DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Wittgensteins Sprachauffassung und der Variablenbegriff

„Sprachspiele“ und „Regeln“ im Mathematikunterricht

verfasst von / submitted by

Anna Flatz

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 299
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie
Betreut von / Supervisor:	Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

Mein besonderer und herzlicher Dank gilt Franz, Pablo und Walter.

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Abhandlung ist ein ganz spezieller Blick auf den Gebrauch von Variablen im Schulunterricht sowie das Andenken möglicher Konsequenzen, die zu ziehen wären, wenn, im Sinne Wittgensteins, die Sprache und somit auch das Handeln mit mathematischen Begriffen als *Abrichtung* aufgefasst wird.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich im Groben in drei Abschnitte. Während ein Teil sich mit Wittgensteins Sprachphilosophie befasst, wird der Variablenbegriff im anderen Teil rein mathematisch betrachtet und thematisiert.

Diese beiden an und für sich voneinander unabhängigen Abschnitte bilden den Hauptteil der Arbeit und wollen den Leser/die Leserin letztendlich hinführen zu der im dritten Abschnitt – in der *Zusammenführung* – sich ergebenden Erkenntnis: Die für den Spracherwerb geltenden Regeln sollten im Mathematikunterricht angesprochen und dementsprechend explizit formuliert werden.

Abstract

Topic of this paper will be a special eye on the use of variables in school mathematics as well as the consideration of possible consequences to be drawn if language and thus also the handling of mathematical concepts are considerated, in terms of Wittgenstein, as *training*.

The available paper is subdivided into three parts. One part deals with Wittgenstein's Philosophy of Language, whereas the other part considers and discusses the concept of variable in a pure mathematical context.

These two, as such, independent sections form the main part of the thesis with the intention to, finally, lead readers to the resulting realization, given in the third part, the *bringing together*: The rules of language acquisition should be valid as well for mathematic lessons and they should be expressed in an appropriately explicit manner.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Der „sichere“ Umgang mit Variablen gehört wohl zu den fundamentalsten Kompetenzen, nicht nur innerhalb algebraischer Fragestellungen, sondern generell beim Betreiben von Oberstufenmathematik. Die große Bedeutung dieser Thematik zeigt sich nicht zuletzt auch in der Mannigfaltigkeit der entsprechenden didaktischen Fachliteratur.

Gegenstand dieser Abhandlung ist die Klärung des Variablenbegriffes durch eine – im Feld der Sprachphilosophie angesiedelte – allgemeine Betrachtung der *Funktionsweise* unserer Sprache. Als primäre Grundlage dient hierbei die Sprachauffassung des österreichischen Philosophen Ludwig Wittgenstein, der in seinem Werk *Philosophische Untersuchungen* seine Sicht auf Sprache und Erkenntnis sehr speziell *aufzeigt*. In seinem Sinne gelangen wir von der Frage „Was *sind* Variable?“ nicht zur Beantwortung der Frage „Wie *gebrauchen* wir Variable?“, sondern – wenn man so will – genau umgekehrt.

Es soll im Folgenden, die wohl gängige Meinung, dass sich die Bedeutung mathematischer Begriffe durch „saubere“ Definitionen, sozusagen „an sich“ ergibt, ein wenig relativiert werden: Dass also die korrekte Anwendung eines mathematischen Begriffes rein durch dessen Namensgebung in allen Fällen gesichert sei, muss demnach, im Sinne Wittgensteins, wohl eher als Irrmeinung betrachtet werden.

Das einführende Kapitel *Die Sprache der Mathematik und der Gebrauch von Worten* ist von philosophischer Natur; dem Leser oder der Leserin wird die Sprachphilosophie Ludwig Wittgensteins vorgestellt. Dabei werden hauptsächlich Paragraphen seines Spätwerks *Philosophische Untersuchungen* rezipiert, sowie zentrale Begriffe aus Wittgensteins *Sprachspiel*-Idee erörtert.
Das Programm seines Werkes ist die Klärung der Bedeutung und des Gebrauchs von Worten.

Mit dem Kapitel *Die Sprache der (elementaren) Algebra* werden dann rein mathematische Themen aufgegriffen, v.a. solche, die in der Algebra und in der elementaren Algebra beheimatet sind. Hierbei werden algebraische Notationen beschrieben und ein kurzer geschichtlicher Rückblick geboten, d.h. einen Überblick über den Werdegang des modernen und leistungsstarken Variablenbegriffs.

Das Kapitel *Zeichen und Symbole in der Mathematik* stellt ein didaktisches Konzept vor, wie Variable im Unterricht thematisiert werden können. Grundlage dieses Konzepts sind die von Günther Malle ausgearbeiteten Variablenaspekte und eine Kritik an bestimmten didaktischen Grundprinzipien.

Für die Verknüpfung der bis dahin abgehandelten Inhalte ist dann das Kapitel *Zusammenführung: Anregungen für den Mathematikunterricht* zuständig. Das von Wittgenstein etablierte Konzept „Sprache als Spiel" wird unter besonderer Berücksichtigung des „Befolgens von Regeln" in den algebraischen Kontext transferiert, was sich dann durchaus didaktisch-fruchtbar auf den Unterricht auswirken kann.

2. Die Sprache der Mathematik und der Gebrauch von Worten

> „Die Philosophie ist in dem großartigen Buche niedergeschrieben, das immer offen vor unseren Augen liegt (ich meine das Universum). Aber man kann es erst lesen, wenn man die *Sprache* erlernt und sich die Zeichen vertraut macht, in denen es geschrieben ist. Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind die Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren…“[1]

Die Sprache zählt zu den herausragenden Instrumenten im Leben eines jeden Menschen. Mit ihrer Hilfe können Menschen Gedanken transportieren und so ihre Erkenntnis mitteilen und darstellen. Sprachliche Ausdrucksformen bestimmen nicht nur unser individuelles Leben, sondern sie übernehmen – als Medium unserer Kommunikation – eine wichtige Rolle im menschlichen gesellschaftlichen Miteinander. Jeder Mensch – als Bestandteil von Kultur und Gesellschaft – verwendet Sprache auf seiner individuellen Ebene: Menschliche Äußerungen in Wort und Satz bedienen sich Substantiven, Verben, Adjektiven etc., denen spezifische Bedeutungen zugeordnet werden können.[2]

Jedoch fällt es einem nicht immer leicht, seine relativ klaren Vorstellungen in Worte zu fassen. Genau diese Tatsache macht die Besonderheit und Eigentümlichkeit der menschlichen Sprache aus. Schon in der Geschichte der Sprachphilosophie bzw. der Sprachtheorie hat sich der Versuch, die Sprache zu präzisieren, in vielerlei Hinsicht als eine „Verarmung“[3] herausgestellt. Gleich zu Beginn könnte man also festhalten: Die Mehrdeutigkeit der Sprache und die Komplexität ihrer Wörter formen ihren Charakter und bilden ihr Wesen. Mit jedem ausgesprochenem Wort oder Satz sind verschiedene Bestrebungen oder Bedeutungen verbunden, mit denen versucht wird, seine Mitmenschen gedanklich zu erreichen.[4]

---

[1] Galilei (1623) zitiert nach (Maier & Schweiger, 1999) S.12.
[2] Vgl. (Mayer & Stanek, 2013) S.22.
[3] (Liessmann & Zenaty, 2004) S.50.
[4] Vgl.ebd. S.50.

Der deutsche Gelehrte und Ahnherr des humanistischen Gymnasiums Wilhelm von Humboldt betont in seinem Werk *Schriften zur Sprache* das Wesen und die Lebendigkeit der Sprache: „Sie selbst ist kein Werk (Ergon), sondern eine Tätigkeit (Energeia)“[5]. Humboldt interpretiert die Sprache nicht nur als ein Werkzeug, mit dessen Hilfe Gedanken des Geistes zum Ausdruck gebracht werden, sondern die lebendige Sprache sei eine „sich ewig wiederholende Arbeit des Geistes“[6]. Demnach fügt sich der sprechende Mensch nicht nur passiv in eine fertige Sprache ein, sondern arbeitet durch die Praxis des Sprechens aktiv an seiner Sprache weiter.[7] Anders ausgedrückt: Erst durch den Gebrauch der Sprache konstituiert sich diese weiter. Die Sprache, verstanden als geistige Tätigkeit, ist somit immer auf etwas bereits Vorhandenes gerichtet und wird dadurch nicht erzeugt, sondern die bestehende Sprache wird umgestaltet.[8]

Maier & Schweiger (1999) haben sich in dem Buch *Mathematik und Sprache: zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht* unter anderem mit den Funktionen der mathematischen Sprache auseinandergesetzt: Die kommunikative und kognitive Funktion wird von den beiden Autoren hervorgehoben. Beide Funktionen sind stark miteinander verwoben und dienen zum Einen der Verständigung (kommunikativ), zum Anderen als Mittel zur Erkenntnis (kognitiv).[9] Vor allem wird deutlich gemacht, welche Rolle die kognitive Funktion unter dem Gesichtspunkt der Erkenntnis einnimmt. Ebenfalls betonen Maier & Schweiger (1999), dass die kognitive Funktion der Sprache dem Erkenntnisgewinn diene, welcher wiederrum aus der „Verdichtung des Informationstransports durch begriffliche Repräsentation“[10] ermöglicht wird.

Es erscheint wohl naheliegend, dass die Thematisierung der mathematischen Sprache und ihr Vermögen zum Erkenntnisgewinn, wie es auch in Maier & Schweiger (1999) und unzähligen anderen Schriften zu diesem Gegenstand der Fall war, nicht an einer vorherigen allgemeineren Untersuchung der menschlichen Kommunikation, insbesondere der artikulierten Sprache, vorbeiführen kann. Da die „Erkennt-

[5] Humboldt zitiert nach (Liessmann & Zenaty, 2004) S.235.
[6] Ebd. S.235.
[7] Vgl. (Liessmann & Zenaty, 2004) S.53.
[8] Vgl. Humboldt nach (Liessmann & Zenaty, 2004) S. 235.
[9] Vgl. (Maier & Schweiger, 1999) S.11.
[10] Ebd. S.11.

nisse“ der Alltagssprache natürlich auch für die mathematische Sprache von weitreichender Bedeutung sind, müssen sie einen angemessenen Platz in dieser Arbeit finden.

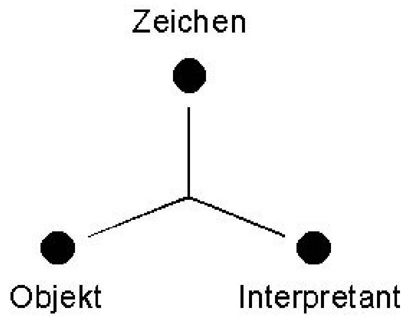
Hierbei ergibt sich das Problem: wo sollen wir starten? Die Zugänge der Erforschung unserer Sprache sind, wie könnte es auch anders sein, äußerst vielfältig.
Aus diesem Grund lassen wir Abhandlungen, die eher der Linguistik zugeschrieben werden, einfach außen vor und befassen uns nach einem kurzen Ausflug in die Semiotik, die sozusagen *einen* Gegenpart zu den folgenden Beschreibungen darstellt, mit dem Herzstück bzw. *dem* prägenden Ursprung sprachphilosophischer Untersuchungen des 20. Jahrhunderts: Ludwig Wittgensteins Sprachauffassung.

So beginnen wir unsere sprachliche Exploration in Anlehnung an das eingangs abgedruckte Zitat Galileis, aus dem hervorgeht, dass für das Erlernen einer Sprache grundlegend sei, sich mit „Zeichen“ vertraut zu machen, mit der Semiotik.

Buchstaben, Wörter, Sätze, Gesten, Bilder, Laute etc. übernehmen in vielen Sprachen die Rolle eines Zeichens.
Im Sinne der Semiotik, der Wissenschaft der Zeichen, lässt sich ein Zeichen als Symbol verstehen, dem eine spezifische Bedeutung zugeordnet wird. Nach dem Philosophen und Mathematiker Pierce (1839 -1914), welcher mit seinem Ansatz die moderne Semiotik wesentlich geformt hat, erfüllt der Zeichenbegriff zwei unterschiedliche Funktionen: Als Objekt übernimmt das Zeichen die Rolle des Repräsentanten für einen bestimmten zu interpretierenden Sachverhalt. Es wird daher von einer Repräsentationsfunktion gesprochen. Desweiteren können Zeichen als kognitive Tätigkeit und als Mittel der Erkenntnis festgelegt werden.[11]
Pierce versucht den Zeichenbegriff so zu entwickeln, dass er den beiden oben angeführten Funktionen gerecht wird. Ein Zeichen ist nach Pierce in eine Dreierstruktur eingebunden, jede einzelne Komponente steht in einer speziellen Relation zu den anderen:[12]

[11]Vgl. (H.G. Hoffmann, 2001) In: http://www.uni-bielefeld.de/idm/semiotik/Hoffmann-Peirces_Zeichen.pdf. S.3. Zugriff am 24.01.2016.
[12]Vgl. ebd. S.3.

Abbildung 1: Dreierstruktur von Zeichen nach Pierce



[Quelle: http://www.uni-bielefeld.de/idm/semiotik/Hoffmann-Peirces_Zeichen.pdf. S.3. Zugriff am 24.01.2016]

Durch diese Eigenschaft nehmen Zeichen eine repräsentative Rolle ein und stellen dadurch eine kontextgebundene Bedeutung dar.[13] Diese Pierce`sche Auffassung wollen wir sogleich in einen mathematischen Kontext einbetten, um auch deren Gültigkeit in der Sprache der Mathematik plausibel zu machen.

Betrachten wir dazu folgende Aussage aus einem Mathematiklehrbuch der fünften Klasse:

„Der Graph einer reellen linearen Funktion $y = k \cdot x + d$ ist eine Gerade" [14]

Jedes einzelne Wort, oder die Verbindung dergleichen, kann im Sinne der Semiotik als Zeichen gedeutet werden. Wie man erkennen kann, ist dieser Satz mit Hilfe von mathematischen Zeichen wie „Graph", „lineare Funktion" oder „Gerade" formuliert. Mit der Darstellung der Funktionsgleichung „$y = k \cdot x + d$" wird versucht, den mathematischen Sachverhalt, insbesondere auf symbol-sprachlicher Ebene zu veranschaulichen. Die Aussage stützt sich sozusagen auf einzelne mathematische Zeichen, wie die Verknüpfung von Begriffen oder Symbolen, die gemeinsam einen mathematischen Sachverhalt repräsentieren.

[13] Vgl. (Liessmann & Zenaty, 2004) S.51.
[14] (Götz, Reichel, Müller, & Hanisch, 2004) S.121.

Wie der aufmerksamen Leserin oder dem aufmerksamen Leser vielleicht bewusst wurde, ist der gerade geschilderte Aspekt einer derartigen Sprachauffassung sehr am Bezug von Zeichen auf Gegenstände oder Entitäten orientiert. Die Bedeutung eines Zeichens ist durch einen Bezug oder eine hinweisende Definition gegeben.
Ob das so sein muss oder was u.a. überhaupt das Wort „Bedeutung“ auszusagen vermag, versucht Ludwig Wittgenstein mit seinen sprachphilosophischen Überlegungen zu beantworten.

Um es schon vorwegzunehmen, die Antwort drückt er mit der äußerst bekannten und für viele Fälle der Sprachverwendung angemessenen folgenden „Formel“ aus: „Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache“[15].

Dieser Ansatz lässt uns das Verhältnis der mathematischen Sprache zu ihren Wörtern unter einem anderen Blickwinkel sehen. So sei bereits an dieser Stelle vermerkt: Wer Mathematik betreibt, muss letztendlich nicht in der Lage sein, Wörter zu interpretieren, sondern insbesondere lernen wie diese im üblichen Sprachgebrauch (geschrieben oder gesprochen) verwendet werden. Die Bedeutung von Wörtern erschließt sich sozusagen erst durch ihren Gebrauch innerhalb der Praxis in einem „Sprachspiel“[16].

Dementsprechend spielt es beispielsweise für das Erlernen der mathematischen Sprache eine wesentliche Rolle, wie Sätze, Wörter etc. auf konventionellem Weg verwendet werden. Der üblichen Verwendung von Wörtern der mathematischen Sprache kann in diesem Sinne eine grundlegende Rolle zugesprochen werden. Lernen, wie Wörter auf konventioneller Ebene verwendet werden, weist aber auch gleichzeitig auf Regeln oder Vorschriften hin, die wiederrum darauf „hinweisen“, wie Wörter zu gebrauchen sind. Unter diesem Gesichtspunkt verlangt eine konventionelle Sprech- oder Schreibweise die Einhaltung bestimmter „Regeln“.

Die Grundlinien dieser Darlegungen über den epistemischen Zusammenhang des Sprachgebrauchs im „Sprachspiel“ und den dazugehörigen „Regeln“, stammen, wie bereits erwähnt, vom österreichischen Gelehrten Ludwig Wittgenstein. Obwohl Witt-

[15] (Wittgenstein, 1971) §43, S.35.
[16] (Wittgenstein, 1971) §7, S.17.

genstein eher als Philosoph rezipiert wird, hat er einen wichtigen Beitrag zur Sprache bzw. Erkenntnis im Zusammenhang mit der Mathematik geleistet.

Da in den nächsten Kapiteln die Idee des „Sprachspiels“ eine bezeichnende Rolle im mathematischen Kontext des Variablenbegriffs einnimmt, sollen vorerst wesentliche Züge des Spätwerks *Philosophische Untersuchungen* von Wittgenstein aufgezeigt werden. Näher erläutert werden dabei Begriffe wie das „Sprachspiel“, „Bedeutung (durch Gebrauch)“ sowie „Regeln (folgen)“. Eine kurze Biographie Wittgensteins wird den Abschnitt vervollständigen.

2.1. Ludwig Wittgenstein und seine *Philosophischen Untersuchungen*

Ludwig Wittgenstein wurde am 26. April 1889 in Wien als Sohn eines Wiener Industriellen geboren. Er studierte Mathematik und Philosophie in Cambridge bei Bertrand Russell. Es hält ihn allerdings nicht lange an der Universität, so dass er sich im Jahr 1914 freiwillig zur österreichischen-ungarischen Armee meldet. Er gerät jedoch in italienischer Kriegsgefangenschaft, in der er sein bedeutendes Werk *Tractatus logico-philosophicus* vollendet.[17]
Nach Kriegsende gerät Wittgenstein in eine heftige Krise, sodass er beschließt, fortan ein einfaches Leben zu führen. Seine neue Aufgabe sieht er nun in der Tätigkeit als Dorfschullehrer in Niederösterreich, die er äußerst ernst nimmt. Neue Depressionen sind der Grund, warum er nach ein paar Jahren den Schuldienst quittiert. Nach zwischenzeitlichen Tätigkeiten als Hilfsgärtner und Architekt, kehrt er wieder nach Cambridge zurück, wo er auch promoviert.[18]
Während dieser Zeit beginnt er sein zweites wichtiges Buch zu schreiben, welches nach seinem Tod unter dem Titel *Philosophische Untersuchungen* veröffentlicht wird. Zu Beginn des Zweiten Weltkriegs erhält er einen philosophischen Lehrstuhl in Cambridge. Ebenfalls zu dieser Zeit meldet er sich freiwillig als Krankenträger und Laborant in einer medizinischen Forschungsstätte und sammelt dabei Erfahrungen. Nach dem Krieg kehrt er zwar nach Cambridge zurück, muss allerdings aufgrund persönlicher Einstellungen, seiner Lehrtätigkeit den Rücken kehren, da er diese als

[17] Vlg. (Weischedel, 2005) S.291f.
[18] Ebd. S.292.

„eine Art Lebendig-Begrabensein“[19] empfindet. Gegen Ende seines Lebens widmet er sich seinen Forschungen, zurückgezogen auf Bauernhöfen in Irland. Im Alter von 62 Jahren stirbt Wittgenstein 1951 an einem Krebsleiden.[20]

Mit den *Philosophischen Untersuchungen* konzentriert sich Wittgenstein auf die Vieldeutigkeit der Sprache, aus der philosophische Schwierigkeiten im Denken resultieren. Insgesamt handelt es sich um 693 Aphorismen, in denen Wittgenstein versucht, sich verschiedenen „Gegenständen“ zu nähern. So werden diese im Vorwort auf folgende Weise zusammengeführt:

> „Den Begriff der Bedeutung, des Verstehens, des Satzes, der Logik, die Grundlagen der Mathematik, die Bewußtseinszustände und Anderes. […] Wesentlich aber schien es mir, daß darin die Gedanken von einem Gegenstand zum anderen in einer natürlichen und lückenlosen Folge fortschreiten sollten.“[21]

Inwieweit Wittgenstein allgemein die Alltagssprache erklären wollte, oder „nur“ die großen philosophischen Probleme aufzulösen versuchte, ist nicht bekannt, sofern man dies überhaupt trennen will. Es ist auch für uns irrelevant. Wir werden die „Erkenntnisse“ aus den *Philosophischen Untersuchungen* analysieren und versuchen, diese dann auf die mathematische Sprache und konkret in den Mathematikunterricht zu transferieren.

[19] (Weischedel, 2005) S.293f.
[20] Vlg. (Weischedel, 2005) S.291- 294.
[21] (Wittgenstein, 1971) S.9.

