den Studierenden kleine Hilfen zu geben, die es ihnen ermöglichen, die Aufgabe trotz anfänglicher Schwierigkeiten zu lösen. Wollen die Studierenden aber im Selbststudium diese Multiple-Choice-Aufgabe auf der Plattform üben, so sind sie auf sich alleine gestellt und scheitern eher, als im Gespräch. Es ist daher anzunehmen, dass die Anzahl der falsch gelösten Aufgaben höher gewesen wäre, wenn das Lösen der Aufgaben nicht im Gespräch erfolgt wäre.

Die Spalte „Richtig“ beinhaltet die Anzahl der Studierenden, die diese Aufgabe ohne Hilfe richtig beantwortet haben. Die Spalte „Falsch“ beinhaltet die Studierenden, die diese Aufgabe falsch gelöst haben. Wobei „S“ für Student oder Studentin steht. (Das heißt, S1 entspricht Student 1.) In den beiden übrigen Spalten sind diejenigen eingetragen, die, um die Aufgabe lösen zu können, eine kleine oder größere Hilfestellung bekommen haben. Die Tabelle soll dazu dienen, einen Eindruck zu bekommen, bei welchen Multiple-Choice-Aufgaben Probleme auftraten und welche für die Studierenden weniger schwierig waren.

Aufgabe	Richtig	Falsch	wenig Hilfe	mehr Hilfe
1	9		S1, S3, S8, S10	
4	12		S12	
6	12		S9	
7	12		S11	
8	13			
9	11		S5, S11	
10	13			
11	8	S5, S12, S13	S3, S8	
12	4		S1, S6, S10, S11, S13	S2, S3, S5, S8
13	11	S6	S10	
16	7	S2	S5, S8, S10	S1
17	7	S10	S8, S12	S1, S2

Für Teil 2 dieser Gespräche war mit 30 Minuten eine fixe Zeit festgelegt, bei der das Lösen und Besprechen der Multiple-Choice-Aufgaben gestoppt wurde. Aus diesem Grund wurden nicht mit allen Studierenden gleich viele Aufgaben bearbeitet. Bei den meisten Gesprächen aber endete Teil 2 mit Aufgabe 17. Nur vereinzelte Studierende haben in dieser vorgegebenen Zeit mehr geschafft. Daher wurde die Tabelle nur bis Aufgabe 17 erstellt. Ebenso ist zu vermerken, dass das Gespräch mit Student 11 bei Aufgabe 14 endete, das heißt, in der Tabelle verringert sich die Anzahl der Studierenden bei den Aufgaben 16 und 17 auf 12. In der Tabelle nicht angeführt sind die Aufgaben 2, 3, 5, 14 und 15, da diese Multiple-Choice-Aufgaben beim Großteil der Befragten weggelassen, beziehungsweise mit den Studierenden nur besprochen wurden.

7.4.2 Auswertung der Aufgaben

Aufgabe 1

Manche Studierenden waren bei *1b* und *1c* verunsichert: Sie wussten eigentlich, dass eine Division durch Null nicht möglich ist, waren aber, sobald sie *1b* und *1c* sahen, verwirrt und fragten sich, ob *1b* nicht doch richtig sein musste. Erst durch Nachfragen sagten sie, dass eine Division durch Null eigentlich nicht möglich sei und erkannten, dass sowohl *1b* als auch *1c* falsch sind.

Unter anderem werden folgende Aussagen von diesen Studierenden gemacht:

Student 1: „Ich glaube, » 9 : 0 « müsste eigentlich eh Null sein, oder? [...] Durch Null dividieren, das geht eigentlich gar nicht, darum bin ich mir gerade einfach unsicher, weil sobald bei uns unten Null in der Schule raus gekommen ist, ist das gleich einfach eine falsche Aussage.“

Student 8: „Das Zweite ist auch richtig oder Blödsinn, » 9 : 0 « , das darfst du nicht machen. Also » 9 : 0 = 0 « muss auch richtig sein, also prinzipiell darfst du es nicht machen.“

Aufgabe 2, **Aufgabe 3** und **Aufgabe 5** wurden, wie bereits erwähnt, beim Großteil der Gespräche weggelassen und werden daher nicht näher erörtert.

Aufgabe 4

Diese Multiple-Choice-Aufgabe wurde erstellt, da viele Schülerinnen und Schüler diese speziellen Brüche ($\frac{6}{12}, \frac{4}{8}, \frac{10}{20}$) falsch kürzen (siehe Kapitel 2.1.1 Punkt 5). Auch bei den Gesprächen mit den Studierenden wurde festgestellt, dass einige Studentinnen und Studenten länger überlegen mussten, da diese Brüche auf den ersten Blick als richtig gekürzt erschienen. Erst durch genaues Hinschauen und Überlegen, stellten diese Studierenden fest, dass drei Aussagen falsch sind.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 stellt für die Befragten kein Problem dar und wurde von allen richtig gelöst. Student 9 kreuzte zwar zuerst auch *6a* ($\frac{a}{b} + c = \frac{a+c}{b}$) an, wusste aber mit dem Hinweis, er solle *6a* nochmal anschauen, sofort, dass es falsch ist. Es ist anzunehmen, dass es ein Flüchtigkeitsfehler war, da er bei *6c* wusste, dass man bei einer Bruchaddition und Bruchsubtraktion die beiden Brüche auf gemeinsamen Nenner bringen muss.

