Erdbahn, Erdrotation, Jahreszeiten und die Sonneneinstrahlung

Franz Embacher

Fakultät für Physik der Universität Wien
Didaktik der Astronomie, Sommersemester 2009
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/DidaktikAstronomie/ss2009/

1 Erdbahn und Erdrotation: Modellannahmen

Die Phänomene des Klimas auf der Erde, einschließlich des täglichen Wetters und der Abfolge der Jahreszeiten, und damit auch die Bedingungen für das Leben auf unserem Planeten, sind nicht nur irdischen Ursprungs, sondern werden in starkem Ausmaß von astrophysikalischen bzw. astronomischen Tatsachen beeinflusst: der Strahlungsleistung der Sonne, der Bewegung der Erde um die Sonne und der Eigenrotation der Erde. Wie spielen sie zusammen? Für eine erste Annäherung an diesen Themenkomplex reicht es aus, einige vereinfachende Annahmen zu treffen:

- Die Sonne wird als im Raum fixiert angenommen.
- Die Wirkung anderer Himmelskörper auf die Bewegung und Rotation der Erde wird vernachlässigt. (Das betrifft vor allem Mond, Jupiter und Saturn).
- Die Erde wird als (homogene) Kugel angenommen. Die Richtung der Achse ihrer Eigenrotation fällt mit jener des (zeitlich konstanten) Eigendrehimpulses zusammen.

Die Bewegung der Erde um die Sonne wird in diesem Modell durch die Keplerschen Gesetze[1] bestimmt. Zur bequemen mathematischen Beschreibung wird die xy-Ebene des räumlichen Koordinatensystems in die Bahnebene gelegt, und zwar so, dass die Sonne im Ursprung ruht. Weist der Drehimpuls $\vec{L}$ der Umlaufbewegung der Erde (der stets orthogonal zur Bahnebene steht) in die positive z-Richtung, so verläuft die Bewegung der Erde innerhalb der xy-Ebene im Gegenuhrzeigersinn. Die Bahnellipse ist in Polarkoordinaten[2] durch die Gleichung

$$r = \frac{(1-\varepsilon^2)\,a}{1+\varepsilon\,\cos\varphi} \tag{1.1}$$

[1] Siehe dazu auch den Text "Die Keplerschen Gesetze" unter http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/DidaktikAstronomie/ss2009/.

[2] Sie sind durch $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ definiert.

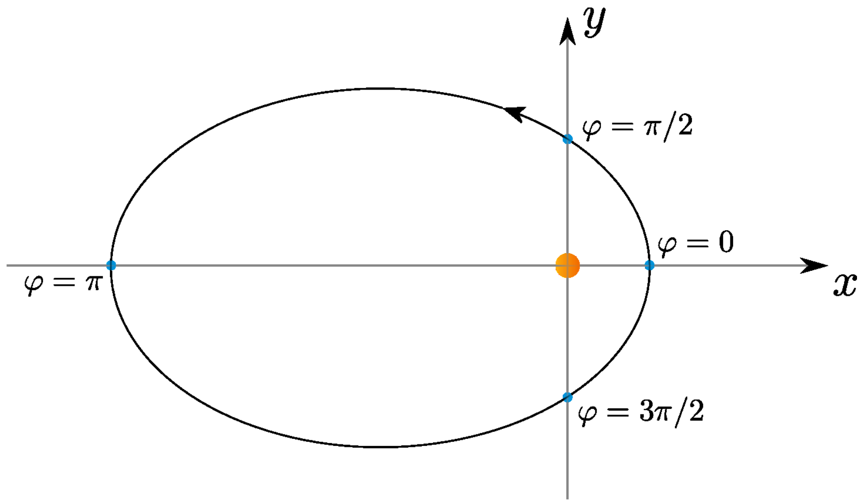

Abbildung 1: Die durch (1.1) gegebene elliptische Umlaufbahn der Erde um die Sonne (Exzentrizität stark überhöht).