2.2. Benennen als Vorbereitung zum Gebrauch der Sprache

Auf den ersten Seiten der *Philosophischen Untersuchungen* führt Wittgenstein einen Auszug der *Confessiones* an, einem Werk des mittelalterlichen[22] Philosophen Augustinus. Aus dessen Worten versucht Wittgenstein zu eruieren, was für ihn „ein bestimmtes Bild von dem Wesen der menschlichen Sprache“[23] auszeichnet.
Nach Römpp (2010) handle es sich dabei um eine Beschreibung, die Wittgenstein als „Kern der traditionellen Auffassung von Bedeutung ansieht“[24], welche früher und insbesondere in der *Tractatus-Philosophie* von Wittgenstein selbst vertreten wurde. Er sieht in diesem Bild der Sprache eine Idee, die sich an einer allgemeinen Auffassung von Bedeutung und Wort orientiert. Davon leitet er den Zusammenhang vom Wort mit seiner Bedeutung ab: „Jedes Wort hat eine Bedeutung. Diese Bedeutung ist dem Wort zugeordnet. Sie ist Gegenstand, für welchen das Wort steht.“[25] Sieht man das Wesen der Sprache in dieser *Gegenstandstheorie*, so wurzelt das Funktionieren einer Sprache gerade darin, dass man mit Worten Sachverhalte benennen kann.[26]

In diesem Zusammenhang versucht Römpp (2010) zu veranschaulichen, was Wittgenstein an dieser Vorstellung von Sprache zu kritisieren versucht: Das Problem dieser Auffassung rühre daher, dass die Bedeutung eben nur daher begründet sei, in dem man mit der Verwendung von Zeichen, die ja etwas repräsentieren, eigentlich das meint, wofür die Zeichen stehen. Mit anderen Worten ausgedrückt: Die Bedeutung ist gegeben, da Zeichen stellvertretend für etwas anderes, das Bezeichnete, interpretiert werden können. Das und nicht mehr würde dann das Schaffen von Bedeutung mit Worten auszeichnen. Für das Funktionieren der Sprache und für die Bedeutungszuordnung von Worten kommt es also darauf an, dass Zeichen für etwas stehen, das von ihnen verschieden ist.[27]

Wittgenstein schreibt im Paragraph 3, warum die Sprache auf die oben beschriebene Art nicht funktionieren kann. Sinngemäß lautet seine Begründung: Würde Sprache in

[22] Die mittelalterliche Philosophie (ungefähr 5. bis 15. Jahrhundert) lässt sich in zwei Abschnitte einteilen: Patristik und Scholastik. Mit Augustinus erreicht die Patristik (Lehre der Kirchenväter) im 4./5. Jahrhundert ihren Höhepunkt. Vgl. (Spierling, 2004) S.89 – 96.
[23] (Wittgenstein, 1971) §1, S.13.
[24] (Römpp, 2010) S.85.
[25] (Wittgenstein, 1971) §1, S.13.
[26] Vgl. (Wittgenstein, 1971) §1, S.13.
[27] Vgl. (Römpp, 2010), S.86.

diesem Sinne funktionieren, könnte man wohl (nur) von einem zugeschnittenen „System der Verständigung“[28] ausgehen und eine Darstellung des gesamt-möglichen sprachlichen Spektrums könnte dadurch nicht erfasst werden. Mit dieser Ansicht würde man sich wieder bei Augustinus und seiner Vorstellung vom Bild der Sprache finden, das, laut Wittgenstein, von einer „starren“ Wort-Bedeutungsfunktion ausgeht.[29]

So beschreibt auch Wittgenstein an einer anderen Stelle, inwiefern sich die traditionelle Sprachauffassung der *Gegenstandstheorie* auf das Studium der Sprache auswirkt:

> „[…] so ahnt man vielleicht, inwiefern der allgemeine Begriff der Bedeutung der Worte das Funktionieren der Sprache mit einem Dunst umgibt, der das klare Sehen unmöglich macht.—Es zerstreut den Nebel, wenn wir die Erscheinungen der Sprache an primitiven Arten ihrer Verwendung studieren, in denen man den Zweck und das Funktionieren der Wörter klar übersehen kann.“[30]

Im Kontext der *Gegenstandstheorie* kann daher insofern von einer „primitiven Art von Sprache“ gesprochen werden, weil jene, wie oben beschrieben, nur *eine* präzise Wort-Bedeutungsstruktur postuliert und dadurch „das klare Sehen“ vom Funktionieren der Sprache „unmöglich macht“. Was Wittgenstein jedoch mit diesen Worten zu beschreiben versucht, resultiert nicht weniger aus einem Paragraphen, der an die Sprachauffassung von Augustinus anknüpft.

Die Verwendung der traditionellen Sprachauffassung soll dem Leser oder der Leserin näher gebracht werden, in dem augenscheinlich gemacht wird, wie auf diese Weise mit Worten operiert wird. Daher führt Wittgenstein ein eigenes Beispiel im Paragraph 1 an und versucht gleichzeitig zu klären, wie Sprache, seiner Meinung nach, *gebraucht* wird: Jemand wird mit einem Einkaufszettel zum Händler geschickt. Auf dem Zettel sind die Zeichen „fünf rote Äpfel“ vermerkt. Der Einkäufer geht zum Händler und reicht ihm den Zettel. Man stelle sich nun die Reaktion des Kaufmanns vor:

---

[28] (Wittgenstein, 1971) §3, S.14.
[29] Vgl. (Wittgenstein, 1971) §3, S.14f.
[30] (Wittgenstein, 1971) §5, S.15.

> „[…] der öffnet die Lade, auf welcher das Zeichen »Äpfel« steht; dann sucht er in einer Tabelle das Wort »rot« auf und findet ihm gegenüber ein Farbmuster; nun sagt er die Reihe der Grundzahlwörter—ich nehme an, er weiß sie auswendig—bis zum Worte »fünf« und bei jedem Zahlwort nimmt er einen Apfel aus der Lade, der die Farbe des Musters hat.“[31]

Was versucht Wittgenstein mit dieser Schilderung zu sagen? Eventuell werden diese Darlegungen besser verstanden, wen wir die Frage in folgende Richtung lenken: Funktioniert in dem Beispiel die Sprache so, indem wir damit Gegenstände benennen? Oder anders gefragt: Kann die Bedeutung des Ausdrucks „fünf rote Äpfel“ auf eine Beziehung der Wörter auf Gegenstände zurückgeführt werden? Der Kaufmann weiß in dem Sinn, dass er die Lade mit den Zeichen „Äpfel“ öffnen oder in einer Tabelle das Zeichen „rot“ nachschlagen muss. Aber woher kann er das wissen? Oder wie weiß er, wie er nachzuschlagen hat?

Hier möchte Wittgenstein vor allem auf die *Handlungen* des Käufers und des Kaufmanns hinweisen. Es geht ihm in diesem Bespiel nicht um die einzelnen Bedeutungen der Wörter „fünf“, „rot“ „Äpfel“, sondern vielmehr möchte er den Blick darauf richten, wie das Wort „fünf“, „rot“ oder „Äpfel“ *gebraucht* wird. Er fragt also nicht: Was bedeutet das Wort „fünf“?, sondern vielmehr wie *gebrauchen* wir das Wort „fünf“?.
Diese Darlegungen verstehen sich vermutlich besser, wenn man sich das *Handeln* des Kaufmanns oder des Käufers vor Augen hält: Der Käufer führt eine *Handlung* aus, indem er den Kaufmann zum Verkauf von Äpfeln auffordert. Dieser *handelt* ebenfalls, indem er die Äpfel holt, auf die Ladentheke legt und so den Käufer zum Zahlen auffordert.[32] Weder der Käufer noch der Kaufmann sehen bei der sprachlichen Äußerung „fünf rote Äpfel“ die einzelnen Bedeutungen von „fünf“, „rot“ oder „Äpfel“ mit einem geistigen Auge vor sich, sondern, sie *gebrauchen* die Wörter eben wie es dieses Szenario beschreibt.
Mit dieser Beschreibung zeigt Wittgenstein auf, welches Maß an Absurdität die traditionelle Sprachauffassung in einem konkreten Handlungsablauf in sich birgt.

[31] (Wittgenstein, 1971) §1, S.14.
[32] Vgl. (Römpp, 2010) S.87.

Im Paragraph 26 greift er nochmals das „Benennen von Gegenständen“ auf und versucht zu erläutern, welche Auswirkungen jene Auffassung auf das Funktionieren der Sprache bzw. auf das Lernen einer Sprache hat. In diesem Zusammenhang ist Wittgenstein versucht, das Missverständnis, dass der Erwerb der tatsächlichen Wortbedeutung im Geben von hinweisenden Definitionen, also dem Benennen von Gegenständen, liegt, aufzudecken:

> „Man meint, das Lernen der Sprache bestehe darin, daß man Gegenstände benennt, Und zwar: Menschen, Formen, Farben, Schmerzen, Stimmungen, Zahlen etc. Wie gesagt—das Benennen ist etwas Ähnliches, wie, einem Ding ein Namenstäfelchen anheften. Man kann das eine Vorbereitung zum Gebrauch eines Wortes nennen. Aber *worauf* ist es eine Vorbereitung?“[33]

In diesem Zitat kommt zum Ausdruck, dass es für Wittgenstein beim Aneignen der Sprache nicht ausschließlich beim Benennen von Gegenständen bleibt. Es soll verdeutlicht werden, dass, wie oben bereits geschildert ein derartiger Spracherwerb zu kurz greift und nicht im Stande ist, der Mannigfaltigkeit und Komplexität von Sprache gerecht zu werden. Mehr oder weniger sieht Wittgenstein im Benennen von Dingen lediglich einen vorbereitenden Teil des Spracherwerbs, reduziert diesen daher auch auf eine Funktion, die sich auf eine Namenszuweisung konkretisieren lässt.

In bestimmten Situationen könnte man sozusagen von „hinweisende[n] Erklärung[en]“[34] sprechen, welche, wie oben beschrieben, als „Vorbereitung zum Gebrauch eines Wortes“ ausgelegt werden. Eine auf hinweisende Definitionen basierende Sprache lässt sich folgendermaßen verstehen: Die Erklärung der Bedeutung eines Wortes erfolgt, mittels Deuten auf einen Gegenstand bei seiner gleichzeitigen Benennung. In manchen dieser Fälle gelingt sogar der Spracherwerb, was sich vor allem beim Erlernen einer Fremdsprache beobachten lässt. Die Problematik der hinweisenden Definitionen sieht Wittgenstein aber darin, dass sie je nach Situation verschieden gedeutet werden können. Deshalb ist es nach dem Modell der hinweisenden Definition unangemessen, Fragen zu klären, wie ursprünglich Sprache

[33] (Wittgenstein, 1971) §26, S.26.
[34] (Wittgenstein, 1971) §26, S.26.

erworben wird.[35] Wittgenstein demonstriert die Vieldeutigkeit der hinweisenden Definition mit der Zahl „zwei“:

> „Die Definition der Zahl Zwei »Das heißt ›zwei‹«—wobei man auf zwei Nüsse zeigt—ist vollkommen exakt.—Aber wie kann man denn die Zwei so definieren? Der, dem man die Definition gibt, weiß ja dann nicht, *was* man mit »zwei« benennen will; er wird annehmen, daß du *diese* Gruppe von Nüssen zwei nennst! — Er *kann* dies annehmen; vielleicht nimmt er es aber nicht an. Er könnte ja auch, umgekehrt, wenn ich dieser Gruppe Nüssen einen Namen beilegen will, ihn als Zahlnamen mißverstehen. […] Das heißt, die hinweisende Definition kann in *jedem* Fall so und anders gedeutet werden.“[36]

Durch das bloße Zeigen oder Hindeuten ist die Bedeutung eines Wortes nicht geklärt. Man könnte aber dann mit der hinweisenden Definition etwas anfangen, wenn schon verstanden wurde, dass es sich um einen Zahlnamen handelt:

> „Man könnte also sagen: Die hinweisende Definition erklärt den Gebrauch — die Bedeutung — des Wortes, wenn es schon klar ist, welche Rolle das Wort in der Sprache überhaupt spielen soll.“[37]

Im Paragraphen davor versucht Wittgenstein zu zeigen, dass die Verschiedenartigkeit unserer Sprache durch das bloße „von Dingen reden“[38] nicht erfasst werden kann. Auch hier exemplifiziert er die Verschiedenartigkeit von Wörtern, indem er „Ausrufe“ aufzeigt, denen, je nach Situation, verschiedene Funktionen zugeschrieben werden können:

„Wasser!
Fort!
Au!
Hilfe!
Schön!
Nicht!

[35]Vgl. (Römpp, 2010) S.94.
[36] (Wittgenstein, 1971) §28, S.26f.
[37] (Wittgenstein, 1971) §30, S.28.
[38] (Wittgenstein, 1971) §27, S.26.

Bist du nun noch geneigt, diese Wörter »Benennungen von Gegenständen« zu nennen?"[39]

Mit diesen Zitaten nähern wir uns schon eher dem, was Wittgenstein in seinen *Philosophischen Untersuchungen* zu erläutern versucht. Für ihn wird die Idee der Sprachauffassung vielmehr darin verdeutlicht, wie und dass die Sprache verwendet wird. Entscheidend für das Funktionieren der Sprache ist also nicht das Benennen von Gegenständen, sondern insbesondere wie wir die Sprache gebrauchen und wie wir mit ihr handeln.[40] Mit dieser Denkweise nimmt Wittgenstein wohlweislich eine Position ein, die im Gegensatz zur sonst klassischen Vorstellung steht, in der Zeichen ihre Bedeutung durch einen Verweis auf beispielsweise materielle oder abstrakte Gegenstände erlangen.

2.2.1. Benennen am Beispiel der Definition

Versuchen wir, den Bedeutungscharakter einer derartigen Sprachauffassung zu veranschaulichen, indem wir uns auf die Sprache der Mathematik beziehen: Demnach könnte die im Kapitel 2 angesprochene Aussage, wie *Der Graph einer reellen linearen Funktion y = k·x + d ist eine Gerade*, als Summe von Wörtern verstanden, in der jedem Wort eine Bedeutung zugeordnet werden kann. Wörter wie „Graph“ oder „Gerade“ übernehmen dann einen Platz stellvertretend für dessen Bedeutung. Werden wir nun etwas präziser und betrachten den Ausdruck „lineare Funktion“. Aus einem Mathematikbuch der 5. Klasse lässt sich auch eine konkrete Definition dieses mathematischen Begriffs entnehmen:

Definition
„Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = k \cdot x + d \; mit \; k, d \in \mathbb{R}$ heißt lineare Funktion.“[41]

[39] (Wittgenstein, 1971) §27, S.26.
[40] Vgl. (Römpp, 2010), S.86.
[41] (Götz, Reichel, Müller, & Hanisch, 2004) S.120.

Nach der Auffassung einer *Gegenstandstheorie* wäre wohl mit dieser Definition eine Bedeutung gegeben, die dem Ausdruck lineare Funktion *eindeutig* zugeordnet werden kann. An dieser Stelle lässt sich eine Ähnlichkeit zur Zeichentheorie (Pierce) verorten, in der eben Zeichen, oder hier mathematische Ausdrücke, stellvertretend für ihre Bedeutung stehen.

Hauptsächlich auf den Paragraphen 26 in den *Philosophischen Untersuchungen* bezogen wird durch ein derartiges Definieren eine Bedeutungsstruktur geschaffen – die Wittgenstein übrigens als das „Benennen von Dingen“ bezeichnet – die in diesem Sinne zwar *eine* Bedeutung des Wortes „lineare Funktion“ festlegen, aber gleichzeitig den Gebrauch oder die Funktion dieser Äußerung auf ein enges Verwendungsfeld einschränken. Wittgenstein spricht von einem „System der Verständigung“: die Verständigung mit dem bloßem Benennen von Gegenständen und anschließendem Gebrauch dieser Wörter mit festgelegter Bedeutung *funktioniert*, bildet aber nur einen Aspekt ab, wie wir Sprache manchmal verwenden. Diese Darstellung, wie Sprache funktioniert, ist zwar brauchbar aber, so argumentiert Wittgenstein, „nur für dieses eng umschriebene Gebiet, nicht für das Ganze“[42], was beschrieben werden soll.

Mit Wittgenstein wird daher eine sehr spezielle Sichtweise eröffnet, die das Definieren von mathematischen Begriffen in ein besonderes Licht rückt: Die Bedeutung von „lineare Funktion“ ist nicht durch das Beziehen der Zeichen auf Gegenstände d.h. in dem Beispiel durch das hinweisende Definieren erschöpft. Eigentlich ist mit der Definition noch gar nichts gesagt oder verständlich gemacht.[43] So verhält es sich wahrscheinlich auch mit der Vorstellung von Schüler/innen im Mathematikunterricht: Entscheidend für den Begriff „lineare Funktion“ ist wohl kaum die referentielle Bedeutung der Definition, sondern vielmehr in welchem Zusammenhang der Ausdruck „lineare Funktion“ *gebraucht* und *verwendet* wird. In diesem Sinn kann nur insofern jemand sinnvoll nach einer Benennung fragen, wenn er „schon etwas mit ihr anzufangen weiß“[44].
Die Definition kann lediglich als „Vorbereitung zum Gebrauch“ des Ausdruckes „lineare Funktion“ verstanden werden.

[42] (Wittgenstein, 1971) §3, S.15.
[43] Vgl. (Römpp, 2010), S.87.
[44] (Wittgenstein, 1971) §31, S.29.

Was heißt nun eigentlich Gebrauch? Wie *gebrauchen* wir den Ausdruck „lineare Funktion“[45]? Vielleicht versteht sich der *Gebrauch* dieser sprachlichen Äußerung besser, indem wir uns vorstellen, wir würden mit ihr *handeln,* wie man es aus einer typischen Unterrichtsstunde kennt. In diesem Sinne lernen Schüler/innen damit zu *rechnen*, *zeichnen*, *ableiten* etc.; Das Handeln versteht sich dahingehend, indem die Schüler/innen mit Hilfe des Ausdrucks *tätig* werden. Auf welche Weise das Wort „lineare Funktion“ *gebraucht* wird, resultiert aber auch mehr oder weniger aus unterschiedlichen Eigenschaften oder Beschreibungen wie Abhängigkeit einer Größe von einer anderen Größe oder in dem Verweis auf den konstanten Differenzen-quotienten[46] $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, die dem Ausdruck zugeschrieben werden. Die Wichtigkeit der *Tätigkeit* im Unterricht, versteht sich aber auch insbesondere dahingehend, in welchem *Kontext* diese verwendet wird. Hierin liegt wohl die Leitidee der Sprachauffassung von Wittgenstein: Durch den *Gebrauch* der Sprache innerhalb eines *Kontextes* bestimmt sich dessen inhaltliche Bedeutung. Deshalb besagt, Römpp (2010) folgend, eine der wichtigsten Thesen von Wittgenstein, „dass von der Bedeutung eines Satzes nur als dessen Verwendung in konkreten Sprachspielen die Rede sein kann“[47].

Aus diesen Darlegungen soll hervorgehen, dass zur Vorstellung, wie die Sprache, laut Wittgenstein, funktioniert oder, wie im obigen Beispiel, zur Bedeutung des Begriffs „lineare Funktion“ offensichtlich mehr gehört, als nur eine gewisse Art des *Verständlich machens* oder des *Benennens* von bestimmten Sachverhalten.

[45] Um auf das Beispiel „fünf rote Äpfel“ im Kapitel 2 zurück zukommen: Es wird nicht gefragt: Was *ist* eine „lineare Funktion“?
[46] Vgl. (Götz, Reichel, Müller, & Hanisch, 2004) S.120.
[47] (Römpp, 2010) S.93.

2.3. Sprachspiele und Kennzeichen von Sprache

Den „ganzen Vorgang des Gebrauchens“ eines Wortes und die damit „verwobenen“ Tätigkeiten vergleicht Wittgenstein mit einem Spiel und führt so die Formulierung des „Sprachspieles“ ein. Dieser Begriff wird, wie es in seinem Sinne ist und er auch selbst schreibt, von Wittgenstein zwar nicht eindeutig verwendet, so tritt die Bezeichnung „Sprachspiel“ doch auch in anderer Verwendung auf; wir werden aber weiter unten noch für unsere Zwecke genügende Merkmale ausführen, die die „richtige“ Verwendung des Wortes „Sprachspiel“ deutlicher werden lässt.
Um es vorweg zu nehmen: Die Analogie zu einem Spiel soll die Offenheit unserer Sprache ausdrücken. So betont Römpp (2010), dass vor allem mit dem Ausdruck „Spiel“, jene „starren“ konkreten Beziehungen, die in der traditionellen Sprachauffassung postuliert werden, ausgegrenzt sind.[48]

Dieser Ansatz bezieht sich auf eine Stelle, in der Wittgenstein das Funktionieren der Sprache vergleicht mit dem Sprechen über Schachfiguren:

> „[…] Aber wir reden von ihr so, wie von den Figuren des Schachspiels, indem wir Spielregeln für sie angeben, nicht ihre physikalischen Eigenschaften beschreiben. Die Frage »Was ist eigentlich ein Wort?« ist analog der »Was ist eine Schachfigur?«“[49]

Wann ist jemand fähig, Schach zu spielen? Zweifelsohne wenn er die Regeln kennt, die das Schachspielen erst ermöglichen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Figuren aus Holz, Porzellan oder anderen Materialien bestehen. Genauso wenig wird eine Figur zum Bauer, indem man sie nur auf das Spielfeld stellt und verschiebt. Eine Figur wird erst dann zum Bauer, wenn man angibt, wie mit ihr zu spielen ist. So verhält es sich mit der Sprache: Man *verwendet* Sprache, man wird sozusagen durch die *Praxis* des Sprechens *tätig*. Für ein klares Verständnis der Bauernfigur ist aber nicht nur ihre Rolle im Spiel ausschlaggebend. Die Spielregeln aller Figuren müssen

[48] Vgl. (Römpp, 2010) S.93.
[49] (Wittgenstein, 1971) §108, S.66.

geklärt sein und erst dadurch ergibt „die Gesamtheit der Spielregeln den logischen Ort des Bauern“[50].