Aufgabe 7

Auch Aufgabe 7 wurde von fast allen Studierenden ohne Hilfestellung fehlerfrei gelöst. Studentin 3 glaubte bei *7a* zuerst, hier sei richtig auf gemeinsamen Nenner gebracht worden, sie sah also eine Bruchaddition statt einer Bruchmultiplikation, merkte aber dann selber, dass *7a* falsch ist. Sie sagte, sie wäre „reingefallen“, wenn sie nicht die richtige Lösung gesehen hätte. Student 11 hatte anfangs Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe, da er $b \cdot b = 2b$ für richtig hielt. Er wusste aber auch, dass $b \cdot b = b^2$ ist und sah erst durch einen Hinweis, dass $b \cdot b = 2b$ falsch ist.

Aufgabe 8 und **Aufgabe 10** wurden von allen Studierenden ohne Schwierigkeiten richtig gelöst.

Aufgabe 9

Einige Studierende waren bei *9b* verunsichert. Manche erkannten aber durch Überlegen, dass $n = \frac{n}{n}$ falsch ist. Andere überprüften die Aussage, indem sie eine Zahl einsetzten und stellten fest, dass diese nur für die Zahl 1 gilt. Studentin 5 kreuzte *9b* als richtige Lösung an, erklärte dann aber, dass es ein Flüchtigkeitsfehler gewesen sei. Student 11 war zuerst auch der Meinung, dass *9b* richtig sei. Mit der Hilfestellung, er solle eine Zahl einsetzten, erkannte er, dass diese Aussage falsch ist.

Aufgabe 11

Beim Lösen und Besprechen der Aufgabe 11 stellte sich *11c* ($\frac{4}{9} : \frac{1}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$) als sehr interessant heraus. Einige Studierende waren auch hier wieder verunsichert, da die Rechnung nicht so dort stand, wie die Studentinnen und Studenten diese Division durchführen würden. Eigentlich würden die Befragten diese Division richtig rechnen, sie überlegten aber, ob es nicht egal sei, von welchen der beiden Brüche man den Kehrwert bildet. Einige kamen zum Standpunkt, dass beide Versionen richtig sein müssten. Manche probierten es durch Vergleichen aus und stellten fest, dass diese Annahme falsch ist. Andere mussten darauf hingewiesen werden, die Division zum Vergleich so durchzuführen, wie sie es normalerweise tun würden.

Folgende Aussagen wurden unter anderem gemacht:

Studentin 5: „Nee, kann ich das so machen? Nein. Doch, natürlich. Ich drehe das um, ja. [...] Ich würde immer eben den Zweiten nehmen, das ist wirklich selten.“ - „Also das darf man gar nicht machen. Das wusste ich nicht; [...] ich wusste nicht, dass das eine feste Regel ist, dass man den zweiten Term umdrehen muss, also, dass man den ersten gar nicht umdrehen darf. Gut zu wissen. [...] Ich hätte es nie so gemacht.“

Student 10 sagte, dass er es immer instinktiv mache und nie darüber nachgedacht hätte.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 bereitete den meisten Studierenden Schwierigkeiten. Nur vier der Befragten konnten die Aufgabe ohne Hilfe lösen. Die anderen brauchten Erklärungen, um diese Aufgabe lösen zu können. Unter diesen Studierenden gab es einige wenige, die nur einen kleinen Tipp benötigten, mit den meisten musste die Aufgabe schrittweise erarbeitet werden. Auch die Überprüfung (ohne Taschenrechner) ob $\frac{11}{60}$ zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ liegt, bereitete manchen große Probleme. Nach dem gemeinsamen Lösen der Aufgabe sagten manche, dass diese Aufgabe eigentlich einfach sei. Eine Studentin war sehr fasziniert von dieser Aufgabe. Sie sagte, sie habe sich das noch nie überlegt und dass einfache Sachen doch nicht so selbstverständlich seien.

Aufgabe 13

Diese Aufgabe wurde erstellt und für diese Gespräche ausgewählt, da viele Schülerinnen und Schüler die Fehlvorstellung haben, dass eine Multiplikation immer ein Vergrößern bedeutet (siehe Kapitel 2.1.2 Punkt 2). Nun war es interessant zu erfahren, wie die Studierenden diese Aufgabe lösen würden.

Eine mögliche Begründung für die Richtigkeit der Aussage in *13c* ($8 \cdot \frac{3}{4} < 8$) wäre: $\frac{3}{4} < 1$. Multipliziert man 8 mit einer Zahl, die kleiner als 1 ist, so ist das Ergebnis dieser Multiplikation kleiner als 8.