gegeben, wobei a die große Halbachse und ε die (numerische) Exzentrizität bezeichnet. Der Winkel φ, unter dem die Erde von der Sonne aus relativ zur positiven x-Achse gesehen wird, heißt *Azimut*. Das Perihel (der sonnennächste Punkt) liegt auf der positiven x-Achse und entspricht dem Wert $\varphi = 0$, das Aphel (der sonnenfernste Punkt) liegt auf der negativen x-Achse und entspricht dem Wert $\varphi = \pi$. Die Bewegung der Erde verläuft in die Richtung mit zunehmendem φ (siehe Abbildung 1). Ein kompletter Umlauf (von einem Periheldurchgang zum nächsten) entspricht dem Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Generell kann φ *beliebige* reelle Werte annehmen, wobei zwei φ-Werte, deren Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, identifiziert werden. Das zweite Keplersche Gesetz kann unter Verwendung der Bahnparameter a und ε in der Form

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{GMa(1-\varepsilon^2)}}{r^2} \tag{1.2}$$

ausgedrückt werden, wobei M die Sonnenmasse bezeichnet. Es beschreibt, wie schnell sich die Erde auf ihrer Bahn bewegt. (Wird für r der Ausdruck (1.1) eingesetzt, so kann es als Differentialgleichung für φ als Funktion von t verstanden werden).

Der Eigendrehimpuls $\vec{\ell}$ (der nicht mit dem Drehimpuls $\vec{L}$ der Umlaufbewegung zu verwechseln ist), schließt mit der positiven z-Achse einen Winkel θ ein, der die *Schiefe der Ekliptik* genannt wird (siehe Abbildung 2). Seine Orthogonalprojektion $\vec{\ell}_\parallel$ auf die xy-Ebene schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel α ein. Daher gilt

$$\vec{\ell} = \ell \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\alpha \\ \sin\theta\,\sin\alpha \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{\ell}_\parallel = \ell\,\sin\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

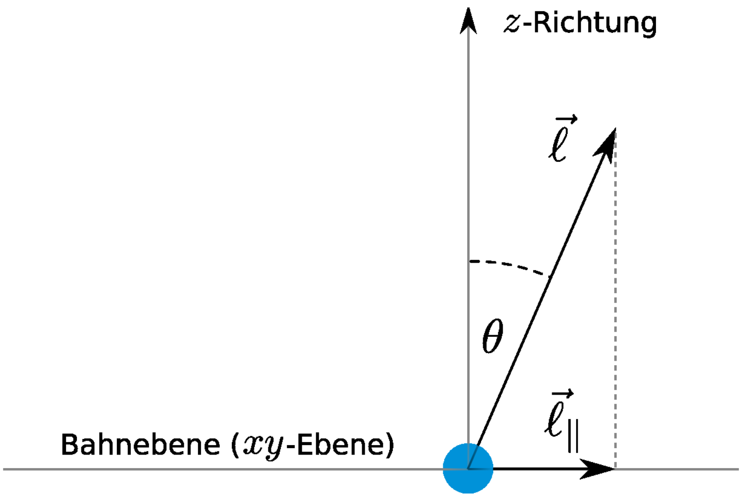

Abbildung 2: Die Schiefe der Ekliptik ist jener Winkel θ, um den der Eigendrehimpuls der Erde relativ zur Senkrechten auf die Bahnebene verkippt ist. Mit $\vec{\ell}_{||}$ wird die Orthogonalprojektion des Eigendrehimpulsvektors auf die Bahnebene bezeichnet.

wobei ℓ der Betrag des Eigendrehimpulses ist. Beide Rotationsparameter θ und α sind – im Rahmen des betrachteten Modells – zeitlich konstant.

2 Jahreszeiten

Ist $\theta \neq 0$ (was für die Erde der Fall ist), so kommt es auf der Erde zu *Jahreszeiten*. Die markanten Punkte auf der Umlaufbahn der Erde, die uns hier vor allem interessieren, sind die Tagundnachtgleichen (Äquinoktien). Es sind dies jene Punkte der Bahnellipse, für die der Ortsvektor der Erde orthogonal zu $\vec{\ell}_{||}$ ist. Das ist für die beiden Azimutwerte $\varphi = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$ der Fall: Auf der nördlichen Hemisphäre findet der Frühlingsbeginn (die Frühlings-Tagundnachtgleiche) statt, wenn sich die Erde an dem zu $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ gehörenden Punkt der Bahnellipse befindet, der Herbstbeginn (die Herbst-Tagundnachtgleiche) findet bei $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2} \equiv \alpha + \frac{3\pi}{2}$ statt. Damit wird das Jahr in *zwei* fundamentale Jahreszeiten[3] unterteilt:

- den *Nordsommer* (vom Frühlingsbeginn bis zum Herbstbeginn auf der Nordhemisphäre)
- und den *Nordwinter* (vom Herbstbeginn bis zum Frühlingsbeginn auf der Nordhemisphäre).