Wittgenstein gibt in seinen *Philosophischen Untersuchungen* keine präzise Beschreibung oder explizite Definition des Sprachspielbegriffs an. In gewisser Hinsicht kann er das auch nicht, wie es Römpp (2010) mit folgenden Worten formuliert: „Es wäre auch merkwürdig, wenn er in der Erläuterung seines Denkens die Sprache so verwenden würde, wie sie diesem Denken zufolge gerade *nicht* funktioniert“[51].

Um jedoch eine Grundlinie herauszuarbeiten, was Wittgenstein unter einem Sprachspiel versteht, ist es durchaus hilfreich, anzuführen, welche Kennzeichen für die Sprache daraus resultieren. Ramharter & Weiberg (2014) verdeutlichen diese Merkmale[52] auf den ersten Seiten des Buchs *Die Härte des logischen Muss. Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* auf folgende Weise: „Mannigfaltigkeit der Sprachspiele“, „Zeitliche Dynamik der Sprachspiele“, „Bedeutung und Gebrauch von Worten“, „Handlungscharakter von Sprache“, „Regeln folgen“ und „Sprachspiele als Sammelname“.

2.3.1. Mannigfaltigkeit der Sprachspiele

Das erste Kennzeichen von Sprache deutet auf die Vielfalt der verschiedenen Sprachspiele hin, was gleichzeitig darauf schließen lässt, dass Sprache nicht mit wenigen Merkmalen beschrieben werden kann.[53] Diese „Mannigfaltigkeit“ der Sprachspiele wird, laut Wittgenstein, deutlich, wenn man sich folgende Beispiele des Paragraphen 23 der *Philosophischen Untersuchungen* vor Augen führt:

> „Befehlen, und nach Befehlen handeln — […]
> Herstellen eines Gegenstands nach einer Beschreibung (Zeichnung) — […]

[50] (Dörfler, 2013) S.8.
[51] (Römpp, 2010) S.95.
[52] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.15 – 28.
[53] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.15.

> Über den Hergang Vermutungen anstellen —
> Eine Hypothese aufstellen und prüfen— […]
> Eine Geschichte erfinden; und lesen— […]
> Reigen singen —
> Rätsel raten—
> Einen Witz machen; erzählen — […]
> Aus einer Sprache in die andere übersetzen
> Bitten, Danken, Fluchen, Grüßen, Beten.“[54]

So verschieden die hier aufgelisteten Sprachspiele sind, so scheint es mit ihren Funktionen. Manche Sprachspiele mögen den Leser oder die Leserin im ersten Moment verblüffen, da diese möglicherweise nichts mit Sprechen zu tun haben oder denen kein bestimmter Zweck zugeordnet werden kann: „Herstellen eines Gegenstands nach einer Beschreibung (Zeichnung)“ oder „Eine Geschichte erfinden“.[55]
Manche Sprachspiele erscheinen uns auf den ersten Blick ähnlicher als andere; diesen Trugschluss greift Wittgenstein im Paragraphen 12 auf und betont, dass man sich trotz vermeintlichen ähnlichen Erscheinungsbildern der Sprachspiele nicht über deren Verschiedenheit in Gebrauch und Funktion hinwegtäuschen lassen soll.[56]
Dieser Aspekt wird mit folgender bildlicher Darstellung wiedergegeben:

> „Wie wenn wir in den Führerstand einer Lokomotive schauen: da sind Handgriffe, die alle mehr oder weniger gleich aussehen. (Das ist begreiflich, denn sie sollen alle mit der Hand angefaßt werden). Aber einer ist der Handgriff einer Kurbel, die kontinuierlich verstellt werden kann (sie reguliert die Öffnung eines Ventils); ein andrer ist der Handgriff eines Schalters, der nur zweierlei wirksame Stellungen hat, er ist entweder umgelegt, oder aufgestellt; ein dritter ist der Griff eines Bremshebels, je stärker man zieht, desto stärker wird gebremst; ein vierter, der Handgriff einer Pumpe, er wirkt nur, solange er hin und her bewegt wird.“[57]

[54] (Wittgenstein, 1971) §23, S.24f.
[55] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.15f.
[56] Vgl. ebd. S.16.
[57] (Wittgenstein, 1971) §12, S.18f.

2.3.2. Zeitliche Dynamik der Sprachspiele

Das zweite Kennzeichen von Sprache richtet sich an die im ersten Punkt beschriebene „Mannigfaltigkeit“ und betont dabei, dass diese nicht nur durch verschiedene Sprachspiele gekennzeichnet sei, sondern insbesondere durch eine „zeitliche Dynamik“:[58]

> „[…] Und diese Mannigfaltigkeit ist nichts Festes, ein für allemal Gegebenes; sondern neue Typen der Sprache, neue Sprachspiele, wie wir sagen können, entstehen und andere veralten und werden vergessen. (ein *ungefähres* Bild davon können uns die Wandlungen der Mathematik geben)“[59]

Der Aspekt der hier dargelegten Dynamik wird von Wittgenstein mit einem Bild verdeutlicht, diesmal eine Stadt, die aus neuen und alten Häusern besteht und sich dadurch in einem ständigen und nicht verfestigten Zustand befindet:

> „[…] (Und mit wieviel Häusern, oder Straßen, fängt eine Stadt an, Stadt zu sein?) Unsere Sprache kann man ansehen als eine alte Stadt: Ein Gewinkel von Gäßchen und Plätzen, alten und neuen Häusern, und Häusern mit Zubauten aus verschiedenen Zeiten; und dies umgeben von einer Menge neuer Vororte mit geraden und regelmäßigen Straßen und mit einförmigen Häusern.“[60]

Veränderungen einer Stadt, wie Neubauten, Sanierungen oder das Verwahrlosen mancher Häuser, zeichnen in diesem Sinne den Charakter der Dynamik von Sprachspielen aus. So wie alte und neue Häuser abgerissen oder neu gebaut werden, so verhält es sich mit Worten: Manche Wörter werden vergessen, ersetzt oder neu geschaffen.[61] Im Paragraph 23 nennt Wittgenstein die Mathematik, in der dieses Phänomen vom Wandel der Sprachspiele (wenn auch nur „ungefähr“) gesehen werden kann. Es wird daher in einem späteren Kapitel versucht, diesen Aspekt nochmals aufzugreifen.

---

[58] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.16f.
[59] (Wittgenstein, 1971) §23, S.24.
[60] (Wittgenstein, 1971) §18, S.20.
[61] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.16f.

2.3.3. Bedeutung und Gebrauch von Worten

Das dritte Kennzeichen wurde bereits im vorigen Kapitel angeschnitten. Ausschlaggebend für die Bedeutung eines Wortes ist nicht die Vorstellung der klassischen Sprachauffassung mittels eines Bezuges auf eine Entität (wie bei Augustinus), sondern vielmehr der Gebrauch eines Wortes. So heißt es im berühmten Paragraph 43: „Die Bedeutung eine Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache."[62] In diesem Sinne (um nochmals das Beispiel mit der „linearen Funktion" aufzugreifen) kann (wie wir noch sehen werden) nicht von *einer* Bedeutung des Wortes „lineare Funktion" gesprochen werden, sondern „die Bedeutung hängt davon ab, wie [dieses] Wort gebrauch[t] [wird]"[63].
Ein Wort kann somit in verschieden Sprachspielen unterschiedlich gebraucht werden, was wiederrum verschiedene Bedeutungen schafft. Daher spielt es auch eine wichtige Rolle in welchen Kontext oder in welcher Situation Wörter gebraucht werden.[64]

2.3.4. Handlungscharakter von Sprache

Die Verwendung des Wortes „Spiel" im Sprachspiel deutet auf das vierte Kennzeichen von Sprache hin. Wittgenstein sieht „das Sprechen einer Sprache [als] ein Teil […] einer Tätigkeit, oder einer Lebensform"[65]. Mit dieser Tätigkeit soll der Handlungscharakter von Sprache angesprochen werden. Wie wichtig das Handeln für den Gebrauch der Sprache ist, lässt sich gut am Beispiel des Spracherwerbs eines Kindes nachvollziehen: In diesem Sinne lernen Kinder nicht, dass Bücher oder Stühle existieren, sondern vielmehr Bücher zu holen und sich auf Stühle zu setzen. Etwas formaler bedeutet dieses Prinzip: Kinder werden beim Lernen einer Sprache dazu erzogen, Wörter zu gebrauchen, in dem sie eine Tätigkeit, wie das Holen oder Setzen, verrichten.[66]
Dieser Erziehungsstil wird von Wittgenstein als „Abrichten" bezeichnet, wie er im Paragraph 5 beschreibt: „Das Lehren der Sprache ist hier kein Erklären, sondern ein

62 (Wittgenstein, 1971) §43, S.35.
63 (Ramharter & Weiberg, 2014) S.17.
64 Vgl. ebd. S.17.
65 (Wittgenstein, 1971) §23, S.24.
66 Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.18.

Abrichten."[67] Das Wort „Abrichten" bringt einen eher negativen Beigeschmack mit sich, dessen Verwendung ist aber auf folgende Weise begründet: Wittgenstein wählt dieses Wort, weil Kinder in der Anfangsphase des Unterrichts nichts hinterfragen, sondern eher bedenkenlos und ohne Zweifel lernen. Handlungsweisen werden auf diesem Weg eingeübt und später mit Mitmenschen geteilt und ausgeführt. Das schafft wiederum ein Kriterium dafür ob wir manche Dinge akzeptieren oder bezweifeln.[68] (Wir werden in einem späteren Kapitel sehen, dass die Methode des Abrichtens auch im schulischen Kontext entdeckt wird, aber hier soll vorläufig Unterricht allgemein im Sinne von Erziehen, in dem Fall Erziehung eines Sprachgebrauchs, gemeint sein).

2.3.5. Regeln folgen

Wie die bisherigen Ausführungen über Sprachspiele bereits erahnen lassen, ist bei der Thematisierung von „Spielen" unumstößlich auf das Ausführen verbindlicher Anweisungen einzugehen. Dies führt uns zum fünften Merkmal, nämlich zu den Regeln, die den Gebrauch der Sprache lenken.

Wittgenstein sieht in den Regeln einen „Wegweiser", der den Gebrauch der Sprache in eine Richtung lenkt, was wiederrum bedeutet, dass Sprache nicht beliebig verwendet werden kann.[69] In diesem Sinne wird ein Öffentlichkeitscharakter angesprochen, der die Sprache insofern reguliert, als eine „Übereinstimmung bezüglich der Regeln besteht[70]".

Sprachspiele werden zwar von den Regeln geleitet, sind aber in ihrer Verwendung nicht eingegrenzt. Es gibt sozusagen einen Spielraum der Verwendung. Das Befolgen bestimmter Regeln kann als eine Praxis verstanden werden, in der (im Unterricht) Techniken erlernt und eingeübt werden.[71] Unter diesem Gesichtspunkt nimmt das Befolgen von Regeln einen besonderen Stellenwert im Kontext *Unterricht als Abrichtung* ein. Man lernt also die Verwendung der Sprache nicht, „indem man die Sprache

[67] (Wittgenstein, 1971) §5, S.15.
[68] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.18.
[69] Vgl. ebd. S.19.
[70] (Ramharter & Weiberg, 2014) S.19.
[71] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.18f.

an die Wirklichkeit anpasst, sondern indem man sie durch Einüben zur Gewohnheit werden lässt“[72].

2.3.6. Sprachspiele als Sammelname

Wittgenstein sieht also im Sprachspielbegriff einen „Sammelnamen“, was gleichzeitig darauf hinweisen soll, dass in Sprachspielen kein gemeinsames Merkmal zu finden sei und lediglich von „Verwandtschaften“ oder „Familienähnlichkeiten“ die Rede sein kann:[73]

> „[…] Statt etwas anzugeben, was allem, was wir Sprache nennen, gemeinsam ist, sage ich, es ist diesen Erscheinungen garnicht Eines gemeinsam, weswegen wir für alle das gleiche Wort verwenden, —sondern sie sind mit einander in vielen verschiedenen Weisen *verwandt*.“[74]

Wittgenstein versucht die „Verwandtschaft“ zu klären, in dem er im Paragraph 66 aufzeigt, welche Ähnlichkeiten in Brett-, Karten-, Ball- und Kampfspielen gesehen werden können:

> „[…] Sag nicht: »Es *muß* ihnen etwas gemeinsam sein, sonst hießen sie nicht ›Spiele‹«— sondern *schau*, ob ihnen allen etwas gemeinsam ist.—Denn, wenn du sie anschaust, wirst du zwar nicht etwas sehen, was *allen* gemeinsam wäre, aber du wirst Ähnlichkeiten, Verwandtschaften, sehen, und zwar eine ganze Reihe. Wie gesagt: denk nicht, sondern schau! —Schau z.B. die Brettspiele an, mit ihren mannigfachen Verwandtschaften. Nun geh zu den Kartenspielen über: hier findest du viele Entsprechungen mit jener ersten Klasse, aber viele gemeinsame Züge verschwinden, andere treten auf. Wenn wir nun zu den Ballspielen übergehen, so bleibt manches Gemeinsame erhalten, aber vieles geht verloren.“[75]

[72] (Römpp, 2010) S.117.
[73] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.21.
[74] (Wittgenstein, 1971) §65, S.48.
[75] (Wittgenstein, 1971) §66, S.48.

Alle Entitäten oder Gegenstände, die unter einen Begriff subsumiert werden, weisen also eine gewisse Familienähnlichkeit auf. Diese Ähnlichkeit ist wohl weniger mit einem allen Gegenständen zu Grunde liegenden gemeinsamen Merkmal gegeben, sondern wie es Wittgenstein mit der Fadenmetapher formuliert: die gemeinsamen Merkmale sind wie einzelne ineinander verwobene Fäden, wobei es nicht klar ist, ob und welche einzelnen Fäden als Bild für die Entitäten dann noch einen direkten Bezug zueinander besitzen.[76]

Folgend wollen wir uns eine Pause von dieser doch anspruchsvollen Lektüre gönnen und wieder tiefer ins Feld der Mathematik und deren Sprache eindringen, das heißt, uns wieder dem Sprachspiel *Mathematik* zu widmen.

[76] Vgl. (von Savigny, 1998) S.48ff.

3. Die Sprache der (elementaren) Algebra

Nach den Überlegungen im vorigen Kapitel, welche später wieder aufgegriffen werden, wenden wir uns nun einem besonderen Gebiet der Mathematik zu, nämlich der Algebra und ihrer Symbolsprache. Wenn im Weiteren die historische Genese der Algebra sowie die Entwicklung der Symbolsprache und die Konzepte des Variablenbegriffs vertieft werden, so scheint es vernünftig, eine Definition der Algebra voranzustellen.

Eine eindeutige Definition der Algebra bleibt in der Literatur jedoch umstritten, sodass folgendes Zitat von Freudenthal (1977) nur annähernd das Wesen der Algebra beschreibt:

> „What is algebra? There is no Supreme Court to decide such questions. Nevertheless, ‚algebra' has a meaning in everday language just as ‚chair' and ‚table' have. For instance, at school algebra is solving linear and quadratic equations."[77]

Freudenthal gibt in diesem Zitat ein Beispiel für jene Algebra, welche in der Schule gelehrt wird. Er macht somit bewusst eine Unterscheidung zwischen Schulalgebra und jener abstrakten Algebra, welche insbesondere in der höheren Mathematik ihre Anwendung findet. Ein Beispiel dafür, was die Algebra ausmacht, sieht Freudenthal im Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen. Steinweg (2013) betont an dieser Stelle, dass manche Lehrkräfte in höheren Jahrgängen sogar auf Matrizen und Vektorräume eingehen, welche ein Teilgebiet der linearen Algebra darstellen.[78]
Als Student oder Studentin der Mathematik findet man sich beispielsweise bereits in üblichen Einführungsvorlesungen mit algebraischen Strukturen wie Gruppen, Ringen, oder Körpern konfrontiert.
„Abstraktere" Objekte der Algebra sollen jedoch nicht Gegenstand meiner Arbeit sein und werden deswegen nicht weiter ausgeführt. In dieser Arbeit soll der Fokus auf die schulische Algebra und deren grundlegendes algebraisches Symbol – die Variable – gerichtet werden.

[77] Freudenthal (1977) zitiert in (Steinweg, 2013) S.1.
[78] Vgl. (Steinweg, 2013) S.1.

Ein Blick in den österreichischen Lehrplan der Sekundarstufe I zeigt, dass schon ab der 1. Klasse Unterstufe (Schulstufe 5) das „Arbeiten mit Variablen“[79] zum Stoffgebiet des Faches Mathematik zählt.
Ab diesem Zeitpunkt wird der Variablenbegriff ein fester Bestandteil aller mathematischen Teilgebiete der Schulmathematik sein und sich bis zur Sekundarstufe II und letztendlich zur Reifeprüfung durchziehen. Auch wenn Variable in vielen Gebieten der Mathematik zum Einsatz kommen, ihre explizite Einführung und Thematisierung erhalten die Schülerinnen und Schüler durch die Einsicht in die elementare Algebra.[80]

Der Ausdruck *elementare Algebra* lässt sich wie der Begriff der Algebra nur schwer eindeutig definieren. Um dennoch eine Vorstellung zu bekommen, was unter dem Begriff der elementaren Algebra verstanden wird, sollen folgende Beschreibungen – erstere von Siebel (2005) – diese annähernd eingrenzen:

> „Fachwissenschaftliche Literatur beschäftigt sich nicht explizit mit elementarer Algebra, anders als etwa Algebra wird Elementare Algebra nicht in Vorlesungen eingeführt oder in Lehrbüchern für Mathematikstudierende dargestellt (in der deutschsprachigen Literatur). So wird in fachwissenschaftlichen Publikationen das Gebiet Elementare Algebra nicht bestimmt, sondern als Ausdrucksmittel verwendet.“[81]

In diesem Zitat wird deutlich, dass sich die elementare Algebra offensichtlich nicht als selbstständiges Teilgebiet beschreiben lässt. Gleichsam wird davon ausgegangen, dass die elementare Algebra als reine Ausdrucksform in der Schule verwendet wird. Günther Malle hat den Begriff der elementaren Algebra geprägt und gibt in seinem Buch *Didaktische Probleme der elementaren Algebra (1993)* eine Vorstellung davon, was er unter diesem Begriff versteht:

---

[79] (Bundesministerium für Bildung und Frauen, 2016) Lehrplan der AHS Unterstufe Mathematik In: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?5h6vwg. S.6. Zugriff am 15.07.2016.
[80] (Akinwunmi, 2012) S.14.
[81] Siebel (2005) zitiert in (Akinwunmi, 2012) S.14.

> „Zur ‚elementaren' Algebra wird in diesem Buch alles gezählt, was mit Variablen, Termen und Formeln (Gleichungen, Ungleichungen) auf Schulniveau zu tun hat."[82]

Auf die Frage, worum es in der elementaren Algebra geht, verweist Malle (1993) insbesondere auf verschiedene Tätigkeiten, die im Unterricht vor allem mit Formeln realisiert werden. Welche konkreten „Tätigkeiten mit Formeln"[83] in diesem Sinne angesprochen werden, lassen sich laut Malle (1993) an folgenden Durchführungen erkennen:

- Aufstellen einer Formel
- Einsetzen von Zahlen und numerisches Berechnen einer Größe
- Interpretieren einer Formel
- Herauslesen von Zusammenhängen (z.B. Proportionalitäten)
- Graphisches Darstellen von solchen Zusammenhängen
- Umformen einer Formel
- Adaptieren einer Formel für bestimmte Zwecke

Alle diese Tätigkeiten lassen nun im Weiteren auf eine „simple" Erkenntnis schließen, welche, so schreibt Malle (1993), in der Schule eher wenig berücksichtigt wird:

> „Variable (und damit Terme und Formeln) sind Mittel zur allgemeinen Darstellung von Sachverhalten."[84]

Um ein bestimmtes Ziel zu erreichen, werden also mit Hilfe von Variablen Sachverhalte allgemein dargestellt. Was jedoch in manchen Fällen nicht beachtet wird, ist die Tatsache, dass jene allgemeine Darstellung von Sachverhalten selbst auch ein solches Ziel sein kann. In vielen Fällen sind solche Darstellungen nur ein erster Schritt, auf dem weitere Tätigkeiten folgen.