Die meisten Studierenden lösten diese Aufgabe, indem sie die Ungleichung umformten beziehungsweise die linke Seite der Gleichung ausrechneten. Nur wenige begründeten ihre

Antwort wie oben erwähnt.
Beim ersten Gespräch wurde festgestellt, dass die Zahlen für diese Aufgabe leider nicht gut gewählt wurden, da gekürzt werden kann. In den weiteren Gesprächen wurden deshalb andere Zahlen gewählt.

Aufgabe 14 und **Aufgabe 15** wurden mit den Studierenden nur besprochen und werden deshalb nicht näher erörtert.

Aufgabe 16

Bei dieser Aufgabe traten folgende zwei Problembereiche, die auch bereits bei den untersuchten Endtests vorkamen, auf:

- Zwei Studierende brachten die beiden Brüche zwar auf gemeinsamen Nenner, aber sie setzten den Zähler des zweiten Bruchs nicht in Klammern.
  (Siehe Kapitel 2.2.1 Punkt 1)
- Vier Studierende wussten nicht, ob sie den gemeinsamen Nenner weglassen können beziehungsweise ließen sie ihn weg und stellten dann, weil sie ihr Ergebnis so nicht fanden, fest, dass sie den gemeinsamen Nenner nicht weglassen können. (Vergleiche Kapitel 4.3.2 Punkt 6)

Aufgabe 17

Ein typischer Fehler bei dieser Aufgabe ist, dass „a zweimal aus dem ersten Glied des Zählerterms herausgehoben wird“:

$$\frac{ab \cdot a^2 + 6ab + a^3}{6a} = \frac{a \cdot (b \cdot a + 6b + a^2)}{6a}$$

Dieser Fehler wurde von drei Studierenden gemacht.
Auch der Fehler, der bei Aufgabe 16, Punkt 2, beschrieben wird, kam hier vor: Student 1 sagte, er würde hier mit 6a multiplizieren, damit der Bruch wegfalle.

7.4.3 Auswertung - Allgemeine Fragen zu den Aufgaben

Den Studierenden wurden auch die Fragen aus Kapitel 7.2 Teil 2 gestellt, wobei es keine sonstigen Bemerkungen zu den Multiple-Choice-Aufgaben seitens der Studentinnen und Studenten gab. Auch die Frage bezüglich Schwierigkeitsgrad stellte sich als uninteressant und nicht relevant heraus und es wird daher nicht weiter darauf eingegangen. Bezüglich der Formulierung ist zu sagen, dass alle Studierenden die Aufgaben klar formuliert und verständlich fanden. Ebenso sollte bei den Gesprächen die Meinung der Studierenden bezüglich „Lösungsweg“ in Erfahrung gebracht werden. Die Antworten sind im Folgenden zusammengefasst.

Lösungsweg

Vier der Befragten sagten, dass bei den Multiple-Choice-Aufgaben, die für dieses Gespräch herangezogen wurden, kein Lösungsweg notwendig sei. Drei Studentinnen und Studenten waren der Meinung, dass bei Aufgabe 12 ein Lösungsweg sinnvoll wäre, denn diese Aufgabe hätten sie ohne Hilfe nicht geschafft. Studentin 3 würde sich auch bei Aufgabe 13 einen Lösungsweg wünschen, obwohl sie die Aufgabe richtig gelöst hat. Als Grund gab sie an, dass die Begründung mit „größer und kleiner als 1“ (siehe Kapitel 7.4.2 Aufgabe 13) sehr interessant sei. Student 1 meinte, dass ein Lösungsweg bei den schwierigeren Aufgaben nicht schaden würde, aber für ihn sei es wichtiger, dass er die Lösung(en) wisse. Auch Studentin 13 fand, dass ein Lösungsweg nicht unbedingt notwendig sei, wenn Lösungen gegeben sind, sie freue sich aber, wenn sie eine Aufgabe falsch mache und es dann einen Lösungsweg gebe. Student 10 sagte, dass bei diesen Aufgaben kein Lösungsweg notwendig sei, wenn er aber eine Antwort falsch ankreuze, würde er sich einen Hinweis-Button mit „So wird es richtig gemacht“ wünschen. Student 12 war der Meinung, dass es gut wäre, wenn es bei Aufgaben, bei denen ein Rechenweg kontrolliert werden soll (wie Aufgabe 21), einen Lösungsweg, der den falschen Rechenschritt zeigt, gebe. Nur Student 2 sagte, dass er bei allen Aufgaben einen Lösungsweg gut fände, denn beantworte er eine Frage falsch oder verstehe er eine Aufgabe nicht, so möchte er schon wissen, wie sie zu lösen ist.

7.4.4 Lernerfolg

Neun Studentinnen und Studenten gaben an, dass sie durch das Lösen und Besprechen dieser Multiple-Choice-Aufgaben etwas gelernt hätten. Als Beispiele wurden die Aufgaben 11c, 12 und 13 genannt. Drei Studierende sagten, dass nichts Neues für sie dabei gewesen sei.

7.4.5 Auswertung - Teil 3

Im dritten Teil der Gespräche (siehe Kapitel 7.2 Teil 3) wurden die Studierenden unter anderem auch über die Plattform sowie die dort zur Verfügung gestellten Multiple-Choice-Aufgaben befragt.

Die Hälfte der Befragten benutzt oder benutzte die Plattform öfter. Sie gefällt den Studentinnen und Studenten sehr gut und ist hilfreich. Ebenso sind die Studierenden mit der Übungsplattform sehr zufrieden und finden die Gestaltung schön. Manche finden die Aufgabenauswahl ausreichend, andere finden, dass es bei manchen Themengebieten zu wenig Aufgaben gibt.

Die andere Hälfte der Befragten nutzte die Plattform zuhause noch nicht. Als Gründe gaben diese Studierenden folgende an:

- Der Student/ Die Studentin hat zurzeit kein Internet zuhause.
- Der Student/ Die Studentin übt nur mit der Mitschrift.
- Der Student/ Die Studentin hat keine Zeit dafür.
- Der Student/ Die Studentin lernt mit der Internetseite www.mathe-online.at. Auf dieser Seite gibt es nämlich zu jedem Themenbereich einen einführenden Erklärungstext, was für den Studenten/ die Studentin ansprechend ist.
- Der Warm-up-Kurs ist im Moment nicht sehr anspruchsvoll, sodass der Student/ die Studentin zuhause nicht zusätzlich üben muss.

Folgende Wünsche/ Anregungen wurden von den Studierenden genannt:

- Es soll einen Lösungsweg geben.
- Es soll die Möglichkeit geben, eine Aufgabe zu überspringen, wenn man sie nicht kann oder nicht machen möchte.
- Es soll eine Übersicht mit allen Aufgaben geben, damit man sich die Aufgaben ansehen und auch ausdrucken kann.
- Es wäre angenehmer, wenn man die Aufgaben der Reihe nach durcharbeiten könnte und es nicht dem Zufall unterliege, welche Aufgabe man bekommt.

7.5 Einstellung zu Multiple-Choice-Aufgaben

Frage Was ist deine generelle Einstellung zu Multiple-Choice-Aufgaben? Findest du sie sinnvoll?

7.5.1 Aussagen der Studenten

Student 1: „Ich finde sie nicht schlecht, vor allem für zwischendurch."

Student 2: „Ja, sind generell schon sinnvoll."

Studentin 3: „Durchaus finde ich. Also, das ist so nett, weil man es auch gleich kontrollieren kann. Gut, dazu bräuchte man keine Multiple-Choice-Aufgaben, aber es ist notwendig, wenn ich das im Internet machen möchte. Also ja, in diesem Fall, ich finde sie total sinnvoll, auf diese Art und Weise wie es da gemacht ist."

Studentin 4: „Nein und ja. Also, bei einer Prüfung an der Universität jetzt nicht so, aber zum Üben finde ich es schon ganz gut, aber nur, wenn man weiß, dass mehrere richtig sein können, beim Üben jetzt, weil man da auch alle durchschaut, wenn man weiß, es ist nur eines richtig und es ist gerade das erste zufällig richtig, dann schaut man die anderen gar nicht mehr an; dann ist es sinnvoll, wenn man alles durchschauen muss."

Studentin 5: „Sinnvoll im Sinne von naturwissenschaftlichen Bereichen, ja. Fürs Üben auf jeden Fall. Also ich finde es gut, wenn man zwar keinen Rechenweg dastehen hat, so wie früher in der Schule, aber dafür dann wenigstens die Lösung. Beides nicht zu haben, lässt einen so ein bisschen im Luftleeren, da kann man gar nicht wissen, ob man jetzt irgendwo etwas richtig gemacht hat."

Studentin 6: „Ja, eigentlich schon, vor allem, wenn es darum geht, dass man zum Schluss ein klares Ergebnis hat, beim Auswerten und dass alle gleich berechtigt werden, weil es ja dann wirklich ja oder nein ist und nicht so wie bei mir am Anfang, wie die Schularbeiten ausgebessert worden sind mit ‚da ist ein Rechenfehler und der Ansatz war gut und das ist falsch', sondern, dass es halt wirklich richtig oder falsch ist."

Studentin 7: „Kommt immer darauf an. Ich finde, bei solchen Aufgaben ist das schon okay, also gerade die jetzt, die alle ganz unterschiedlich sind, weil ich da quasi dann jede einzelne Lösung mir anschauen muss und bei jeder einzelnen mir überlegen muss, was ist jetzt richtig, ist es richtig, ist es falsch, das heißt, ich hab in einer Aufgabe viermal geübt; [Anmerkung: Die Studentin meint damit zum Beispiel Aufgabe 21] Und bei anderen finde ich es weniger sinnvoll. Wenn es wirklich kompliziertere Aufgaben sind, wo es auch wichtig ist, den Weg eben zu kennen; [...] Also wenn es wirklich ein komplizierter Weg ist, dann finde ich es weniger sinnvoll, weil es dann, weil ich denk es ist wichtiger, dass ich den Weg richtig habe und ob ich mich dazwischen mal irgendwo verrechne ist jetzt weniger tragisch."