Akinwumni (2012) sieht ebenfalls ein Problem darin, dass Tätigkeiten, die durch und mit dem Arbeiten von Variablen entstehen, oft nicht erkannt werden und was gleich-

[82] (Malle, 1993) S.1.
[83] Ebd. S.9.
[84] Ebd. S.9.

zeitig die elementare Algebra als ein „reines“ Ausdrucksmittel charakterisiert. Eine Schwierigkeit, die sich bei dieser Mittel-zum-Zweck-Anschauung ergibt, sieht Akinwumni (2012) vor allem im anfänglichen Erlernen der algebraischen Fachsprache.[85] Dementsprechend kann die Beschränkung der elementaren Algebra auf den reinen Erwerb der formalen Sprache nicht ausreichend sein. Vielmehr sollte die Algebra oder das algebraische Denken als ein „Enkulturationsprozess“[86] gesehen werden, welcher von Denkhandlungen wie Generalisieren, Abstrahieren oder Strukturieren charakterisiert wird und dadurch eine Kultur ausmacht. Auch bei Akinkumni (2012) werden in algebraischen Denkhandlungen eine „Reihe von Tätigkeiten“[87] gesehen, die dadurch das Verständnis der algebraischen Sprache um eine weitere Komponente erweitern.

An dieser Stelle kann man nun festhalten: Das Arbeiten mit Formeln, Termen und Variablen beschränkt sich nicht „nur“ auf allgemeine Darstellungen mathematischer Sachverhalte, sondern fördert insbesondere eine Vielzahl von Tätigkeiten, die, laut Malle (1993), in Fähigkeiten wie Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren und Explorieren gesehen werden können. Das liefert wiederum einen Grund warum die elementare Algebra für das Erreichen allgemeiner Lernziele hilfreich sein und gerade deswegen auch für jene Schülerinnen und Schüler wichtig sein kann, welche beispielsweise nach der Schule die elementare Algebra nicht mehr „benötigen“. Ebenfalls Malle (1993) folgend, können hierbei Fähigkeiten angesprochen werden wie beispielsweise Begründen, Kommunizieren oder Argumentieren sowie zusätzliche Kompetenzen, welche insgesamt ein exaktes Arbeiten, Durchhaltevermögen und vor allem die Selbstdisziplin unterstützend fördern. Die elementare Algebra kann in diesem Sinne einen gelegentlichen praktischen Nutzen im Leben eines jeden Menschen haben.[88]

Wie bereits oben erwähnt, stellt bei der Thematisierung der Elementaren Algebra im Unterricht neben den Tätigkeiten bzw. generalisierten Fähigkeiten sicherlich auch die Verwendung und der Gebrauch der formalen Sprache der elementaren Algebra ein wichtiges Lernziel dar. Die Fachsprache der elementaren Algebra wird üblicherweise

[85] Vgl. (Akinwunmi, 2012) S.15.
[86] (Akinwunmi, 2012) S.16.
[87] Ebd. S.16.
[88] (Malle, 1993) S.10f.

als Formelsprache bezeichnet und ist charakterisiert durch eine spezifische algebraische Notation.[89]

Da dem Gebrauch der algebraischen Formelsprache eine grundlegende Rolle in der Sekundarstufe I und II zugesprochen wird, widmen wir uns im nächsten Kapitel der algebraischen Notation. Darauf folgt ein weiteres Kapitel, in dem insbesondere der historische Werdegang des Variablenbegriffs näher beleuchtet und dessen Konsequenzen für den Mathematikunterricht erläutert werden.

3.1. Die algebraische Notation

Nach Malle (1993) ist die Mathematik – so auch die elementare Algebra – stets in Verbindung mit ihrer Notation zu betrachten. Demzufolge kann auch der Lernprozess in der elementaren Algebra mit dem passenden Gebrauch ihrer Notationsform gleichgesetzt werden.[90]

Bei einer Notation handelt es sich laut Malle (1993) um einen geistreichen Sachverhalt, wie man es insbesondere an ihrer geschichtlichen Entwicklung erkennen kann. Dabei ist hervorzuheben, dass die Notation keinesfalls als ein individuelles Resultat einiger einzelner mathematischer Ikonen betrachtet werden darf, sondern letztendlich stützt sie sich auf allgemein akzeptierte „Konventionen"[91], welche sich in den vergangenen Jahrhunderten entwickelt haben.

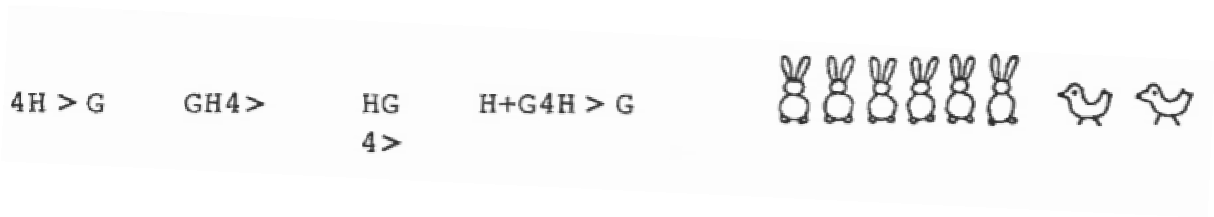
Wie schwierig es sein kann, eine algebraische Notation passend zu einem verbalisierten Ausdruck zu finden, soll folgender Versuch von Malle (1985) verdeutlichen:

> „In einem Stall sind **H** Hasen und **G** Gänse. Es sind um vier Hasen mehr als Gänse. Notiere dies in kurzer Form!"[92]

[89] Vgl. (Akinwunmi, 2012) S.15.
[90] Vgl. (Malle, 1993) S.34.
[91] Ebd. S.34.
[92] Ebd. S.35.

Dabei fielen die Vorschläge der Schülerinnen und Schüler im Alter von elf und zwölf Jahren zwar äußerst ideenreich aus, jedoch erwartungsgemäß nicht der üblichen algebraischen Notation entsprechend:

Abbildung 2: Schüler/innen-Vorschläge des verbalisierten Ausdrucks



[Quelle: Malle, Günther*: Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. S.36.]

Beim Aneignen der algebraischen Notation, sieht Malle (1993) im kognitionspsychologischen Ansatz ein Problem dahingehend, dass der Entwicklung des mathematischen Denkens, d.h. den inneren Abläufen eines Individuums, eine gewisse Eigenständigkeit bzw. zeitlich abhängige Selbstentwicklung zugesprochen wird. Für das Lernen algebraischer Notationen bedeutet das so viel wie: Wer genügend weit heranreift, wird mit der Zeit algebraische Notationen verstehen bzw. deren Funktion und Schreibweise begreifen. Diesem Ansatz aus der Kognitionspsychologie entzieht Malle (1993) seine Richtigkeit, in dem er wiederrum auf die Konventionen hinweist, aus denen algebraische Schreibweisen resultieren. Konventionen müssen im Unterricht von Lehrpersonen aufgegriffen und in einem kommunikativen Prozess thematisiert werden. Schließlich entstehen Konventionen nie allein in einem Individuum, sind auch nicht von „Natur aus gegeben“, sondern verstehen sich eher als ein Ergebnis zahlreicher Kommunikationsprozesse vieler Mathematiker.[93]

[93] Vgl. (Malle, 1993) S.34f.

3.2. Zur Entwicklung der algebraischen Notation – ein geschichtlicher Rückblick

In diesem Abschnitt versuchen wir, uns näher mit der Algebra und der Weiterentwicklung ihrer Arbeits- und Denkweisen zu beschäftigen, wobei im Fokus die Entwicklung des Variablenbegriffs steht. Warum dieser Rückblick auf die Geschichte der Algebra und den Variablenbegriff sinnvoll erscheint, wird in der Literatur auf folgende Weise begründet: Zunächst liegt nicht nur in der Mathematik, sondern in vielen Bereichen der menschlichen Erkenntnis, das Bedürfnis, die geschichtliche Entwicklung bestimmter Gegebenheiten wegweisend für die persönliche Denkweise zu sehen. Die zeitliche Entwicklung der Mathematik innerhalb von Jahrhunderten (Phylogenese) hat in diesem Sinne Auswirkungen auf die Entwicklung bzw. Denkrichtung im Leben eines Menschen (Ontogenese). Die phylogenetische Entwicklung kann somit als Wegweiser für die ontogenetische bzw. individuelle Denkrichtung verstanden werden.[94]
Darüber hinaus zeigt eine Reflexion über historische Entwicklungen des Variablenbegriffs auf, dass die Mathematik und deren Ideen nicht zielstrebig zum heutigen Stand der Dinge vorangeschritten sind.[95]

Dieses steigende Bedürfnis nach dem Wissen über historische Entwicklungen der Mathematik kann auch in der mathematischen Didaktik gefunden werden: Ein Blick auf die Geschichte der Mathematik – so meint es Kronfellner (1997) – kann Schüler und Schülerinnen eine neue Sicht und Anregung auf ein mathematisches Gebiet eröffnen. Mit der Verbindung zur Geschichte der Mathematik kann im Unterricht ein neuer (historisch-eingebetteter) Sinn geschaffen werden, der das Verständnis mathematischer Problemstellungen unterstützt. Historische Zugänge, so erwarten es sich viele Lehrkräfte, können neue, teils schwer verständliche Themen vereinfachen in einem Sinne, in dem man den Blick der Lernenden in eine spezifische Richtung lenkt: Menschen haben die Mathematik „erzeugt“, was wiederrum die Entwicklung algebraischer Notationen betont.[96]

[94] Vgl. (Steinweg, 2013) S.3.
[95] (Akinwunmi, 2012) S.81.
[96] Vgl. (Kronfellner, 1997) In: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1997%20Band%2027/Kronfellner1997.pdf. S.84ff. Zugriff am 25.01.2016.

So weist auch die Algebra, als frühe Teildisziplin der Mathematik, in den letzten vergangenen 4000 Jahren verschiedene Entwicklungsphasen auf. Wenn man eine zeitliche Entwicklung der Algebra aufzeigen möchte, so lässt sich jene in die rhetorische Algebra, die synkopierte und letztendlich in die heute geläufige symbolische Algebra gliedern.

3.2.1. Rhetorische Algebra

Anfänge des algebraischen Denkens können bereits in der babylonischen und ägyptischen Kultur festgestellt werden. In einem Zeitraum zwischen 5000 v. Chr. und Christi Geburt gründete die babylonische Kultur verschiedene Staaten in Mesopotamien. Dort kamen im 19. Jahrhundert bei archäologischen Grabungen mehrere tausend Tontafeln mit Keilschrifttexten zum Vorschein, von denen ca. dreihundert der Mathematik zugeordnet wurden.[97]

Die Babylonier und Ägypter haben sich mit unterschiedlichen Fragestellungen bezüglich Bauwesen, Handwerk und Verwaltung auseinandergesetzt. Diese Überlegungen führten zum Lösen linearer und quadratischer Gleichungen, welche später auch Anregung zu Gleichungen dritten und vierten Grades gaben.[98] Die Grundidee des Lösens von Gleichungen, welche von den vorgriechischen Mathematikern verwendet wurde, „ähnelt" der Vorgangsweise beim Auflösen von Gleichungen. Scholz (1990) beschreibt das Vorgehen der Mathematiker dieser Zeit mit den folgenden Worten:

> „[…], die unbekannte Größe wurde als ganz normale Größe angesehen und mit ihr wurde wie mit anderen Größen umgegangen, bis sie aus ihrer Verknüpfung mit anderen Größen herausgelöst war. Das ist genau, was man auch jetzt bei der Auflösung einer Gleichung macht."[99]

Wie das „Herauslösen" von Größen aus einer Verknüpfung verstanden werden kann, zeigt folgende verbalisierte Problemstellung, eingebettet in einen geometrischen Kontext:

[97] Vgl. (Peiffer & Dahan-Dalmedico, 1994) S.1.
[98] Vgl. (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015) S.118.
[99] (Scholz, 1990) S.15.

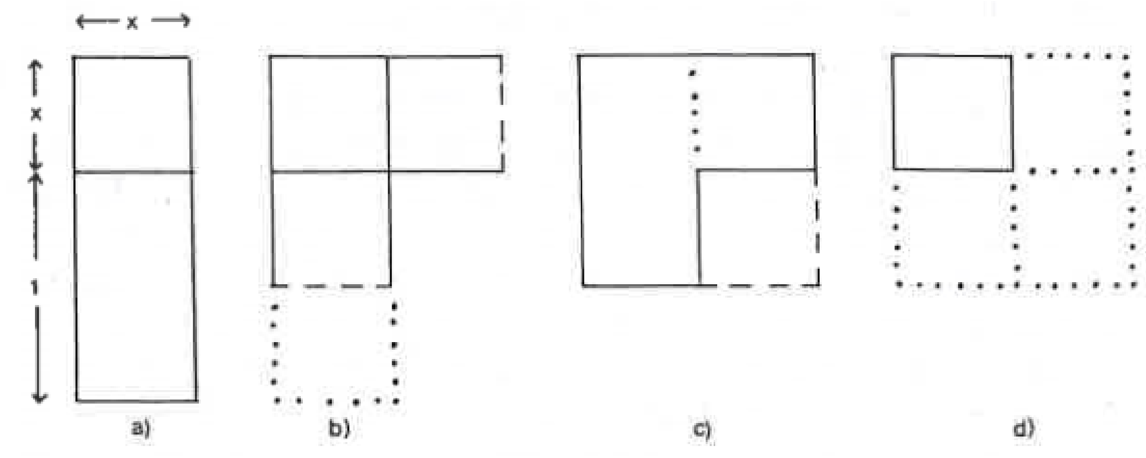
1. Die Fläche und das *Entgegengestellte* habe ich *zusammengelegt*: 0;45 ist es.
2. 1, das *Herausragende*, *setzt* Du.
3. Den halben Teil von 1 *brichst Du entzwei*, 0;30 und 0;30 *läßt Du einander* [wie zusammenstoßende Seiten eines Rechteckes] *halten*,
4. 0;15 *fügst Du zu* 0;45 *hinzu*: 1 *macht* 1 *gleichseitig*.
5. 0;30, das Du [ein Rechteck] hast halten lassen, *reißt Du* vom Leibe von 1 *heraus*: 0;30 ist das *Entgegengestellte*.[100]

Dieses Verfahren illustriert das „Rechnen“ der Menschen dieser Zeit auf eine sehr spezifische Weise: Der Lösungsweg sowie die Repräsentation von Unbekannten und Zahlen werden ausschließlich verbal erläutert, was Historiker dazu bewegte, diese Phase der Mathematik als rhetorische Algebra zu bezeichnen.[101] Das mathematische Denken dieser Epoche war stark an Kontexte und Beispiele gebunden, d.h. Lösungswege wurden nur anhand konkreter Beispiele vorgeführt.
In diesem Sinne handelt es sich bei diesem Beispiel, wie bei zahlreichen anderen überlieferten Aufgaben, um eher rezepthafte Rechenvorschriften. Begründungen oder gar Beweise für Formeln oder Sätze lassen sich in keinerlei Schriften finden.[102]
Wie man ebenfalls an diesem Beispiel erkennt, sind Zahlzeichen wie *0;30 oder 0;45,* die einzigen verwendeten Symbole, Variablen wie $x, y, z,$ wie wir sie aus der heutigen Mathematik kennen, wurden erst später entwickelt.[103]

Um dennoch eine Vorstellung zu bekommen, wovon diese Aufgabe handelt, kann man dies verdeutlichen, in dem man die sprachlichen Schilderungen in unseren heutigen Sprachgebrauch mit Variablen „übersetzt“: Es geht in dieser Aufgabe um ein Quadrat, bei dem die Summe der Maßzahlen von Fläche und Seite gleich $\frac{3}{4}$ ist. Nach heutigem Verständnis geht es also um die Gleichung $x^2 + x = \frac{3}{4}$, wobei x die Länge der Seite bezeichnet.[104]

[100] (Scholz, 1990) S.21.
[101] (Steinweg, 2013) S.4.
[102] Vgl. (Kaiser & Nöbauer, 1998) S.14.
[103] Vgl. (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015) S.119.
[104] Vgl. (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015) S.118.

Abbildung 3: Lösungsvorgang der verbalisierten Problemstellung



[Quelle: Scholz, Erhard: *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*. S.21.]

In moderner Sprechweise kann der Lösungsweg wie folgt beschrieben werden:

„Die Maßzahl x der gesuchten Seitenlänge wird durch ein $(x \cdot 1)$–Rechteck dargestellt und an das Quadrat (noch) unbekannter Größe $x \cdot x$ angelegt. Das entstehende $((x+1) \cdot x)$ - Rechteck, das nach Voraussetzung den Flächeninhalt $\frac{3}{4}$ hat, wird in eine flächengleiche Winkelfigur („Gnomon") umgewandelt. Darin bleibt ein Quadrat vom Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ausgespart. Wenn das Gnomon selbst den Flächeninhalt $\frac{3}{4}$ hat, dann ist die ergänzte Figur ein Quadrat vom Inhalt 1. Da eine Seite die Länge $x + \frac{1}{2}$ hat, folgt $(x + \frac{1}{2})^2 = 1$ und somit $x = \frac{1}{2}$."[105]

Die Winkel- und Zeiteinteilung, welche auf dem Sexagesimalsystem beruht, zählt heute noch zu den nachhaltigen Auswirkungen der mesopotamischen Mathematik.[106]

[105] (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015) S. 119.
[106] Vgl. (Alten, et al., 2014) S.43.

3.2.2. Synkopierte Algebra

Die zeitliche Einteilung der griechischen Mathematik kann in vier Perioden erfolgen: Die Ionische Periode (ca. 600-450 v. Chr.), die Athenische Periode (450-300 v.Chr.), die Hellenistische Periode (ca. 300 v. Chr. – ca. 150 n. Chr.) und die Spätantike (ca. 150- ca. 500 n. Chr.).

Da die griechische Algebra durch die Geometrie begründet wurde, spricht man auch von der geometrischen Algebra. Es wurde versucht, algebraische Probleme durch die Sprache der Geometrie zu formulieren und mit Hilfe der Proportionenlehre zu lösen. Die Entdeckung der Inkommensurabilität von Strecken durch die Pythagoreer (ca. 500 v. Chr.) veranlassten die Griechen, algebraische Problemstellungen mit geometrischen Methoden zu behandeln. Bei der Inkommensurabilität handelt es sich um ein Längenverhältnis, welches nicht durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen angegeben werden kann. Ein Beispiel dafür wäre $\sqrt{2}$.[107]

Die Griechen haben in ihrer Mathematik (Geometrie, Arithmetik und Größen- Proportionenlehre) versucht, algebraisches Denken mit einzubinden. Der Grieche Diophant von Alexandria (ca. 250 n.Chr.) war jedoch den Denkern seiner Zeit einen Schritt voraus und gelangte als Erster zu dem, was man heute eine Gleichung nennt. Er knüpfte an die Traditionen der Babylonier und Ägypter an und entwickelte ein allgemeineres Konzept der gesuchten oder unbekannten Zahl. Er distanzierte sich damit von den kontextbezogenen Größen seiner Vordenker und dehnte dadurch die Reichweite seiner Lösungsmethoden aus.[108]

Die Unbekannten und deren Potenzen wurden durch Buchstaben ausgedrückt, allerdings wurde mit den verwendeten Zeichen nicht gerechnet, sondern ihre Funktion diente rein der Darstellung. Deswegen war es auch nicht möglich, mehrere Unbekannte einzuführen.[109]

Diese Phase der Algebra ist also charakterisiert durch die „Einführung von verkürzten Notationsformen“[110] und wird eher durch ihre paradigmatische bzw. modellhafte Funktion ausgezeichnet, was das Wesen der synkopierten Algebra ausmacht.

---

[107] Vgl. (Alten, et al., 2014) S.47-63.
[108] Vgl. (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015) S. 120.
[109] Vgl. (Akinwunmi, 2012) S.103.
[110] (Steinweg, 2013) S.4.

Zusammenfassend lässt sich die Bedeutung und Auswirkung der beiden dargelegten Phasen als wegweisende Entwicklungen der Algebra mit folgenden Worten beschreiben: Das Denken der rhetorischen sowie synkopierten Algebra ist weitgehend von Prozeduren bestimmt und weit entfernt von der heutigen abstrakten Algebra. Die verbalen Beschreibungen stellen eher den Prozess und Operationsausführungen in den Mittelpunkt und erschweren dadurch „den Zugang zur Metaebene, in der die Beziehung oder Operation an sich als Objekte in der inneren Vorstellung ‚verdinglicht' werden".[111]

3.2.3. Symbolische Algebra

Die symbolische Algebra der (frühen) Neuzeit kann als die Phase wahrgenommen werden, in der der Auftakt zu einer eigenständigen formulierbaren Algebra als symbolisches bzw. theoretisches System durch die französischen Mathematiker François Viète (1540 – 1603) und René Descartes (1596 – 1650) markiert wird.[112]

Mit Viète bekam die Algebra und ihre Denkweise eine neue veränderte Form: Man spricht vom Aufkommen der „Buchstabenalgebra"[113]. Die mathematische Formel entstand durch das Buchstabenrechnen und läutete dadurch eine neue Ära der neuzeitlichen Algebra ein. Diese neue Gestalt der Algebra macht die Algebra im modernen Sinne erst möglich. Demzufolge kann der arithmetische Ausdruck „ 5 + 1 = 1 + 5" von dem algebraischen Ausdruck „a + b = b + a" nicht durch seine Verifikation oder Falsifikation unterschieden werden, sondern durch seine Aussageform. Die Aussage wird mit freien Variablen gebildet und bekommt durch die Zeichensetzung und durch die inhaltlich interpretierten Symbole den Charakter einer formalen Sprache.[114]

Nach Krämer (1991) können drei Richtungen durch die Folgen von Viètes Denkweise für die Geschichte Algebra festgehalten werden:

[111] (Steinweg, 2013) S.5.
[112] Vgl. (Scholz, 1990) S. 3.
[113] (Krämer, 1991) S.125.
[114] Vgl. ebd. S.125.