Student 8: „Ich finde es durchaus sinnvoll, in einem gewissen Rahmen, sag ich jetzt einmal, das ist eigentlich auch der Grund warum ich da bin, weil ich mir das angeschaut habe, [...] ich hab zum Beispiel gesehen, man hat so einen Ausdruck von Term gehabt, über eine Seite und dann hast du Antwortmöglichkeiten gehabt, die waren größer als die Aufgabe selber, und dann hab ich mir gedacht, dass kann ich nicht am PC machen, da muss ich mir einen Zettel nehmen, ausrechnen, dann muss ich wieder am PC schauen, das bockt mich nicht, muss ich ehrlich sagen, da kann ich mir gleich das ausdrucken und kann es mir gleich zuhause machen; und wenn ich Glück habe, steht der Lösungsweg dabei." Er sagte dann weiter, dass die Aufgaben so sein sollten, dass man sie gerade noch im Kopf machen könne. Er möchte nicht, wenn er beim Computer sitze, noch zusätzlich auf ein Blatt Papier schreiben müssen. Das sei ermüdend für ihn, wenn er zwischen Computer und Zettel wechseln müsse.

Student 9: „Ich finde sie in Mathematik weniger sinnvoll, als normale Aufgaben. Ich habe nie mit Multiple-Choice-Aufgaben gelernt und kann mir auch schwer vorstellen, dass ich es so machen werde." Er sagte dann noch, dass Multiple-Choice-Aufgaben ohne Zwischenergebnisse gut seien, wenn es aber Zwischenergebnisse gebe, würden sie zu unübersichtlich.

Student 10: „Ja, die sind schon gut, wenn man sie leicht lösen kann und wenn man eben nachher herausfindet, wenn man sie nicht richtig hat, wenn man da raus findet, was hat man da genau falsch gemacht, und wie kann man es richtig machen."

Student 11: „Ja, das ist eine komplizierte Frage. Einerseits denk ich, wenn man da ein paar Lösungsvorschläge hat, kann das wohl durchaus auch ein bisschen Zeit einsparen, aber andererseits, wie soll ich sagen, wenn man keine Lösungsvorschläge hat, dann muss man natürlich auch sehr viel selber denken. Klar einerseits kann es durchaus etwas Zeit einsparen, andererseits frage ich mich nicht doch, ob es nicht auch ein bisschen das Denken und ein bisschen das Gedächtnis mittrainiert, wenn man keine Lösungsvorschläge hätte. Ich frage mich nur, ich weiß es ja nicht."

Student 12: „Ich mag eigentlich Multiple-Choice-Tests nicht, weil ich finde, bei vielen Tests, [...] also weil hier [Anmerkung: Aufgabe 21] wäre es vielleicht schneller, es einfach mal selbst schnell auszurechnen und dann zu vergleichen, und ich bin dann vielleicht doch jemand der eher den Fehler sucht und dann vielleicht länger braucht und wenn es jetzt wirklich ein Test wäre, wo es natürlich auch auf Zeit geht, dann hätte ich vielleicht da dann einen Nachteil. Fürs Üben glaub ich, ist es schon okay, weil da hab ich ja nicht den Zeitdruck. [...] Aber als Test mag ich Multiple-Choice eigentlich nicht."

Studentin 13: „Ist praktisch. [...] das ist wahrscheinlich schon deshalb auch interessanter [Anmerkung: Multiple-Choice-Aufgaben], weil man eben sich nicht nur eine Lösung anschaut, sondern es könnte ja eine zweite auch noch richtig sein; man muss halt dann schon noch mehr überlegen, als wenn man eine Angabe und eine Lösung hat, weil dann, also in dem Sinn ist es schon interessanter, weil man weiter denken muss noch." (Anmerkung: Letzterer Teil der Antwort bezieht sich auf die Frage, was sie bevorzugen würde: Zettel mit Übungsaufgaben oder Multiple-Choice-Aufgaben)

7.5.2 Zusammenfassung

Im Großen und Ganzen kann zusammengefasst werden, dass die meisten der Befragten das Üben mit Multiple-Choice-Aufgaben sinnvoll finden. Vier Studentinnen und Studenten finden Multiple-Choice-Aufgaben sinnvoll, zwei Studierende finden diese Art von Aufgaben nicht schlecht beziehungsweise praktisch zum Üben. Zwei weitere Studierende sind der Meinung, dass das Üben mit Multiple-Choice-Aufgaben „okay" sei, bei einer Prüfung möchten sie dieses Testformat aber nicht. Drei der Befragten sagen, dass Multiple-Choice-Aufgaben unter gewissen Umständen/ in einem gewissen Rahmen sinnvoll seien, das heißt, wenn die Aufgabe nicht zu lange und nicht zu komplex sei. Ein Student mag Multiple-Choice-Aufgaben eigentlich nicht, findet sie aber gut, wenn die Aufgabe keine Zwischenergebnisse aufweist. Ein weiterer Student konnte die Frage nicht beantworten.

8 Schlussbemerkung

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden mathematische Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern sowie Studentinnen und Studenten herausgearbeitet und Multiple-Choice-Aufgaben zu diesen Problembereichen erstellt. Mit der Erstellung der Multiple-Choice-Aufgaben wurde einer Rückmeldung seitens der Studierenden der Fachhochschule Technikum Wien, es solle mehr Aufgabenauswahl auf der Mathematik-Übungsplattform geben, entsprochen. Bei abschließenden Gesprächen konnte einerseits ein gewisses Feedback zu den erstellten Multiple-Choice-Aufgaben gewonnen werden, andererseits wurde festgestellt, dass die Studierenden das Üben mit Multiple-Choice-Aufgaben für sinnvoll und gut empfinden.

Zum Schluss bleiben noch zwei Anregungen beziehungsweise zwei Wünsche seitens der Studierenden, die sowohl bei den Interviews zu Beginn der Arbeit, als auch in den Gesprächen am Ende der Arbeit genannt wurden: Die Studentinnen und Studenten wünschen sich, dass es bei einem Test auf der Plattform die Möglichkeit gibt, eine Aufgabe, die man nicht machen möchte oder nicht kann, zu überspringen. Außerdem wünschen sich die Studierenden, dass der Lösungsweg angezeigt wird. Ich konnte selbst feststellen, dass die Erfüllung dieses Wunsches mit einem enormen Arbeitsaufwand verbunden ist. Dennoch glaube ich aufgrund der Erfahrungen, die ich in den Abschlussgesprächen gemacht habe, dass es für den Lerneffekt durchaus sehr sinnvoll ist, wenn bei einigen Aufgaben ein Lösungsweg angezeigt wird. Ich stellte nämlich fest, dass die meisten Befragten die Aufgabe 12 (siehe Kapitel 7.1) ohne Hilfe nicht geschafft hätten. Durch Tipps konnten die Studierenden aber zur richtigen Lösung hingeführt werden.

Literaturverzeichnis

[1] http://www.mathe-online.at/mathint/pot/i.html. Zugriff: 23.6.2015.

[2] http://www.mathe.technikum-wien.at/index.php. Zugriff: 11.6.2015.

[3] http://www.technikum-wien.at/fh/. Zugriff: 9.6.2015.

[4] http://www.technikum-wien.at/index.php?download=15078.pdf. Zugriff: 30.6.2015.

[5] http://www.technikum-wien.at/studium/informationen_zum_studium/warm_up_kurse/. Zugriff: 9.6.2015.

[6] `http://www.sinus-bayern.de/userfiles/Broschuere_2002/SINUS_Bayern_2002.pdf`. Zugriff: 12.7.2015.

[7] Hans-Jochen Bartsch. *Taschenbuch Mathematischer Formeln*. Carl Hanser Verlag, München, 21. Auflage, 2007.

[8] Stefan Eigel. Nicht nur das Ergebnis prüfen. Aus Fehlern in Gleichungen lernen. *mathematik lehren*, 169:Seite 48, Dezember 2011.

[9] Carina Anna Heiss. *Die Effizienz von Mathematik-Brückenkursen an der Fachhochschule Technikum Wien*. Diplomarbeit, Universität Wien, 2015.

[10] Friedhelm Padberg. *Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 4. Auflage, 2012.

[11] Susanne Prediger. Brüche bei den Brüchen - aufgreifen oder umschiffen? Online unter: `http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/prediger/veroeff/04-ml-brueche-langfassung.pdf`. Zugriff: 12.7.2015, Seite 6.

[12] Susanne Prediger. Brüche bei den Brüchen - Bildungschancen nutzen durch Auseinandersetzung mit epistemologischen Denkhürden. Online unter: `http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/03-beitraege-brueche.pdf`. Zugriff: 12.7.2015.

[13] Florian Resch. *Über die Effektivität von Blended-Learning-gestützten Brückenkursen: eine qualitative und quantitative Erhebung an der Fachhochschule Technikum Wien*. Diplomarbeit, Universität Wien, 2014.

[14] Andrea Peter-Koop und Birte Specht. Problemfall Bruchrechnung. Diagnostisches Interview als Fördergrundlage. *mathematik lehren*, 166:Seite 18, Juni 2011.

[15] Kristina Reiss und Christoph Hammer. *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Springer, Basel, 2013.

[16] Carina Prendinger und Franz Embacher. *Effizienz von Mathematik-Vorkursen an der Fachhochschule Technikum Wien - ein datengestützter Reflexionsprozess.* erscheint im khdm-Tagungsband.

[17] Sebastian Wartha und Rudolf vom Hofe. Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *mathematik lehren*, 128:10–15, Februar 2005.