1. Das Buchstabenrechnen bringt einen Bruch in der Geschichte der Algebra, der es erlaubt, die nicht-symbolische (rhetorische) Algebra von der symbolischen zu trennen.

2. Durch die Buchstabenalgebra verschmelzen zwei mathematische Denkweisen: Zum einen können Probleme in der Mathematik kunstfertig gelöst werden, zum anderen ist es möglich, Theoreme auf eine strikte Art und Weise zu formulieren.

3. Die Einführung von Variablenzeichen und die allgemeine Formulierung und Verschriftlichung des interpretationsfreien Operierens mit Symbolen. Die Ungleichheit einer „Objektschrift" („5 + 1 = 1 + 5") und einer „Metaschrift" („a + b = b + a") wird denkbar.[115]

Der Philosoph und Mathematiker Descartes leistete ebenfalls einen bemerkenswerten Beitrag (mit seinen eher an der Geometrie orientierten Ideen) zur algebraischen Notationsweise. Descartes strebte eine konsistente Schreibweise an, das bedeutet, dass Symbole nicht nur reine Größen, sondern auch Relationen und auszuführende Operationen darstellen. Für die Darstellung algebraischer Größen verwendete er hauptsächlich Kleinbuchstaben: Die Buchstaben am Anfang des Alphabets repräsentierten die unbestimmten konstanten Größen, jene am Ende des Alphabets die Unbekannten.[116]

Durch Viète und Descartes entstanden Zeichensysteme, die zunächst koexistierten, bis sich das kartesische System durchsetzte. Im 18. Jahrhundert verbreitete sich die symbolische Darstellung, sodass Problemstellungen und deren mathematische Zusammenhänge – ohne Rückgriff auf verbale Formulierungen – innerhalb eines Systems möglich waren.[117]

Zusammenfassend lässt sich nun festhalten: In der Geschichte der Mathematik hat es Jahrtausende gedauert, auf rein symbolischer Ebene, also mit Zeichen bzw.

[115] Vgl. (Krämer, 1991) S.125f.
[116] Vgl. ebd. S.214.
[117] Vgl. (Akinwunmi, 2012) S. 83.

Variablen zu operieren. Das mathematische Denken ist – in jedem Jahrhundert – vielen individuellen einflussreichen Faktoren ausgesetzt, sodass manche Entwicklungen aus heutiger Sicht als „Umweg oder Irrweg“[118] gesehen werden können.[119]

[118] (Peiffer & Dahan-Dalmedico, 1994) S.XI.
[119] Vgl. ebd. S.XI.

4. Zeichen und Symbole in der Mathematik

Die Darstellung von Variablen, Zahlen oder Operationszeichen (*symbolischer Zeichen*) wird in der Mathematik als ein Versuch aufgefasst, in dem gedankliche Gebilde mathematischer Natur, in oft äußerst prägnanter Weise, einem Gegenüber vermittelt werden. In der Semiotik (Pierce) wird ein Unterschied zwischen Zeichen und Symbolen gemacht: Zeichen stehen in einem direkten Bezug zu realen Gegenständen, welche sie darstellen, wohingegen Symbole willkürliche, abstrakte Relationen verkörpern. Diese Sichtweise schafft einen spezifischen Blick auf die Variable als *Symbol*, was aber gleichzeitig dafür steht, dass bei einer Darstellung mit Variablen nicht immer von einer eindeutigen Abbildung mathematischer Objekte, d.h. von einer einzigen zugeordneten Bedeutung, die Rede sein kann.[120]
Diesen Ansatz greift auch Steinbring (2000) auf und stellt klar, dass mathematische Zeichen in Bezug auf ihren *Referenzkontext* interpretiert werden müssen:

> „Zeichen haben zunächst für sich alleine keine Bedeutung, sie muß von den lernenden Kindern hergestellt werden. Damit mathematische Zeichensysteme Bedeutung erhalten, bedürfen sie ganz allgemein gesprochen, angemessener *Referenzkontexte*. Bedeutungen für mathematische Begriffe werden als Wechselbeziehungen zwischen Zeichen-/Symbolsystemen und Referenzkontexten/Gegenstandsbereichen vom Erkenntnissubjekt aktiv konstruiert.“[121]

Die Vieldeutigkeit von Symbolen oder Zeichensystemen in der Mathematik formt den Algebra-Unterricht auch dahingehend, indem sie aufzeigt, dass im Interpretieren von mathematischen Symbolen ein konventioneller Gebrauch jener Objekte gesehen werden kann. Um die Bedeutung der Variable als Teil der algebraischen Sprache für den Mathematikunterricht aufzuzeigen, soll im nächsten Kapitel die Vieldeutigkeit bzw. Kontextabhängigkeit des Variablenbegriffs erläutert werden.

[120] Vgl. (Steinweg, 2013) S.167.
[121] Steinbring (2000) zitiert in (Steinweg, 2013) S.167.

4.1. Die Variable

Malle (1993) gibt in seinem Buch *Didaktische Probleme der elementaren Algebra* auf die Frage „Was sind Variable?“ folgende Antwort:

> „Ich glaube, dass diese Frage niemand zufriedenstellend beantworten kann, weil der Variablenbegriff zu schillernd und aspektreich ist. In der mathematischen Literatur werden Variable meist nur *verwendet* und nicht *definiert*.“[122]

Auch hier lässt sich keine verallgemeinerte Definition finden, sondern man *gebraucht* Variablen je nach Aufgabenstellung und *Kontext*.
Daher ist es in manchen Situationen nicht klar, inwieweit etwas als eine Variable akzeptiert werden kann. Schon in der Umgangssprache übernehmen Worte oder Wortgruppen, wie „Ding“, „Sache“, „ein“, „ein beliebiger“, „irgendwelche“ etc. die Rolle von Variablen. Bereits in der babylonischen Mathematik wurde den Worten, wie „Haufen“, „Menschen“, „Tage“ ihre ursprüngliche Bedeutung entzogen und diese nunmehr als Wortvariablen verwendet. Die Verwendung von Wortvariablen kann aber auch in der Mathematik der heutigen Zeit vermerkt werden: In diesem Sinne enthält der Satz „Das Quadrat einer reellen Zahl ist nicht negativ“ die Wortvariable „eine reelle Zahl“.[123]

Die Schwierigkeit einer umfassenden Bestimmung des Variablenbegriffs kann auch darin gesehen werden, dass sich Variable nicht auf einen *eindeutigen* Gebrauch eingrenzen lassen. Der vielseitige Gebrauch von Variablen ermöglicht zwar viele Einsatzmöglichkeiten, was sich durchaus als Stärke vermerken lässt, erschwert jedoch das Verständnis von Variablen dahingehend, dass Schüler/innen wiederrum in der Lage sein müssen sich in der Bedeutungsvielfalt zurechtzufinden.[124]
Im nächsten Kapitel wird die hier angesprochene Bedeutungsvielfalt von Variablen durch verschiedene Variablenkonzepte verdeutlicht. Dazu werden Rechenbeispiele angeführt, die jene unterschiedlichen Betrachtungsweisen und Verwendungen von Variablen hervorheben.

[122] (Malle, 1993) S.44.
[123] Vgl. (Malle, 1993) S.44f.
[124] Vgl. (Akinwunmi, 2012) S.8.

4.2. Variablenkonzepte

In der Didaktik der Mathematik lassen sich viele voneinander unabhängig entwickelte Zugänge zu Variablenkonzepten finden, die den Gebrauch und die Komplexität von Variablen auf verschiedenste Weise untermalen. Für die vorliegende Arbeit wird der Ansatz von Malle (1993) gewählt, da dieser die verschiedensten Konzepte klar aufzeigt und dadurch einen sehr guten Überblick über die Bedeutungsvielfalt von Variablen schafft.

Für das weitere Vorgehen werden zunächst verschiedene Variablenaspekte, unterstützt mit Beispielen, aufgezeigt. Desweiteren wird eine eher „dynamische“ Sichtweise auf den Variablenbegriff erläutert, der in einem engen Zusammenhang mit Formeln bzw. funktionalen Abhängigkeiten gesehen werden kann.

4.2.1. Variablenaspekte

Um die Aspekte des Variablenbegriffs zu untersuchen, schauen wir uns zunächst drei Aufgaben mit Lösungsvorschlägen[125] an, die sehr gut aufzeigen, wie verschieden Variablen *verwendet* werden können:

1. Denke dir eine Zahl! Addiere 10! Verdopple das Ergebnis! Subtrahiere das Doppelte der ursprünglichen Zahl! Du erhältst 20. Warum funktioniert das für jede gedachte Zahl?

Mögliche Lösung: Ist x die gedachte Zahl, dann gilt:

$$2(x + 10) - 2x = 2x + 20 - 2x = 20$$

2. Setze in die Gleichung 2x + 3 = 11 der Reihe nach die Zahlen von 1 bis 6 ein! Wann ergibt sich eine wahre Aussage?

[125] Aufgaben sowie Lösungsvorschläge in (Malle, 1993) S.45f.

Mögliche Lösung:

$2\cdot 1 + 3 = 11$ *f*	$2\cdot 4 + 3 = 11$ *w*
$2\cdot 2 + 3 = 11$ *f*	$2\cdot 5 + 3 = 11$ *f*
$2\cdot 3 + 3 = 11$ *f*	$2\cdot 6 + 3 = 11$ *f*

3. Löse: $3x + 8 = 26$

Mögliche Lösung:

$$\begin{aligned} 3x + 8 &= 26 \quad && | \; -8 \\ 3x &= 18 && | \; :3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Was ist der Unterschied zwischen den drei Verwendungsweisen? Was lässt sich daraus über die Bedeutung der Variable x schließen?
In der ersten Lösung wird die Variable x als eine unbestimmte oder unbekannte Zahl aufgefasst. In der zweiten Rechnung übernimmt x die Rolle eines Platzhalters bzw. einer Leerstelle, in die Zahlen eingesetzt werden. In der dritten Aufgabe wird mit x nach bestimmten Regeln gerechnet und über seine Bedeutung wohl eher schwächer nachgedacht als in den beiden anderen Lösungen.

Für Malle (1993) lassen sich daher drei „Aspekte des Variablenbegriffs"[126] unterscheiden:

1. Gegenstandsaspekt: Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl (allgemeiner als unbekannter oder nicht näher bestimmter Denkgegenstand)

2. Einsetzungsaspekt: Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle, in die man Zahlen (genauer: Zahlnamen) einsetzen darf.

3. Kalkülaspekt (Rechenaspekt): Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf.

[126] (Malle, 1993) S. 46.

Malle (1993) räumt ein, dass es sich bei dem Versuch, den Variablenbegriff auf einen der hier genannten Aspekte zu reduzieren, um ein klares Missverständnis handle. Darüber hinaus weist er in diesem Kontext darauf hin, dass die Denkweisen der hier genannten Aspekte sich durchaus auf Terme und Gleichungen übertragen lassen.

Beide Standpunkte illustriert er wiederum an einem Beispiel:

> „Beim Aufstellen einer Formel, etwa der Formel
>
> $$m = \frac{x+y}{2}$$
>
> für den Mittelwert m zweier Zahlen x und y, denkt man vermutlich an nicht näher bestimmte Zahlen, betont also den Gegenstandsaspekt. Setzt man anschließend für x und y Zahlen ein, um verschiedene Mittelwerte auszurechnen, betont man eher den Einsetzungsaspekt. Formt man die Formel um, etwa zu $x = 2m - y$, wendet man einfach gewisse Regeln an und betont damit den Kalkülaspekt.“[127]

Diesem Beispiel ist zu entnehmen, dass in abstrakten Termen oder Gleichungen manche Sichtweisen gleichzeitig auftreten, was wiederrum die Vielfältigkeit von algebraischen Ausdrücken kennzeichnet.

4.2.2. Ein weiterer Gesichtspunkt: Die Variable und der Veränderlichenaspekt

Abhängigkeiten von verschiedenen Größen können mit Hilfe von Formeln ausgedrückt werden. Im Unterricht werden diese Abhängigkeiten auch im Zusammenhang mit funktionalen Aspekten von Formeln verdeutlicht. Um jedoch eine solche Abhängigkeit in einer Formel zu erkennen, genügt es nicht, Formeln „statisch“ zu lesen, sondern man benötigt eher eine „dynamische“ Vorstellung, wie an folgenden

[127] (Malle, 1993) S.48.

Sprechweisen zu erkennen ist: „Wenn x wächst, dann fällt y", „Wenn x verdoppelt wird, wird y vervierfacht" etc.[128]

Wie schwierig es sein kann, Zusammenhänge dieser Art zu erkennen, zeigt folgendes Interview[129] mit einer vierzehnjährigen Schülerin. Die Schülerin soll dabei folgende Aufgabe lösen:

Gegeben ist die Formel $z = \frac{x}{y}$. Wie ändert sich z, wenn x wächst?

I:	Wie ändert sich in der Formel $z = \frac{x}{y}$ das z, wenn x verdreifacht wird?
A:	z verändert sich nicht, $z = \frac{3x}{y}$. Wenn man das x verdreifacht, braucht man das z nicht dazu.
I:	Wie ändert sich nun z?
A:	Es bleibt gleich.
	……………………………………………………………
I:	Wie ändert sich nun z, wenn y verdreifacht wird?
A:	z bleibt gleich.
I:	Mh.
A:	Es wird ja nicht gefragt, wenn z verdreifacht wird, das ist ja nicht in der Frage beinhaltet. z ändert sich nicht. y wird verdreifacht.
I:	Es besteht kein Zusammenhang zwischen z und y?
A:	Ja!

128 Vgl.ebd. S.79.
129 Ebd. S.87f.

Dieselbe Schülerin ist auch der Meinung, dass man in dieser Formel die Variablen unabhängig voneinander belegen könnte. Daher wurden von ihr die Variablen mit beliebigen Zahlen belegt, wie an folgender Reaktion zu sehen ist:

A:	$z = 5,\ x = 3,\ y = 2$
I:	Was ergibt das?
A:	(schreibt nach anfänglichen Schwierigkeiten, die hier übersprungen werden): $5 = \frac{3}{2}$
I:	Kann man denn für $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ beliebige Zahlen wählen?
A:	Ja, man kann es beliebig belegen… Wenn man es belegen kann, ist es ja keine bestimmte Zahl.
I:	Du hast geschrieben: $5 = \frac{3}{2}$
A:	$5 < \frac{3}{2}$. Da kann man jetzt nichts mehr machen. Es kann ja nur das Ergebnis sein.

Malle (1993) zeigt auf, dass die Fähigkeit zur Betrachtung von Formeln unter funktionalen Gesichtspunkten bei den meisten Schüler/innen sehr unterentwickelt ist, was nicht minder daraus resultiere, da Betrachtungen dieser Art im Unterricht eher selten aufgegriffen werden. Um eine Formel eher „dynamisch“ lesen zu können, braucht es eine Auffassung, die darin fußt, Variable als „Veränderliche“ zu sehen.
Daher versucht Malle (1993), den Variablenbegriff unter einem speziellen Gesichtspunkt zu betrachten, der diese Dynamik von Formeln und Gleichungen veranschaulicht. Er geht davon aus, „daß sich eine Variable auf einen bestimmten Zahlbereich, etwa auf die Menge $\mathbb{R}$ oder ein Intervall, bezieht, d.h. eine Zahl oder mehrere Zahlen aus diesem Bereich ‚repräsentiert‘.“[130] Je nach Art der Repräsentation werden folgende Variablenaspekte[131] unterschieden:

[130] (Malle, 1993) S.80.
[131] Ebd. S.80.

- **Einzelaspekt**: Variable als *beliebige, aber feste Zahl* aus dem betreffenden Bereich. Dabei wird nur *eine* Zahl aus dem Bereich repräsentiert.

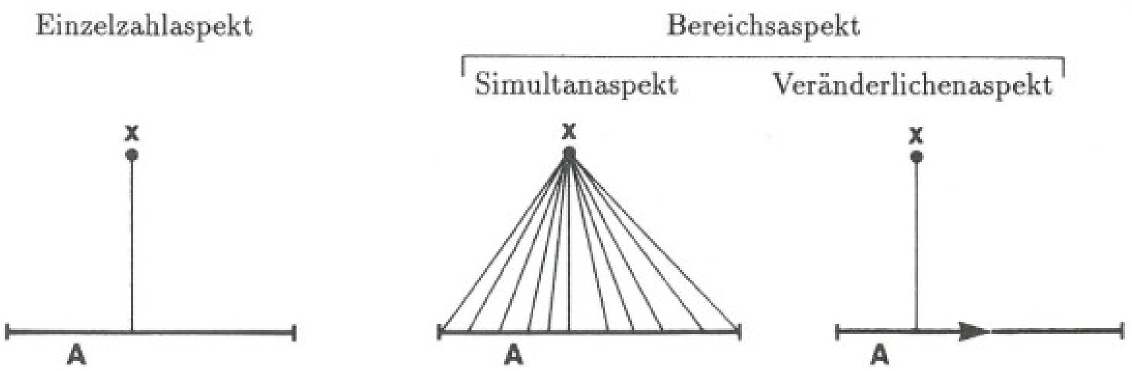
- **Bereichsaspekt**: Variable als *beliebige Zahl* aus dem betreffenden Bereich, wobei *jede* Zahl des Bereichs repräsentiert wird. Dieser Aspekt tritt wiederrum in zwei Formen auf:

    a) **Simultanaspekt**: Alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden *gleichzeitig* repräsentiert.

    b) **Veränderlichenaspekt**: Alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden *in zeitlicher Aufeinanderfolge* repräsentiert (wobei der Bereich in einer bestimmten Weise durchlaufen wird).

Die folgenden Figuren sollen die hier dargelegten Aspekte verdeutlichen, wobei sich die Variable x auf den Bereich A bezieht:

Abbildung 4: Variablenaspekte nach Malle



[Quelle: Malle, Günther: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. S.80.]

Auch hier sollen die genannten Variablenaspekte mit Hilfe eines Beispiels[132] verdeutlicht werden. Wie im vorigen Beispiel des Mittelwerts, zeigt sich auch an dieser Stel-

[132] (Malle, 1993) S.82f.

le, dass mathematische Argumentationen und Sichtweisen häufig wechseln oder ineinander verwoben sind:

Es sei $f(x) = k \cdot x$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ und $k > 0$. Man begründe, daß $f(x)$ auf das Doppelte wächst, wenn x auf das Doppelte wächst.

Wer diese Aufgabe liest, schließt vermutlich aus den wachsenden Größen x und $f(x)$ auf den *Veränderlichenaspekt*. Jedoch wird zunächst bei der Begründung im Allgemeinen im Sinne des „natürlichen Schließens“ vorgegangen: Sei x eine beliebige positive reelle Zahl, für diese lässt sich dann argumentieren:

$$f(2 \cdot x) = k \cdot (2x) = 2 \cdot (kx) = 2 \cdot f(x)$$

Im ersten Schritt dieser Argumentationskette denkt man vorerst an eine beliebige positive reelle Zahl x. Jene wird ausgewählt und für das Weitere festgehalten, was wiederrum den *Einzelzahlaspekt* hervorhebt. Dann wechselt man den Aspekt, in dem man x wieder als beliebige positive reelle Zahl (*Simultanaspekt*) betrachtet. In diesem Sinne hat man die Behauptung für alle positiven reellen Zahlen bewiesen.

An dieser Stelle betont Malle (1993), dass es für die Entwicklung des *Veränderlichenaspekts* und für die Fähigkeit, Formeln unter funktionalen Gesichtspunkten zu erkennen, von Vorteil wäre, im Unterricht Abhängigkeiten von Größen und Formeln auf eine Weise zu studieren, in der Variablen außermathematisch interpretiert werden können.[133]
Als Beispiel nennt Malle (1993) die Formel:

$$s = v \cdot t \quad (Weg = Geschwindigkeit \ \cdot Zeit)$$

Bei dieser Formel vermag es Schüler/innen aufgrund eigener Erfahrungen möglicherweise leichter fallen, daraus zu erkennen, dass mit wachsender Zeit t und bei konstanter Geschwindigkeit v ebenfalls der Weg s wächst. Monotoniezusammenhänge zu erkennen, fällt den meisten Schüler/innen schwer, wenn es sich beispielsweise um Formeln wie $f(x) = k \cdot x$ handelt. Malle (1993) empfiehlt daher, mit For-

[133] Weitere Unterrichtsvorschläge in (Malle, 1993) S.88 – 92.

meln zu beginnen, die auf die Erfahrungswelt der Schüler/innen zurückgehen und so außermathematisch interpretierbar sind.

5. Zusammenführung: Anregungen für den Mathematikunterricht

Wir werden im letzten Kapitel versuchen, die sprachphilosophischen Ausführungen mit den historischen und didaktischen Überlegungen der algebraischen Notation, insbesondere mit der Thematisierung von Variablenkonzepten zusammenzuführen.

Zu diesem Zwecke soll das oben beschriebene Konzept der Sprachspiele herangezogen werden, um Kennzeichen, konkret der algebraischen Sprache, zu verdeutlichen, was gleichzeitig eine besondere Sichtweise auf das Lehren und Lernen der Algebra wirft. Das bedeutet, dass wir versuchen werden Wittgensteins sprachphilosophische Begriffe, wie „Mannigfaltigkeit der Sprachspiele“, „Zeitliche Dynamik der Sprachspiele“, „Bedeutung und Gebrauch von Worten“, „Handeln durch Tätigkeiten“, „Regeln folgen“, in der algebraischen Sprache wiederzufinden und die eventuell daraus resultierenden Erkenntnisse für das Verständnis bzw. die Auffassung eben dieser algebraischen Sprache zu untersuchen. Von besonderem Interesse sind in diesem Zusammenhang selbstverständlich die möglichen Auswirkungen dieser etwas anderen Sichtweise auf den Unterricht.

5.1. Entwicklung des Variablenbegriffs und zeitliche Dynamik

Im Kapitel *Zur Entwicklung der algebraischen Notation – ein geschichtlicher Rückblick* wurde aufgezeigt, dass die algebraische Notation mit der Entwicklung des Variablenbegriffs nicht zielstrebig zum heutigen Stand der Dinge vorangeschritten ist, sondern dass algebraische Denkweisen im Laufe ihrer nahezu viertausendjährigen Geschichte vielerlei Ergänzungen und Umgestaltungen erfahren haben, kurz einer ständigen Entwicklung unterworfen waren. Hier ließe sich eine Wittgenstein`sche *Idee*, wie er sie unter anderem im Paragraph 23 der *Philosophischen Untersuchungen* formulierte, erkennen: Altes vergeht, Neues entsteht – Umgestaltung, Entwicklung und Wandel von Sprachspielen. So betrachtet, lassen sich dessen Konzepte von „Mannigfaltigkeit“ und „zeitliche Dynamik“ auf das algebraische Sprachspiel anwenden.

Wenn auch nur auf mathematische Sachverhalte bezogen, so weist auch Vollrath (1987) auf einen historischen Wandel hin, der unseren Blick auf die Nicht-Abgeschlossenheit und die Entwicklungsfähigkeit (nicht nur) der Mathematik schärfen soll:

> „Mathematikunterricht behandelt Sachverhalte, die zum größten Teil seit langem bekannt sind. Die Schüler lernen ein Kulturgut kennen, von dem sie den Eindruck der Abgeschlossenheit erhalten. Sie können sich das aneignen, in jedem Fall sind sie nur Nach-Denker. Die Entwicklungsfähigkeit der Mathematik erkennt praktisch kein Schüler.“[134]

Auch Freudenthal (1983) sieht ein Problem darin, wenn die Entwicklung fundamentaler mathematischer Konzepte im Unterricht wie „definierte Produkte“[135] präsentiert werden. Diese nicht zielführende Thematisierung wird von Freudenthal (1983) als „antididaktische Umkehrung“[136] bezeichnet und tritt unter Umständen bei der Vermittlung der algebraischen Symbolsprache auf.[137]

5.2. Definieren als *ein* Sprachspiel

Eines aus der Vielzahl der Sprachspiele, welches vor allem in der Mathematik eine zentrale Bedeutung hat, ist das Aufstellen von Definitionen.

Die Verwendung von Definitionen im Mathematikunterricht ist nicht nur keine Seltenheit, sondern unentbehrlich in Hinblick auf ihre präzise und starke Ausdrucksform.
Definitionen, Sätze oder Theoreme liefern Informationen zu mathematischen Sachverhalten, jedoch erfordert das Verständnis einer Definition vielfach Kenntnisse, die beim Einstieg in die zu definierende Thematik noch nicht vorhanden sind. Dieses Wissen über mathematische Sachverhalte, versteht sich, könnte man meinen, vor allem im Mathematikunterricht dahingehend, dass Schüler/innen nicht nur verstehen,

[134] (Vollrath, 1987) In: http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/vollrath/papers/046.pdf. S.5. Zugriff am 15.07.2016.
[135] Freudenthal (1983) zitiert in (Akinwunmi, 2012) S.81.
[136] Ebd. S.81.
[137] Vgl. ebd. S.81.

was mit Ausdrücken, wie „linearer Funktion“ oder „Variable“ benannt wird, sondern vielmehr, wie damit *gerechnet* wird.

Mit der Voranstellung von Definitionen soll oftmals eine gewisse thematische Orientierung für Schüler/innen geschaffen werden. Dabei sollte jedoch nicht übersehen werden, dass das rasche Definieren der einzelnen Begriffe (Teile) eines Vorgangs das Erfassen desselben bestenfalls ein wenig vorbereiten kann. Erst Anwendung und Übung führen letztendlich zu einem umfassenden Verständnis und mitunter wird erst dann die anfänglich „erlernte“ Definition vollständig erfasst.

Gerade so wie auch Wittgenstein von der Sprache sagt, dass sie ihre Funktion erst im Gebrauch entwickelt. Die Namensgebung alleine schafft noch keine Bedeutung. So betrachtet verliert die Definition mitunter ihren scheinbar verlässlichen Charakter, ihren vorrangigen Stellenwert. Dies ist wohl mit ein Grund dafür, weshalb in manchen mathematischen Gebieten, wie zum Beispiel Algebra und elementare Algebra, auf einführende Definitionen mehr oder weniger verzichtet wird und stattdessen, sozusagen direkt, der Gebrauch, die Anwendung, die Übung empfohlen wird.

5.3. Sauberes Erklären vs. Befolgen einer Regel

Bevor in diesem Kapitel „das Regelbefolgen“ und der „Gebrauch von Variablen und Gleichungen“ im Sprachspiel der Algebra aufgezeigt werden, ist es vorweg notwendig, ein wenig auszuholen und zunächst den Blick auf die Entwicklung der Didaktik in der Schulmathematik zu richten.

In den sechziger Jahren wurden durch die Reform der „Neuen Mathematik“ neue Denkweisen in der Schulmathematik entwickelt, welche auch insbesondere in der elementaren Algebra sichtbar wurden. Diese „neue“ Reform wurde stark von der Hochschulmathematik beeinflusst, wobei man sich vor allem auf dem Gebiet der Begriffserklärung Zugänge und damit Verständnishilfen für die Schüler/innen erwartete: Variable wurden als „Platzhalter“ oder „Leerstellen“ erfasst, Gleichungen als „Aussageformen“ verstanden, welche durch Einsetzen von Zahlen in wahre oder

falsche „Aussagen“ übergeführt wurden. Die „Grundmenge“ und „Definitionsmenge“ musste beim Lösen von Gleichungen beachtet werden, sowie die Berücksichtigung und das Aufschreiben der „Lösungsmenge“. Das Termumformen und Gleichungslösen wurden als „Äquivalenzumformungen“ aufgefasst und vieles mehr.[138]
Die elementare Algebra wurde in diesem Sinne stark mit zahlreichen neuen Begriffen und Sprechweisen angereichert, sodass manche Autoren von einer „Begriffs- und Terminologiewust“[139] sprachen.

Die Einführung dieser „neuen“ begrifflichen Klärung in der Schulmathematik führte auch teilweise zu recht kuriosen Entwicklungen, mit denen sich Schüler/innen im Unterricht konfrontiert sahen: So wurde ihnen beispielsweise verboten eine Variable als „Unbekannte“ zu bezeichnen oder in manchen Fällen mussten Schüler/innen den Ausdruck „eine Gleichung lösen“ durch „eine Äquivalenzumformung durchführen“ ersetzen. In einem österreichischen Lehrbuch wurde streng unterschieden zwischen Gleichheitsaussagen und Gleichungen, wobei erstere Aussagen, letztere Aussageformen darstellen. In diesem Sinne verlangt eine Aussageform, dass sie mindestens einen Platzhalter enthält, was unter anderem einen Lehrer dazu veranlasste, seinen Schüler/innen zu verbieten, zur Gleichung $\frac{6}{2} - x = 3 - x$ auf beiden Seiten x zu addieren, da sonst die Gleichung in eine Gleichheitsaussage übergehen würde.[140]

Heute fragt man sich, warum, angesichts dieser Entwicklungen die „neue“ Didaktik so viel Wert auf grundlagenorientierte Ideen aus der Hochschulmathematik gelegt hat.

Einen Grund für diese Entwicklungen sieht Malle (1993) vor allem darin, dass jene Begriffe mathematische Sachverhalte vermeintlich „klarer“ und „sauberer“ *erklären* und dadurch Verständnisschwierigkeiten weitgehend ausräumen würden. Bei dieser Erklärungsideologie wird im Unterricht vorwiegend über Variable, Terme oder Gleichungen *gesprochen*, d.h. mehr oder weniger *über sie gesprochen*, so wie in einer Metasprache. Mathematische Inhalte wurden also nicht vorwiegend *gebraucht*, sondern Gleichungen selbst (und damit Terme und Variable) wurden „zu Objekten,

[138] Vgl. (Malle, 1993) S.24f.
[139] Ebd. S.25.
[140] Vgl. ebd. S.25.

über die gesprochen wurde, indem man ihre Grundmengen, Definitionsmengen, Lösungsmengen, Äquivalenzen usw. untersuchte."[141]

Empirische Untersuchungen zeigen aber, dass Schüler/innen durch den Ansatz des „sauberen" *Erklärens* die elementare Algebra nicht besser als vorher verstanden, was gleichzeitig paradox erscheint: Denn wie kommt es, dass vor allem ein Ansatz, welcher mehr Wert auf Klarheit und Verständnis durch „sauberes" *Erklären* legt, dennoch versagt?

Malle (1993) versucht eine Antwort auf diese Frage zu geben, indem er auf vier „Irrtümer der Erklärungsideologie"[142] verweist.

In den nächsten vier Abschnitten sollen diese vier „Irrtümer der Erklärungsideologie" von Malle (1993) aufgezeigt werden. Es wird dann versucht jeden einzelnen Irrtum mit den Überlegungen von Wittgensteins Sprachauffassung zusammenzuführen.

Irrtum 1: *Saubere Erklärungen ersetzen eigenes Tun.*

In diesem Sinne kann man durch die beste Erklärung nicht erfassen, was eine „Variable", eine „Gleichung", eine „Lösung", eine Äquvialenzumformung" usw. ist, sofern nicht der Umgang bzw. der Gebrauch mathematischer Inhalte vorausgegangen ist. Etwas zugespitzt formuliert Malle (1993), dass sauberes *Erklären* Schüler/innen dahingehend überfordert, dass dieser Erklärungsdrang hinsichtlich mathematischer Gleichungen die Praxis des Rechnens so sehr in den Hintergrund stellt, dass Schüler/innen „vor lauter Reden über Gleichungen gar nicht mehr richtig zum Lösen von Gleichungen"[143] kommen.

Malle (1993) versucht also mit diesem ersten Irrtum aufzuräumen, dass reines Erklären im Unterricht zu wenig greift bzw. betont er, eher Handlungen oder den Gebrauch von Gleichungen, die Erklärungen erst einen Sinn geben.

[141] Vgl. (Malle, 1993) S.26.
[142] Vgl. ebd. S.27 – 31.
[143] Vgl. ebd. S.28.

Mit dieser Überlegung nähern wir uns auch schon dem, was Wittgenstein über die Mathematik als Sprachspiel zu sagen versucht. Wittgenstein sieht im Sprachspiel (und das gilt nicht nur in der Mathematik) einen engen Zusammenhang von Sprache und Handlungen.
Passend zu den Überlegungen von Malle (1993) soll ein Zitat von Ramharter & Weiberg angeführt werden, welches den Aspekt des sauberen *Erklärens* im Sprachspiel der Mathematik (also auch der Algebra) trifft:

> „Mathematik ist ein Sprachspiel, das in wesentlicher Hinsicht nicht *gesprochen* werden kann – damit man einen etwas anspruchsvolleren, wenn auch nicht langen Beweis verstehen kann, muss dieser aufgeschrieben sein. […]
>
> (Mathematische) Begriffsbildung findet nicht ‚im leeren Raum', nicht in einer abstrakten Gedankenwelt statt, sondern steht in Verbindung mit unserer Erfahrungswelt."[144]

Was bedeuten diese Darlegungen nun für das Lehren und Lernen im Mathematikunterricht? Was vermutlich deutlich erkennbar ist, wird mit den Überlegungen von Malle (1993) und mit ersterem der beiden Zitate von Ramharter & Weiberg klar: Der Gebrauch, also das eigene Tun, sozusagen der Handlungscharakter im Sprachspiel der Algebra, ist für das Lernen der algebraischen Sprache unverzichtbar. Mathematische Begriffe entstehen nicht „im leeren Raum", sondern Lernenden muss *demonstriert* werden, anhand von *Beispielen*, wie mit ihnen zu *handeln* ist.
Es ist dabei auch wichtig, damit möchte ich die Aufmerksamkeit auf das zweite Zitat richten, dass sich der Sprachgebrauch an eine „Gepflogenheit" bzw. an eine „Praxis" richtet, innerhalb derer er angewendet wird. Dass mathematische Begriffe „in Verbindung mit unserer Erfahrungswelt" entstehen, spricht wiederum den Öffentlichkeitscharakter an, welcher dargelegt wird, indem Übereinstimmung mit bestimmten Regeln besteht.[145] Als Lehrperson muss man den Schüler/innen *vormachen* wie algebraische Notationen *gebraucht* werden, damit Handlungsweisen mit Gleichung-

[144] (Ramharter & Weiberg, 2014) S.36.
[145] Vgl. ebd. S.19.

en, Termen oder Variablen eingeübt werden. So beschreibt es auch Wittgenstein im Paragraph 208:

> „Wer aber diese *Begriffe* noch nicht besitzt, den werde ich die Worte durch *Beispiele* und durch *Übung* gebrauchen lehren. – Und dabei teile ich ihm nicht weniger mit, als ich selber weiß […]
> Ich mach`s ihm vor, er macht es nach; und ich beeinflusse ihn durch Äußerungen der Zustimmung, der Ablehnung, der Erwartung, der Aufmunterung […]“[146]

In diesem Sinne bietet der Öffentlichkeitscharakter des Sprachgebrauchs bzw. die Reglementierung der Sprachpraxis eine besondere Perspektive auf das Lehren und Lernen, was aber auch gleichzeitig anderen Konzepten, wie Malle (1993) beispielsweise mit dem Ansatz der Kognitionspsychologie (im Kapitel *Die algebraische Notation*) verfährt, eine gewisse Absage erteilt: Verwendungsweisen in der Mathematik entstehen nicht eigenständig, Schüler/innen sind auch nicht ab einen gewissen Alter fähig, algebraische Notationen selbst zu entwickeln und zu begreifen. Malle (1993) betont, dass es Konventionen sind, die im Unterricht aufgegriffen und im kommunikativen Prozess thematisiert werden müssen.

Wie sehr nicht nur das anfängliche Erlernen, sondern auch das konkrete Anwenden von mathematischen Prinzipien in Zusammenhang mit der Sprachpraxis und Reglementierung steht, kann im zweiten Irrtum der Erklärungsideologie gesehen werden.

Irrtum 2: *Wer das Prinzip verstanden hat, kann es in jedem Einzelfall anwenden.*

Sind Schüler/innen in der Lage, wenn man ihnen abstrakte Beschreibungen von Gleichungslösungsprozessen bis ins Detail *erklärt*, konkrete Aufgaben zu lösen und damit fähig, Anwendungen von allgemeinen Prinzipien auf konkrete Aufgabenstellungen zu transferieren?
Malle (1993) sieht ein Missverständnis darin, ausgehend von dem Glauben, alles bis ins Detail *erklären* zu können, dass Erklärungen auf einem höheren Abstraktions-

[146] (Wittgenstein, 1971) S.107f.

niveau das Lösen und Arbeiten mit Gleichungen und Variablen dahingehend vereinfachen, dass Prinzipien abstrakter Natur auf konkrete Fälle problemlos angewendet werden können. Abstrakte Regeln wie etwa $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$ als allgemeine Prinzipien einzusehen scheint in den meisten Fällen für Schüler/innen trivial zu sein, nicht trivial wird es aber, wenn solche Regeln auf konkrete vorgelegte Beispiele angewendet werden sollen (da muss man sich entscheiden, was A, B bzw. C entsprechen soll).[147]

Damit wir den Bogen zwischen dem zweiten Irrtum der Erklärungsideologie und Wittgenstein`s Sprachauffassung schlagen können, erinnern wir uns an den Handlungscharakter des Sprachgebrauchs. Im Unterricht entspricht das Regelfolgen einer Praxis bzw. einer Gepflogenheit, die eben in Verbindung mit erlernten und geübten Techniken steht. Wenn man sich also in eine Befolgung von (algebraischen) Regeln „einübt“ oder auf sie „abgerichtet“ wird, so geschieht dies für abstrakte algebraische Prinzipien genauso wie auch für konkrete Beispiele mit Gleichungen, Äquivalenzumformungen oder Variablen.

Die von Malle (1993) angesprochene Schwierigkeit des Überganges von abstrakten Strukturen auf konkrete Beispiele könnte in diesem Sinne aus der Tatsache resultieren, dass Techniken nicht genügend eingeübt sind bzw. Regeln nicht angewendet werden, da diese nicht ausreichend thematisiert oder eben noch nicht *abgerichtet* worden sind.

Es geht nicht darum abstrakte Prinzipien immer wieder zu *erklären*, zu *diskutieren* oder zu *hinterfragen*, vielmehr sollte den Schüler/innen *vorgezeigt* werden, wie konkrete Beispiele zu lösen sind. Dabei werden die Schüler/innen üblicherweise nicht bezweifeln, dass der Lehrer oder die Lehrerin recht damit hat, sondern eher unhinterfragt Annehmen und Auswendiglernen.[148] Wir lernen also algebraische Ausdrücke nicht, in dem man uns *erklärt*, wie sie „funktionieren“, sondern wir lernen einer Regel zu folgen, wie wir jene algebraischen Ausdrücke zu verwenden haben.[149]

[147] Vgl. (Malle, 1993) S.29.
[148] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.41f.
[149] Vgl. (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.43. Zugriff am 04.02.2016.

Irrtum 3: ***Was klar und sauber erklärt wird, wird als sinnvoll erkannt.***

Der dritte Irrtum betrifft das „Begriffschaos“, welches wie bereits oben erwähnt eine abrupte Einkehr in die elementare Algebra der sechziger Jahre fand. Wenn eine triviale Gleichung wie $x = 7$ mit einer Fülle metasprachlicher Begriffe („Aussageform“, „Grundmenge“, Lösungsmenge“ usw.) erläutert wird, mag es zwar sein, dass sich Begriffe dadurch „einfacher“ demonstrieren lassen, aber begreifen Schüler/innen tatsächlich dadurch den Sinn des Ganzen besser? Wozu betrachten wir Gleichungen? Wozu die ganze Theorie?[150]

Malle (1993) sieht offensichtlich ein Problem darin, davon auszugehen, dass Schüler/innen den Sinn von Gleichungslösen besser verstehen, wenn ihr bereits erlerntes Vorgehen zusätzlich mit recht unmotivierten metasprachlichen Begriffen „angehäuft“ wird. Jene Begriffe machen letztendlich das Lösen von Gleichungen nicht sinnvoller, sondern wirken eher „aus der Luft gegriffen“ und „aufgezwungen“, was zusätzlich das Arbeiten mit Gleichungen erschweren kann. Man könnte also sagen, dass Schüler/innen sich in diesem Begriffschaos nicht zurechtfinden, da sie noch nicht den Gebrauch verinnerlicht haben, wie diese neuen Wörter in der Praxis anzuwenden sind.

Ähnlich kann man auch diese sprachliche Problematik in Wittgenstein`s Richtung lenken: Der Vorgang, wie beispielsweise mit Gleichungen umgegangen werden soll, muss zugänglich sein, man muss sich also mit etwas befassen, mit dem man umgehen kann, im wörtlichen und übertragenen Sinn. Wenn also die Lehrperson erreichen will, dass Schüler/innen beim Gleichungslösen gewisse Begriffe *verwenden*, dann muss dieser Umstand auch zum Thema gemacht werden, d.h. sie muss den Lernenden *vormachen*, wie diese Begriffe anzuwenden sind, sozusagen eine Regel thematisieren, die diesen Umstand beschreibt.[151] Durch Regeln befolgen, lernen wir, wie Wörter *funktionieren* und wie wir die Wörter zu *verwenden* haben:

> „[…] Und gerade so erklärt man etwa, was ein Spiel ist. Man gibt Beispiele und will, daß sie. [sic!] in einem gewissen Sinn verstanden werden. – Aber mit

[150] Vgl. (Malle, 1993) S.29.