Abbildungsverzeichnis

Anhang

Warm Up Kurs

Mathematik

Endtest 2013

Aufgabe 1:
Gegeben sind die Mengen
$A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \quad und \quad B = \{x \in \mathbb{N} | 5 < x \leq 12\}$.
Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $A \backslash B =$

Aufgabe 2:
Das Waschmittelsortiment eines Kaufhauses umfasst 2 gleichwertige Produkte A und B. Üblicherweise entscheiden sich 32% der Kunden für Produkt A. Im letzten Jahr wurden 10625 Packungen Waschmittel verkauft.
Wieviele Packungen von Produkt B wurden verkauft?

Aufgabe 3:
Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

a) $2x - |3 - x| = 18$

b) $\frac{15}{x} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2$

c) $10 \cdot 3^{x-2} = 60$

Aufgabe 4:
Lösen Sie die folgende Ungleichung.

$$\frac{3x+1}{x-3} < 5$$

Aufgabe 5:

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem

I: $3x - 2y = 4$
II: $5x = y - 5$

Aufgabe 6:
Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne negative Hochzahlen, Wurzeln Doppelbrüche etc.)!

a) $\sqrt[3]{\frac{16x^5z^{-10}}{64y^{-7}}} =$

b) $\left(a^3\frac{1}{b^{-3}c^4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{(2c)^3}{(ab)^{-1}}\right)^3 =$

Aufgabe 7:

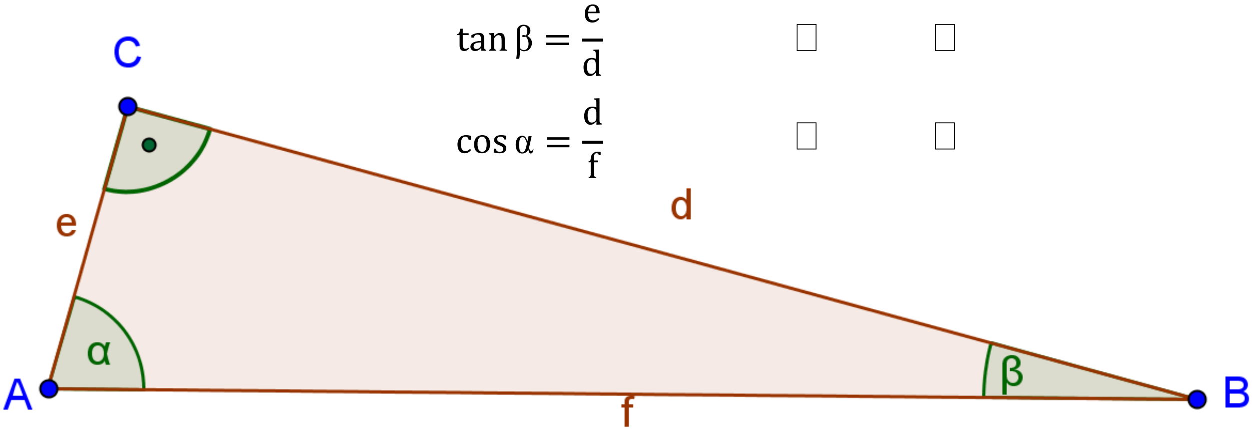
Lösen Sie diesen Ausdruck nach x auf:

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{b}}{2}\left(\frac{1}{2} + x\right) - bx$$

Aufgabe 8:

Gegeben ist das folgende rechtwinkelige Dreieck. Welche der angegebenen Beziehungen ist korrekt? Bitte kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

	Richtig	**Falsch**
$\mathrm{f}^2 = \mathrm{d}^2 - \mathrm{e}^2$	☐	☐
$\sin\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{f}}$	☐	☐
$\tan\beta = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{d}}$	☐	☐
$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{f}}$	☐	☐



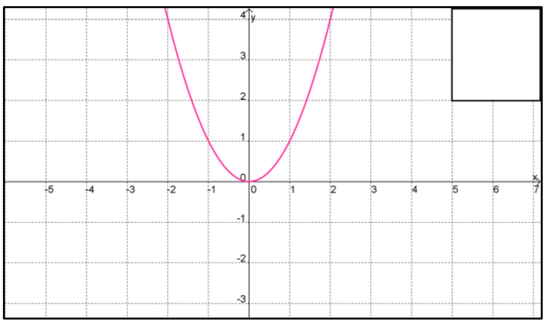
Es gilt: $\alpha = 75°$. Wie groß ist β? ________

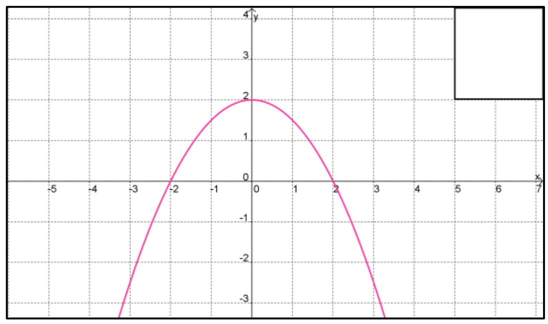
Geben Sie den Winkel β im Bogenmaß an.