[151] Vgl. (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.50. Zugriff am 04.02.2016

> diesem Ausdruck meine ich nicht: er solle nun in diesen Beispielen das Gemeinsame sehen, welches ich – aus irgendeinem Grunde – nicht aussprechen konnte. Sondern: er solle diese Beispiele nun in bestimmter Weise *verwenden*. Das Exemplifizieren ist hier nicht ein *indirektes* Mittel der Erklärung, – in Ermanglung eines Besseren. […] *So* spielen wir eben das Spiel. (Ich meine das Sprachspiel mit dem Wort »Spiel«.)“[152]

Man kann Schüler/innen Wörter und Regeln nicht *erklären*, sondern letztendlich muss man ihnen den *Gebrauch* vormachen, in dem man ihnen den Umgang anhand von Beispielen zeigt[153]: „Die Kinder werden dazu erzogen, *diese* Tätigkeit zu verrichten, *diese* Wörter dabei zu gebrauchen, und *so* auf die Worte des Anderen zu reagieren.“[154] Mit den Worten „Aussageform“, „Grundmenge“, „Lösungsmenge“ an sich ist noch nichts erklärt oder verständlich gemacht. Man muss den Schüler/innen demonstrieren, wie „diese“ Worte im üblichen Sprachgebrauch verwendet werden.

Hier wird ein weiterer Aspekt des Regelbefolgens klar: Regeln sprechen nicht für sich selbst, denn man könnte Regeln durchaus anders deuten oder nicht verstehen. Mit anderen Worten: Es kommt darauf an, wie wir abgerichtet werden, was gleichzeitig bedeutet, dass ein anderer Unterricht ein völlig anderes Handeln oder eben Regelbefolgen zur Folge hätte.[155]

Es sei noch angemerkt: Beim Regelbefolgen geht es weniger um das Regeldeuten, oder um eine Suche nach etwas, das noch hinter den Regeln steht, das über das Befolgen hinausgeht. Vielmehr geht es Wittgenstein um die Praxis, also um das Beherrschen einer Technik und deren Anwendung. So verhält es sich auch üblicherweise mit dem Regelbefolgen und dem Verstehen einer Regel im Schulunterricht: Eine Lehrperson wird sich nicht mit einer Schüleraussage, wie „ich habe die Regel nun verstanden“ zufrieden geben, sondern er oder sie wird verlangen, dass der Schüler die Regel anwendet.[156] Wittgenstein leugnet zwar nicht, dass seelische Zustände im Zusammenhang mit dem Regelbefolgen stehen, sieht sie aber nicht als

---

[152] (Wittgenstein, 1971) §71, S.51.
[153] Vgl. (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.44. Zugriff am 04.02.2016.
[154] (Wittgenstein, 1971) §6, S.15.
[155] Vgl. (Ramharter & Weiberg, 2014) S.20.
[156] (Ramharter & Weiberg, 2014) S.45 – 47.

zentrales Moment des Regelbefolgens, sondern er weist lediglich auf ihren „Status als Begleiterscheinung“[157] hin.

Irrtum 4*: Man kann alle Eventualfälle in der Theorie vorweg klären.*

Anhand des vierten Irrtums[158] vergegenständlicht Malle (1993) den Umstand, dass Schüler/innen bei Textaufgaben oft Antworten angeben, die in der außermathematischen Realität wenig Sinn ergeben, wie z.B.: „Der Turm ist $-8\ m$ hoch“.[159]
Dem Formulieren derartiger „Absurditäten“ könne, laut gewissen Ansätzen, durch die Orientierung an Begriffen wie Grundmenge G , Lösungsmenge L und der Beziehung $L \subseteq G$ entgegengesteuert werden. Um eben jene „realitätsfremde“ Fehler zu vermeiden, werden Schüler/innen dazu angehalten, in Aufgabenstellungen die Grundmenge G sowie die Lösungsmenge L einzuführen, um schließlich deren Beziehung $L \subseteq G$ zu überprüfen. Diese Vorgehensweise würde sie dann zu kritikfähigen Menschen erziehen, da letztendlich die Überprüfung der Beziehung $L \subseteq G$ die Aufmerksamkeit auf die Verträglichkeit des Ergebnisses mit dem Kontext gerichtet wird.

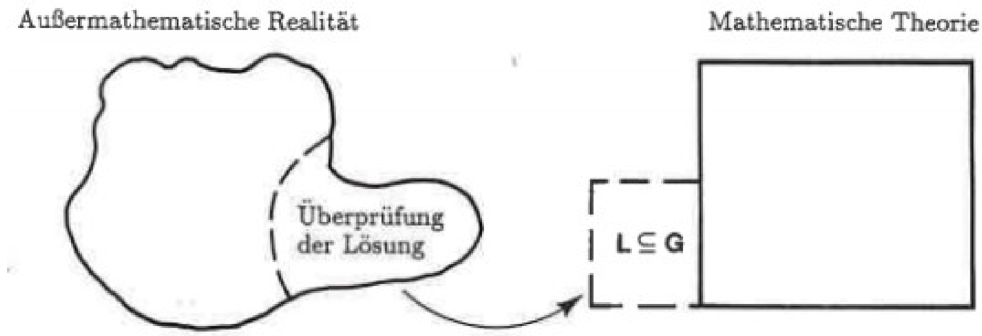
Malle (1993) zweifelt an diesen Theorien und argumentiert in zweierlei Hinsicht: Seine erste Kritik richtet sich an die einzuführende Grundmenge G, die ja in manchen Textaufgaben nicht angegeben wird, was gleichzeitig bedeutet, dass Schüler/innen die Grundmenge G selbst finden und angeben müssen. An dieser Stelle fragt man sich vermutlich: Was ist eine sinnvolle Grundmenge für die Turmhöhe?
Die Menge $\mathbb{R}$ kann es nicht sein, da negative Zahlen als Turmhöhe wohl kaum in Frage kommen; die Menge $\mathbb{R}^+$ vermutlich auch nicht, da Turmhöhen wie $\sqrt{2}$ oder 10^{13} eher wenig Sinn ergeben; nicht besser schaut es mit der Menge $\mathbb{Q}^+$ aus, da 2,894727745611002 als Turmhöhe wohl kaum der Realität entspricht. Soll man vielleicht weniger Kommastellen zulassen? Ist vielleicht die Menge $\{0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; \dots\}$ besser?
Letztendlich können alle diese Fragen nur anhand der außermathematischen Situationen entschieden werden, was aber gleichzeitig bedeutet, dass es doch einfacher

[157] (Ramharter & Weiberg, 2014) S.46.
[158] Vgl. (Malle, 1993) S.29-31.
[159] Vgl. ebd. S.29ff.

wäre, von Beginn an die erhaltene Lösung an der jeweiligen Situation zu überprüfen und sich erst dann Überlegungen zu machen, wie genau die Lösung anzugeben wäre.
Ebenfalls sieht Malle (1993) ein Problem dahingehend, dass die Überprüfung der Beziehung $L \subseteq G$ Schüler/innen angeblich zur Kritikfähigkeit erzieht: Beim Gleichungslösen wird lediglich eine Reihe von Punkten (Grundmenge G aufstellen, Gleichung lösen, Lösungsmenge L hinschreiben) abgearbeitet, wobei mit der Prüfung $L \subseteq G$ einfach nur ein weiterer Punkt hinzugefügt wird. Man stelle sich dann die Situation vor, wenn Schüler/innen die selbst aufgestellte Grundmenge G von Anfang an sinnlos gewählt haben und dadurch ebenfalls die erhaltende Lösung L sinnlos wird, obwohl $L \subseteq G$ erfüllt ist.

Nach Malle (1993) wird das Überprüfen der erhaltenden Lösung an der außermathematischen Realität lediglich umgewandelt in die Überprüfung der Beziehung $L \subseteq G$, d.h. die Grenze zwischen außermathematischer Realität und Theorie wird lediglich verschoben, aber niemals aufgehoben, wie an folgender Abbildung zu sehen ist:

Abbildung 5: Verschiebung der außermathematischen Realität in mathematische Theorie



[Quelle: Malle, Günther: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. S.31.]

Ramharter (2002) befasst sich ebenfalls in ihrem Aufsatz *Wie alt ist der Kapitän wirklich? – Über die Bewährung der Mathematik an der Realität oder Wittgenstein, Regeln und der Mathematikunterricht* mit der Annahme, Aufgaben haben sich an der außermathematischen „Realität" zu bewähren. Den Einstieg bilden dabei zwei Beispiele, von denen wir uns bestimmte Antworten bzw. ein gewisses Auffinden von Antworten erwarten, wenn Schüler/innen im Mathematikunterricht damit konfrontiert werden:

> **Beispiel 1**: Auf einem Schiff sind 36 Schafe. Davon fallen 10 ins Wasser. Wie alt ist der Kapitän?[160]
>
> **Beispiel 2:**
> A: Das Produkt des Alters meiner drei Schwestern ist 36.
> B: Jetzt weiß ich aber nicht, wie alt deine Schwestern sind.
> A: Die Summe ihrer Alter ist gleich der Hausnummer des Hauses, vor dem wir gerade stehen.
> B: Das genügt mir nicht.
> A: Die älteste hat rote Haare.
> Darauf sagt B, wie alt die drei Schwestern sind. Kannst Du das auch?[161]

Schauen wir uns zunächst die Lösungen[162] der Beispiele an. Oberflächlich betrachtet sehen sich die Beispiele recht ähnlich: Das Schicksal der Schafe und das Alter des Kapitäns aus dem ersten Beispiel, haben genauso wenig miteinander zu tun, wie das Alter der Schwestern mit einer Hausnummer und der roten Haarfarbe der älteren Schwester im zweiten Beispiel. Was vermutlich mehr erstaunt, ist der Umstand, dass es für das zweite Beispiel eine Antwort gibt, für das erste aber nicht. Erhalten wir die Antwort im zweiten Beispiel, indem wir den mathematischen Sachverhalt an unserer Erfahrung messen? Oder vielleicht liegt es eher daran, dass im ersten Beispiel kein mathematischer Sachverhalt vorliegt, im zweiten jedoch schon?

Das erste Beispiel wurde teilweise von über 75 Prozent der Schüler/innen verschiedener Schulstufen mit der Rechnung „Subtraktion der Anzahl der ins Wasser gefallenen Schafe von der Anzahl der ursprünglichen Schafe beantwortet". In manchen Fällen werden solche Aufgaben, also ähnlich wie das Kapitänsbeispiels, auch

[160] (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.37. Zugriff am 04.02.2016.
[161] Ebd. S.39.
[162] Lösung von Beispiel 2 im Anhang.

als Scherzfragen verwendet, um dann den ratlosen Befragten die Antwort zu unterbreiten: „56, ich habe ihn gefragt“. Antworten dieser Art erachten wir aber im Kontext Mathematikunterricht für unzulässig. Mit der Antwort „zwischen 10 und 150“ wäre man zwar im Sinne der Realität ausreichend abgesichert und mathematisch nicht unkorrekt, dennoch möchten Mathematiker/innen folgendes hören: „Es gibt keine (eindeutig bestimmte) Antwort aufgrund dieser Angaben“.[163]

Was bedeutet vor dem Hintergrund dieser Beispiele „eine Antwort finden“? Ramharter (2002) zeigt mit diesen Beispielen auf, dass der viel geforderte Realitätsbezug, ausgehend von zahlreichen didaktischen Ansätzen in der Mathematik, offensichtlich kein Kriterium dafür sein kann, dass man zwischen den beiden Beispielen differenzieren kann. Was vermutlich viele Leser/innen beeindruckt und insbesondere Mathematiker/innen reizt, ist ja gerade der Umstand, dass im zweiten Beispiel mathematische Zusammenhänge hinter einer realitätsnahen Fassade verborgen liegen und dadurch vermeintlich untypische Phrasen zum Träger mathematischer Informationen werden.[164]
Wie lässt sich das Auffinden der Lösungen, also das Vorgehen im ersten und zweiten Beispiel, charakterisieren? Warum gelten manche Antworten mathematisch gesehen als erwähnenswert und korrekt, und manche als unerwünscht? Vor welchem Hintergrund muss sich das Lösen von Mathematikaufgaben bzw. Antworten in der Mathematik rechtfertigen?

Kommen wir auf das erste Beispiel zurück: Nun werden wir die Aufgabe zu einem mathematischen korrekten Sachverhalt „ummodeln“, indem wir einen einzigen Satz einfügen:

> **Beispiel 1***: Auf einem Schiff sind 36 Schafe. Davon fallen 10 ins Wasser. Du erhältst das Alter des Kapitäns, indem Du die Anzahl der ins Wasser gefallenen Schafe von der ursprünglichen Anzahl der Schafe subtrahierst. Wie alt ist der Kapitän?[165]

[163] Vgl. (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.39. Zugriff am 04.02.2016.
[164] Vgl. ebd. S.40.
[165] (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.42. Zugriff am 04.02.2016.

Wie wir nun diese Aufgabe zu lösen haben, zeigt uns der hinzugefügte Satz, was auch gleichzeitig bedeutet, dass wir einer Anweisung (Anzahlen der Schafe zu subtrahieren), also einer bestimmten Regel folgen. Regeln dieser Art fungieren sozusagen als Sprachsteuerungsmechanismus, welche nicht nur für das Kapitänsbeispiel, sondern genauso allgemein betrachtet, gewinnbringend für viele Situationen im Mathematikunterricht, thematisiert werden können.[166] Für das Lernen der mathematischen Sprache sind Realitätsbezüge aus der Erfahrungswelt der Kinder in vielerlei Hinsicht nicht hinreichend, sondern Beispiel 1* und Beispiel 2 (und etliche mehr) zeigen uns, „wie die Regeln, die die Sprache beherrschen, zu verwenden sind“[167].

Was das für den Lernprozess in der Mathematik bedeutet, fasst Ramharter (2002) mit folgenden Worten zusammen:

> „Die für das Lernen von Mathematik dringlichste Art der Bewährung an der Realität besteht nicht darin, dass Angaben und Ereignisse auf die Alltagswelt bezogen werden müssen, sondern darin, dass sich die das Vorgehen beherrschenden Regeln an den (sprachlichen) Vorgegebenheiten zu bewähren haben.“[168]

Die Betonung in diesem Zitat liegt bei der Thematisierung von Regeln und nicht bei der trivialen Einbettung der Mathematik in einen vorgegebenen Kontext. „Es geht nicht darum, sich daran zu stoßen, wenn das Ergebnis einer Rechnung ein [-8 m hoher Turm] ist, sondern es ist entscheidend, dass [Höhen von Türmen] dazu geeignet sind, mit ihnen prinzipiell in gewissen Weisen zu operieren.“[169]

Allem Anschein nach versucht gerade auch Malle (1993), auf die Thematisierung von Regeln einzugehen, wenn er schreibt, dass es sich beim Gleichungslösen lediglich um das „Abarbeiten“ von Punkten (Grundmenge G aufstellen, Gleichung lösen, Lösungsmenge L hinschreiben) handle. Hierbei wird den einzelnen Regeln, die es beim Gleichungslösen zu folgen gilt, eine weitere Regel, nämlich die Prüfung $L \subseteq G$, hin-

---

[166] Vgl. (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.43. Zugriff am 04.02.2016.
[167] Ebd. S.43.
[168] Ebd. S.45.
[169] Ebd. S.46.

zugefügt. In dem Sinne werden Schüler/innen nicht zur Kritikfähigkeit erzogen, sondern es wird von ihnen lediglich gefordert, so zu handeln, wie man dies eben mit Gleichungen tut.

5.4. Variable im Sprachspiel

Bevor wir uns dem „Sprachspiel der Variablen“ und dem „Thematisieren von Regeln“ widmen, erinnern wir uns nochmal an das Zitat von Malle (1993), welches das Kapitel *Die Variable*[170] „eröffnet“ hat.

Auf die Frage „Was sind Variable?“, entgegnet Malle (1993), dass es eher schwierig sei, eine zufriedenstellende Antwort zu finden, da der Variablenbegriff zu schillernd und aspektreich sei. Malle (1993) stellt außerdem fest, dass in der mathematischen Literatur Variable meist nur *verwendet* und nicht *definiert* werden und er weist insbesondere auf den Umstand hin, dass Definitionen im Allgemeinen nicht den Variablenbegriff vollständig erfassen, da sie immer nur *einen* Aspekt der Variable hervor heben würden.[171]

Ebenfalls wurde in demselben Kapitel thematisiert, dass sich der Variablenbegriff nicht auf einen *eindeutigen* Gebrauch eingrenzen lässt, da er vielseitig einsetzbar ist. Dieser Umstand erschwert jedoch das Verständnis von Variablen, da Schüler/innen lernen müssen, sich in dieser Bedeutungsvielfalt zurechtzufinden.

Diese Überlegungen können wir ebenfalls im „Sprachspiel der Variable“ aufgreifen: Mit einer Definition kann nur ein Aspekt des Variablenbegriffs hervorgehoben werden, denn eine Definition eines Begriffes kann als „nur“ *eine* in einem Sprachspiel eingebettete angesehen werden. Eine Definition dient, wie im Kapitel *Definition als ein Sprachspiel* hervorgehoben, „nur“ als *Vorbereitung* zum *Gebrauch* der Variable. Sowie in der mathematischen Literatur Variable nicht definiert, sondern *verwendet* werden, so empfiehlt auch Wittgenstein den „Vorgang des Gebrauchs von Worten“ und die damit „verwobenen“ Tätigkeiten. In diesem Sinne gilt unser Interesse weniger der, meiner Meinung nach nicht beantwortbaren, Frage „Was ist eine Variable?“, sondern vielmehr der Frage „Wie gebrauchen wir Variablen?“.

[170] Siehe S.49.
[171] Vgl. (Malle, 1993) S.44.

Mit einer Definition können wir uns nicht erklären, wie Variable im allgemeinen zu verwenden sind, sondern wir *gebrauchen* Variable je nach Aufgabenstellung und Kontext. In dem Kapitel *Variablenkonzepte* hat uns Malle (1993) Möglichkeiten gezeigt, wie Variable zu verwenden sind: als „unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl“ (**Gegenstandsaspekt**), als „Platzhalter“ (**Einsetzungsaspekt**) oder als „bedeutungslosen Zeichen“ (**Kalkülaspekt**). Mit dem Beispiel des Mittelwerts $m = \frac{x+y}{2}$ illustrierte Malle (1993) insbesondere, dass diese Aspekte bei algebraischen Ausdrücken gleichzeitig auftreten können.

Im Sprachspielkontext sind es gerade diese Aspekte (und natürlich etliche mehr), die die „Mannigfaltigkeit“ der Sprache mit Variablen kennzeichnen. Wenn Schüler/innen lernen sollen, sich in der Bedeutungsvielfalt von Variablen zurechtzufinden, dann müssen die „Bedeutungen“ auch zum Thema gemacht werden, d.h. es müssen Regeln *thematisiert* werden, wie Variable zu verwenden sind. Die verschieden Aspekte werden dann zu *Regeln* oder „Wegweisern“, die den Gebrauch von Variablen in eine Richtung lenken, sodass Schüler/innen demonstriert wird, dass *ein* Konzept von Variable nicht beliebig *verwendet* werden kann.
Regeln, die im Unterricht angesprochen werden, sind in diesem Sinne jene, die sich im Laufe der Geschichte bewährt haben, d.h. es geht auch darum, in Übereinstimmung mit der Mehrheit zu sein. Die Verwendung von Variablen muss daher streng regelgebunden und gewohnheitsmäßig erfolgen.[172] Beim Regelbefolgen ist es nicht von Bedeutung, dass man *glaubt*, rechnen zu können, sondern es geht vielmehr darum, ob jemand „tatsächlich – d.h. unseren Regeln gemäß – richtig rechnet“[173], welches das Regelbefolgen als ein Praktizieren ausweist.

[172] Vgl. (Brunner, 2015) S.10ff.
[173] (Ramharter & Weiberg, 2014) S.27.

5.4.1. Thematisieren von Regeln

Ramharter (2002) schreibt in ihrem Aufsatz *Wie alt ist der Kapitän wirklich? – Über die Bewährung der Mathematik an der Realität oder Wittgenstein, Regeln und der Mathematikunterricht* über das Regel-Thematisieren. Der Vorgang, wie Regeln im Unterricht thematisiert werden können, lautet:

> „Mit ‚thematisieren' meine ich weder, eine möglichst präzise formale Fassung einer Regel (etwa, wann man kürzen darf) anzugeben, noch das unreflektierte Wiederholen oder wiederholte Anwenden einer Regel. ‚Thematisieren' soll vielmehr z.B. heißen, einen gemeinsamen Sprachgebrauch für das entwickeln, was man üblicherweise ‚aus einer Summe kürzen' nennt, oder das Nullsetzen der ersten Ableitung in einem Extrembeispiel als einen bewussten und interpretierbaren Schritt in einem von den Schüler/innen *formulierbaren* Ablaufplan der Bearbeitung von Extrembeispielen zu identifizieren.[174]

In diesem Sinne bedeutet das Thematisieren von Regeln nicht mehr Schema, Kalkül, oder Routine, sondern den Schüler/innen soll klar gemacht werden, „*dass* es überhaupt eine *Regel* gibt, der es zu folgen gilt und dass man lernen muss, sich darüber zu verständigen, wie diese Regel funktioniert"[175].
Ramharter (2002) betont ebenfalls, dass mit der Thematisierung von Regeln das Verständnis von Mathematik insofern gefördert wird, als Schüler/innen lernen, sich zu beobachten und vor allem lernen „ihr Tun zu artikulieren"[176].

Vor diesem Hintergrund möchte ich den Leser oder die Leserin nochmals auf jene Interviews aufmerksam machen, die im Kapitel *Ein weiterer Gesichtspunkt: Die Variable und der Veränderlichenaspekt* angeführt wurden. In diesem Interview ging es um die Aufgabenstellung: Wie ändert sich in der Formel $z = \frac{x}{y}$ das z, wenn x verdreifacht wird?

---

[174] (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.48. Zugriff am 04.02.2016.
[175] Ebd. S.48.
[176] Ebd. S.48.

Für unsere weiteren Untersuchungen schauen wir uns zunächst einmal die verallgemeinerte Form dieser Fragestellung an:

> „Gegeben ist die Formel $z = \frac{x}{y}$. Wie ändert sich z, wenn x wächst?“[177]

Malle (1993) stellt fest, dass Schüler/innen häufig diese Frage folgendermaßen beantworten: $z < \frac{x}{y}$. Eine Schülerin begründet dann dieses Vorgehen mit folgenden Worten:

> „Tja also, wenn x wächst, stimmt das „ist gleich“ schon nicht mehr und da x größer wird, wird z kleiner, also $z < \frac{x}{y}$.“[178]

Es sei bemerkt: Um diese Aufgabe lösen zu können, genügt es nicht nur, den *Veränderlichenaspekt* von Variablen verstanden zu haben, sondern man benötigt insbesondere ein Wissen, das darüber hinausgeht. In diesem Sinne sind es zwei *Regeln*, die stillschweigend vorausgesetzt werden: Zum Einen, dass y konstant gehalten wird (was die Schülerin allem Anschein nach begriffen hat), zum Anderen muss man wissen, wie die Aufgabe eigentlich gemeint ist. Malle (1993) formuliert dies folgenderweise:

> „Auch wenn x wächst, soll *die Gleichheit bestehen* bleiben und die Auswirkungen auf z untersucht werden. Dieses Wissen geht [der Schülerin] offenbar ab. Es ist auch gar nicht selbstverständlich, es muß – wie vieles andere in der elementaren Algebra – erlernt werden und viele Kinder kommen nicht von selbst drauf.“[179]

Dass Schüler/innen beim Betreiben von Mathematik nicht von selbst auf „Dinge“ kommen, haben wir bereits im ersten Irrtum *Saubere Erklärungen ersetzen eigenes Tun* thematisiert. Worauf ich nun hinaus will, hat vielmehr damit zu tun, dass wenn wir Sprache durch „Nachahmen“ im Sinne Wittgenstein`s lernen müssen, sich auch

---

[177] (Malle, 1993) S.87.
[178] Ebd. S.87.
[179] Ebd. S.87.

insbesondere die Sichtweise auf Fehler verändert. Auf welche Weise Fehler dann gesehen werden können, fasst Ramharter (2002) so zusammen:

> „Fehler sind dann Verstöße nur insofern, als wir nicht der Intention dessen, der uns etwas vormacht, entsprechend handeln, aber sie bedeuten nicht, dass wir etwas nicht wissen, was wir wissen *müssen*."[180]

Bei Fehlern geht es also nicht darum, sich daran zu stoßen, dass Schüler/innen etwas nicht *wissen*, was grundsätzlich von ihnen erwartet wird, sondern Fehler entstehen, weil Schüler/innen anders handeln, d.h. *anderen* Regeln folgen, als es von ihnen erwartet wird.[181] In diesem Sinne schafft diese veränderte Sicht auf Fehler die Möglichkeit einer didaktischen oder gar pädagogischen Intervention für Lehrpersonen: Damit Schüler/innen nicht geneigt sind, anderen Regeln zu folgen, könnten Fragestellungen wie oben angeführt transparenter gemacht werden, d.h. Regeln als „Wegweiser" sollen *angesprochen* und *thematisiert* werden. Schüler/innen soll durch einen artikulierten Sprachgebrauch *vorgemacht* werden, wie ein Beispiel gemeint ist.

Aufgaben wie das Kapitänsbeispiel (Kapitel 5.3., vierter Irrtum) haben uns aber auch gezeigt, dass Schüler/innen nicht nur *anderen* Regeln folgen, sondern auch eine Regel (wie im **Beispiel 1***) – eben etwa aus Gewohnheit – *dazu* denken. Aber kann das wirklich so unzulässig oder sogar „dumm" sein?[182] Von Fragestellungen, wie „Gegeben ist die Formel $z = \frac{x}{y}$. Wie ändert sich z, wenn x wächst?" erwarten manche Lehrpersonen stillschweigend von ihren Schüler/innen, meist ohne zu artikulieren, dass sie nach der Aufforderung „Untersuche die Auswirkungen auf z, wenn x wächst" von alleine die *Regel* „aber gleichzeitig soll *die Gleichheit bestehen* bleiben" dazu denken.

In manchen Beispielen, aus denen „klar" hervorgeht, dass x berechnet werden muss, wird häufig von manchen Lehrer/innen oder sogar Büchern der Satz „Berechne x" am Ende weggelassen, weil es sich ja schließlich „von selbst" versteht, dass x

---

[180] (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.47. Zugriff am 04.02.2016.
[181] Vgl. ebd. S.47.
[182] Ebd. S.48.

berechnet werden muss. Hier wird ebenfalls erwartet, dass die entsprechende Regel „einfach“ dazu gedacht wird.[183]

Von Wittgenstein können wir lernen, *Regeln*, wie „Behalte die Identität bei!“ explizit zu thematisieren, d.h. derartige Regeln transparenter zu machen, indem Lehrpersonen sie auch *aussprechen*, damit Schüler/innen dementsprechend handeln, wie von ihnen erwartet wird.
Damit werden nicht nur unsere eigenen Gedankengänge als Lehrkräfte offensichtlicher, sondern vielleicht eröffnet eine konkrete Aufdeckung von *Regeln* den Lernenden auch die Möglichkeit ihr eigenes Handeln zu artikulieren. Die Schüler/innen lernen so auch, die Regeln *anzuwenden*.

Zur Verdeutlichung will ich noch zwei weitere ähnliche Beispiele angeben.

Aufgabe 1: 5 kg Kartoffeln kosten 2,50 Euro.
Aufgabenstellung: Gib an, wie viel 7,2 kg kosten![184]

Zu erfolgreichen Lösung dieser Aufgabe benötigt man folgende Hintergrundinformation bzw. Regel:
„Dies ist ein Schulbeispiel (Im Gegensatz zu einer bei einem realen Einkauf stattfindenden Preisstaffelung, bei der nicht unbedingt Linearität zu Grunde liegen muss). In diesem Kontext ist es üblich, dass Beispiele lösbar sind. Zusätzlich wird gerade oder wurde kürzlich im Unterricht *direkte Proportionalität* behandelt, diese Proportionalität ist für die Lösung der Aufgabe grundlegend.“

Aufgabe 2: An einer Universität gibt es Lehrende und Studierende. Auf eine(n) Lehrende(n) kommen 6 Studierende. Es soll L die Zahl der Lehrenden und S die Zahl der Studierenden bezeichnen.
Aufgabenstellung: Gib an, welche der folgenden Aussagen zutrifft![185]

A: $S = L + 6$
B: $S = 6L$

[183] Vgl. ebd. S.48f.
[184] Vgl. (Malle, 1993) S.123.
[185] Vgl. (Malle, 1993) S.1.

C: $\mathrm{L} = 6\mathrm{S}$

Hier ist die zu verwendende Regel zwar angegeben, wird aber oft missverstanden. Wichtig ist, dass L und S für die „Zahl der Lehrenden und die „Zahl der Studierenden“ steht, nicht für „die Lehrenden“ und „die Studierenden“.
Eine weitere, allgemeinere und darum wahrscheinlich bekanntere, Regel ist „Das Gleichheitszeichen fordert numerische Identität und ist kein Entsprechungszeichen.“
Daher kann durch Einsetzen konkreter Zahlen die Probe gemacht werden. Gilt beispielsweise $L = 100$ und $S = 6000$, gibt es also 100 Lehrende und 6000 Studierende, so wird durch Einsetzen klar, dass die Beziehung $L = 6S$ für diese Zahlen nicht gilt. Hier besteht die unausgesprochene Regel darin, die alltagssprachliche Formulierung „auf einen … kommen …“ (wobei das „kommen“ eine Entsprechung ausdrückt) gewissermaßen „umzudrehen“, so dass an Stelle das „kommt“ ein Gleichheitszeichen steht, womit also eine numerische Gleichheit ausgedrückt wird.

6. Conclusio

> „Ich möchte nicht mit meiner Schrift Anderen das Denken ersparen. Sondern, wenn es möglich wäre, jemand zu eigenen Gedanken anregen.“[186]

So wie Wittgenstein es im Vorwort seiner *Philosophischen Untersuchungen* beschreibt, soll auch meine Arbeit *zeigen*, wie Sprache oder die Sprache der Algebra *funktionieren* könnte.

Der geschichtliche Rückblick auf die algebraische Symbolsprache und die didaktischen Ausführungen von Malle (1993) haben uns nicht nur gezeigt, wie sehr sich der Variablenbegriff entwickelt hat und wie wir ihn üblicherweise in der Mathematik *verwenden*, sondern, dass eine eindeutige Festlegung des Variablenkonzepts zwangsläufig auf eine Engführung hinausläuft.[187] Mit der „Sprachspiel“-Idee können wir jener „primitiven Art der Sprache“[188] (*Gegenstandstheorie*) gegensteuern; wir können aufzeigen, dass Bedeutungen von Variablen in Verbindung mit deren Verwendung im konkreten Sprachspiel gesehen werden müssen. Dies scheint mir auch ein wichtiger Aspekt zu sein, wenn man die „Mannigfaltigkeit“ und den Wandel der algebraischen Sprachspiele im Unterricht aufgreifen und hervorheben möchte.

Dass das Betreiben von Mathematik oder das Arbeiten mit Variablen sich nicht von selbst *erklärt* oder sich zwangsläufig aus logischen Gründen Schüler/innen aufzwingt, scheint mir ein wichtiger Umstand zu sein, der im Unterricht aufgegriffen werden muss.[189] Mit Wittgenstein konzentrieren wir uns also nicht auf Fragen wie „Was *ist* eine Variable?“, sondern wir lenken unsere Aufmerksamkeit auf das „tatsächliche“ *Funktionieren* der Sprache, d.h. wir untersuchen, wie Variablen konventionell, also in gegenseitiger Übereinstimmung, gebraucht werden, da Sprache eben erst im *Gebrauch* ihre Funktion entwickelt. Wenn wir zeigen wollen, wie die algebraische Sprache funktioniert, müssen wir sozusagen nicht *erklären*, sondern *vormachen*, wie

[186] (Wittgenstein, 1971) S.11.
[187] Vgl. 4.2.1. Variablenaspekte, sowie 5.1. Entwicklung des Variablenbegriffs und zeitliche Dynamik
[188] Vgl. Kapitel 2.2. Benennen als Vorbereitung zum Gebrauch der Sprache
[189] Vgl. Kapitel 5.3. Sauberes Erklären vs. Befolgen einer Regel

Sprache *gebraucht* wird, damit Schüler/innen lernen, *Regeln* zu folgen, wie sie Variable zu *verwenden* haben. Vor diesem Hintergrund können wir ihnen dann anhand von *Beispielen demonstrieren*, wie Variable *verwendet* werden.

Damit Handlungsweisen mit Gleichungen, Termen oder Variablen eingeübt werden, verfolgen wir ein „Abrichten“, wie: „*Ich mach`s ihm vor, er macht es nach; und ich beeinflusse ihn durch Äußerungen der Zustimmung, der Ablehnung, der Erwartung, der Aufmunterung*“[190]. Es geht dabei aber nicht um ein unreflektiertes Wiederholen oder Nachahmen von Beispielen, sondern dem Schüler/der Schülerin soll bewusst werden, dass auch der mathematische Sprachgebrauch Regeln unterliegt, Regeln, die erfasst und letztlich angewendet sein wollen.[191] Man denke dabei an das anfängliche Lernen von Sprache[192]: Kinder werden *erzogen*, Wörter zu *gebrauchen*, indem sie eine Tätigkeit verrichten. Das Wort „Abrichten“ deshalb, weil Kinder in der Anfangsphase des Lernens eher bedenkenlos und ohne Zweifel lernen.

Definieren oder das „Saubere Erklären“ von mathematischen Begriffen sind metasprachliche Vorgänge, die dann ihren verlässlichen Charakter insofern verlieren, als sie „nur“ den Dingen einen Namen geben (ein klares Verständnis einer Definition setzt ja immer schon Vorwissen voraus).[193]

Wir haben auch gesehen, dass allgemeine algebraische Prinzipien nicht problemlos auf konkrete Beispiele transferiert werden können[194], genauso wenig erziehe ein Appell an Schüler/innen „ihren Hausverstand einzuschalten“ oder die Forderung nach mehr Realitätsbezug in Aufgaben zur mehr Kritikfähigkeit und einer besseren Lösungsstrategie[195]. Mehr Bewährung an der „Realität“ bedeutet nicht, Aufgaben an unserer Alltagserfahrung zu messen, sondern, dass wir lernen müssen, denjenigen Regeln zu folgen, die eben beim Operieren mit Variablen prinzipiell verwendet werden. Schülerfehler werden dann nicht auf das Fehlen eines – in diesem Falle also fälschlich – vorausgesetzten Wissen zurückgeführt, sondern Schüler/innen machen

---

[190] Vgl. Irrtum *1: Saubere Erklärungen ersetzen eigenes Tun.*
[191] Vgl*. Irrtum 3: Was klar und sauber erklärt wird, wird als sinnvoll erkannt.*
[192] Vgl. Kapitel 2.3.4 Handlungscharakter von Sprache
[193] Vgl. 5.2. Definieren als *ein* Sprachspiel
[194] Vgl*. Irrtum 2: Wer das Prinzip verstanden hat, kann es in jedem Einzelfall anwenden.*
[195] Vgl*. Irrtum 4: Man kann alle Eventualfälle in der Theorie vorweg klären.*

Fehler, weil sie *anderen* Regeln folgen oder sich andere Regeln *dazu denken*, oder mit der für diese konkrete Situation entsprechenden Regel noch nicht ausreichend vertraut sind.[196]

Wittgenstein lehrt uns zu begreifen, *Regeln*, die stillschweigend vorausgesetzt werden, zu thematisieren, d.h. einen gemeinsamen Sprachgebrauch zu entwickeln, indem Beispiele demonstriert und zugänglich gemacht werden, sodass Schüler/innen damit „umgehen" können.[197] Damit die Lernenden den üblichen *Gebrauch* von Variablen nicht nur als einen bewussten und interpretierbaren Schritt identifizieren, sondern auch erlernen, ihr eigenes „Tun" (mit Variablen) zu artikulieren, müssen sie verstehen, dass es überhaupt *Regeln* gibt, denen es zu folgen gilt und dass man sich darüber verständigen muss, wie diese *Regeln funktionieren*.[198]

[196] Vgl. Kapitel 5.4.1. *Thematisieren von Regeln*
[197] Vgl. (Ramharter E. , 2002) In: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf. S.50. Zugriff am 04.02.2016.
[198]Vgl. Kapitel 5.4.1. *Thematisieren von Regeln*

Literaturverzeichnis

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Alten, H.-W., Naini, A. D., Eick, B., Folkerts, M., Schlosser, H., Scholte, K.-H., et al. (Hrsg.). (2014). *4000 Jahre Algebra: Geschichte - Kulturen - Menschen.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik.* (R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand, Hrsg.) Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Brunner, M. (2015). Diagrammatische Realität und Regelgebrauch. In G. Kadunz, *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 9-30). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

Bundesministerium für Bildung und Frauen. (18. Februar 2016). Abgerufen am 14. Juli 2016 von Bundesministerium für Bildung und Frauen-Website: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?5h6vve

Dörfler, W. (2013). Was würden Peirce und Wittgestein zu Kompetenzmodellen sagen? In M. Rathbeg, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengink, N. Gregor, & G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess. Philosophische, Historische und Didaktische Perspektiven* (S. 73-88). Wiesbaden: Springer Spektrum Verlag.

Götz, S., Reichel, H.-C., Müller, R., & Hanisch, G. (2004). *Mathematik-Lehrbuch 5.* Wien: Österreichischer Bundesverlag .

H.G. Hoffmann, M. (11. November 2001). Abgerufen am 24. Januar 2016 von Universität Bielefeld-Website: http://www.uni-bielefeld.de/idm/semiotik/Hoffmann-Peirces_Zeichen.pdf

Kaiser, H., & Nöbauer, W. (1998). *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky Verlag.

Krämer, S. (1991). *Berechenbare Vernunft. Kalkül und Rationalismus im 17. Jahrhundert* (Bd. 28). (G. Patzig, S. Erhard, & W. Wieland, Hrsg.) Berlin, New York: Walter de Gruyter Verlag.

Kronfellner, M. (1997). Abgerufen am 25. Januar 2016 von Österreichische Mathematische Gesellschaft-Website: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1997%20Band%2027/Kronfellner1997.pdf

Liessmann, K., & Zenaty, G. (2004). *Vom Denken: Einführung in die Philosophie.* Wien: Braumüller Verlag.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache: zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht.* (Reichel, & Hans-Christian, Hrsg.) Öbv & Hpt Verlag.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlag.

Mayer, L., & Stanek, W. (2013). *Persönlichkeitsentwicklung und soziale Kompetenz.* Linz: Trauner Verlag.

Peiffer, J., & Dahan-Dalmedico, A. (1994). *Wege und Irrwege: Eine Geschichte der Mathematik.* Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag.

Ramharter, E. (2002). Abgerufen am 4. Februar 2016 von mathematica didactica. Zeitschrift der Didaktik der Mathematik-Website: http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2002/md_2002_1_Ramharter_Kapitaen.pdf

Ramharter, E., & Weiberg, A. (2014). *Die Härte des logischen Muß.Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Berlin: Parerga Verlag.

Römpp, G. (2010). *Ludwig Wittgenstein. Eine philsophische Einführung.* Wien: Böhlau Verlag.

Scholz, E. (1990). *Geschichte der Algebra. Eine Einführung.* Mannheim: BI-Wiss.-Verl.

Spierling, V. (2004). *Kleine Geschichte der Philosophie. 50 Porträts von der Antike bis zur Gegenwart.* München: Piper Verlag Gmbh.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule - Muster und Strukturen - Gleichungen - funktionale Beziehungen.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Vollrath, H.-J. (1987). Abgerufen am 15. Juli 2016 von Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg-Website: http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/vollrath/papers/046.pdf

von Savigny, E. (1998). *Klassiker Auslegen. Ludwig Wittgenstein. Philosophische Untersuchungen* (Bd. 13). (O. Höffe, Hrsg.) Berlin: Akademie Verlag.

Weischedel, W. (2005). *Die philosophische Hintertreppe. Die großen Philosophen in Alltag und Denken.* München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Wittgenstein, L. (1971). *Philosophische Untersuchungen.* (G. E. Anscompe, & R. Rhees, Hrsg.) Frankfurt am Main: suhrkamp taschenbuch Verlag.

Abbildungsverzeichnis

Anhang

Lösung von Beispiel 2:

A: Das Produkt des Alters meiner drei Schwestern ist 36.

$$x \cdot y \cdot z = 36$$

$$Mögliche\ Zerlegungen\ von\ 36\ in\ drei\ Faktoren\ sind\ dann:$$

$2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$	$4 \cdot 9 \cdot 1 = 36$
$2 \cdot 2 \cdot 9 = 36$	$6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$
$3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$	$1 \cdot 1 \cdot 36 = 36$

B: Jetzt weiß ich aber nicht, wie alt deine Schwestern sind.

A: Die Summe ihrer Alter ist gleich der Hausnummer des Hauses, vom dem wir gerade stehen.

B: Das genügt mir nicht.

$2 + 6 + 3 = 11$	$4 + 9 + 1 = 14$
$2 + 2 + 9 = 13$	$6 + 6 + 1 = 13$
$3 + 3 + 4 = 10$	$1 + 1 + 36 = 38$

$$Der\ Verweis\ auf\ die\ Hausnummer\ genügt\ B\ nicht,$$
$$um\ zu\ entscheiden\ wie\ alt\ die\ Schwestern\ sind, daher\ kommt\ nur$$
$$2 + 2 + 9 = \mathbf{13}\ und\ 6 + 6 + 1 = \mathbf{13}$$
$$in\ Frage, da\ alle\ anderen\ Zerlegungen\ paarweise\ verschieden\ sind.$$

A: Die älteste hat rote Haare.

$$Bei\ 2{,}2{,}9\ sind\ 2, 2\ Zwillinge\ und\ 9\ die\ älteste\ Schwester$$
$$Bei\ 1{,}6{,}6, ist\ 1\ die\ jüngere\ und\ 6{,}6\ die\ älteren\ Zwillingsschwestern$$
$$Da\ \boldsymbol{A}\ nur\ von\ \boldsymbol{der}\ ältesten\ Schwester\ spricht, muss\ diese\ eindeutig\ bestimmt\ sein,$$
$$d.h.\ 6{,}6{,}1, scheidet\ aus, und\ die\ Lösung\ lautet\ daher\ \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{9}.$$