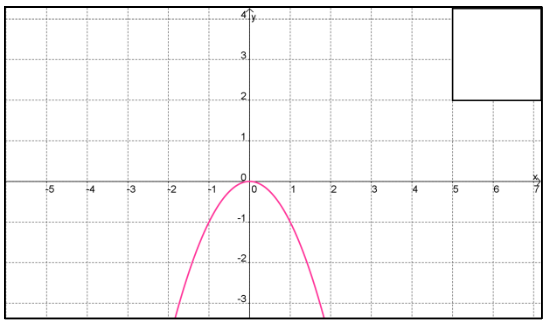
Aufgabe 9:
Ordnen Sie die Funktionsgleichungen den jeweils richtigen Graphen zu. Tragen Sie die Nummer der Funktionsgleichung in das Kästchen in der rechten oberen Ecke ein.

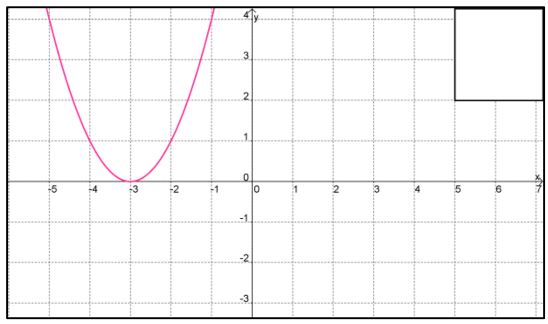
1.) $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + 2}$ **2.)** $\boldsymbol{y = -x^2}$ **3.)** $\boldsymbol{y = (x+3)^2}$

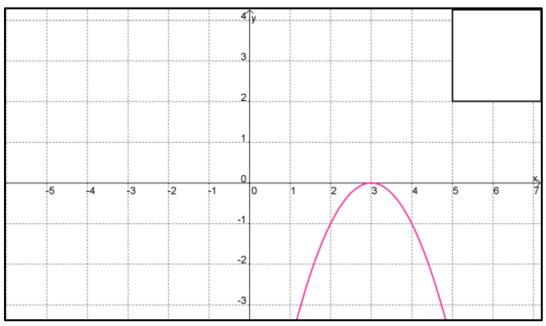
4.) $\boldsymbol{y = x^2}$ **5.)** $\boldsymbol{y = x^2 + 2}$ **6.)** $\boldsymbol{y = -(x-3)^2}$

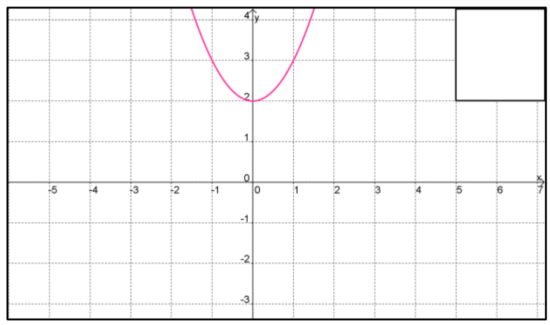












Aufgabe 10:

a) $y(x) = 10x^3 + 25x^2 + 7x$
$y'(x) =?$

b) $f(t) = (4t - 4)(3t + 3)$
$\frac{df}{dt} =?$

c) $g(x) = x^2 \cdot \cos x$
$g'(x) =?$

Aufgabe 11:

a) Welcher der folgenden Ausdrücke ist die 1. Ableitung von $\sqrt[4]{x^3 - 5}$?

- ☐ $\sqrt[4]{3x^2}$
- ☐ $\frac{3x^2}{4\sqrt[4]{(x^3-5)^3}}$
- ☐ $(3x^2)^{\frac{1}{4}}$
- ☐ $\sqrt{x^3 - 5}$
- ☐ $\frac{1}{4}(x^3 - 5)^{\frac{3}{4}} \cdot (3x^2)$

b) Welcher der folgenden Ausdrücke ist die 1. Ableitung von e^{-4t^2}?

- ☐ e^{-4t^2}
- ☐ $-8t \cdot e^{-4t^2}$
- ☐ $\frac{e^{-4t^2}}{-8t}$
- ☐ $-4t^2 \cdot e^{-4t^2}$

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Bernadette Maria Löffler
Geburtsdatum:	30.10.1989
Staatsangehörigkeit:	Österreich
Familienstand:	ledig
Religionsbekenntnis:	römisch-katholisch
Eltern:	Margit und Engelbert Löffler
Geschwister:	Margareta (1988), Raphael (1990), Juliana (1992), Sebastian (1994), Theresa (1998)

Ausbildung:

2008-2015:	Lehramtsstudium an der Universität Wien UF Chemie und UF Mathematik
2000-2008:	BG/BRG Waidhofen/Thaya (Abschluss: Matura mit gutem Erfolg bestanden)
1996-2000:	Volksschule Pfaffenschlag