[3] Eigentlich müssten wir die erste als “Nordfrühling + Nordsommer” und die zweite als “Nordherbst + Nordwinter” bezeichnen, ziehen aber aus Gründen der sprachlichen Einfachheit die oben angegebene Ausdrucksweise vor.

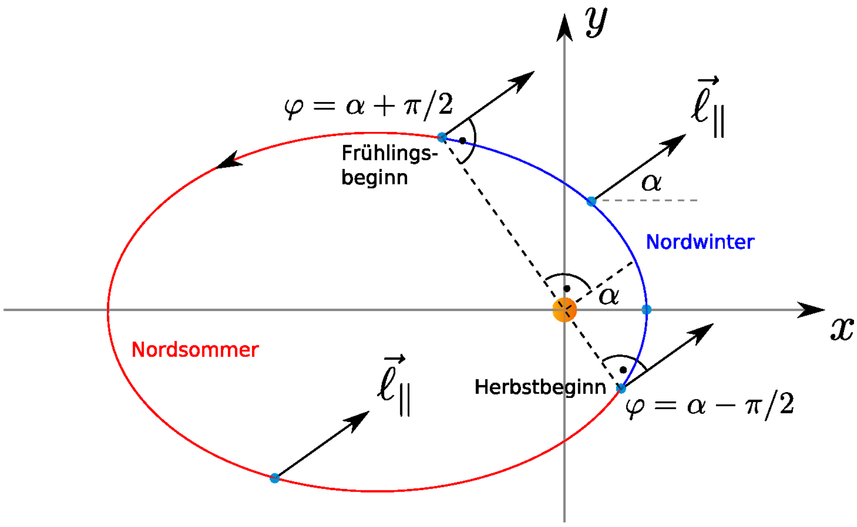

Abbildung 3: Die Jahreszeiten entlang der Bahnellipse (Exzentrizität stark überhöht) werden durch den Vektor $\vec{\ell}_{||}$ definiert. Frühlings- und Herbstbeginn (jeweils auf die Nordhemisphäre bezogen) sind die Tagundnachtgleichen (Äquinoktien). Der Bereich des Nordsommers ist rot, jener des Nordwinters ist blau dargestellt.

Sie entsprechen jenen Abschnitten der Bahnellipse, in denen die Erde der Sonne ihren Nord- bzw. ihren Südpol zeigt. In Abbildung 3 sind sie grafisch dargestellt. Die entsprechenden Bereiche des Azimuts φ für den Nordwinter und den Nordsommer sind in Tabelle 1 wiedergegeben.[4] (Achtung: Trotz der gelegentlichen Bezeichnungen "Halbjahre" dauern diese beiden Abschnitte nicht gleich lang!) Wann immer wir im Folgenden

Tabelle 1: Azimut-Bereiche des Nordwinters und des Nordsommers auf der Bahnellipse. Beachten Sie, dass diese beiden Jahreszeiten (trotz der gelegentlichen Bezeichnung "Halbjahre") nicht gleich lang sind!

Nordwinter	$\alpha - \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \alpha + \frac{\pi}{2}$
Nordsommer	$\alpha + \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \alpha + \frac{3\pi}{2}$

[4] Ein Check dieser Bereiche kann so erfolgen: Ist $\vec{x}$ der Ortsvektor der Erde (d.h. der Vektor von der Sonne zur Erde), so herrscht auf der Nordhemisphäre dann Frühling oder Sommer, wenn der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{\ell}_{||}$ größer als $90°$ ist, d.h. wenn $\vec{x} \cdot \vec{\ell}_{||} \leq 0$ gilt. Mit (1.3) und Fußnote 2 wird diese Bedingung zu $\cos\varphi\,\cos\alpha + \sin\varphi\,\sin\alpha \equiv \cos(\varphi - \alpha) \leq 0$, d.h. $\frac{\pi}{2} \leq \varphi - \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.

mathematischen Symbolen die Ausdrücke "Sommer" oder "Winter" als Indizes beifügen, meinen wir damit "Nordsommer" bzw. "Nordwinter".

Ein für das Zustandekommen des Klimas auf der Erde wichtiger Faktor ist die *Dauer der Jahreszeiten*. Sie hängen von der Richtung des Vektors $\vec{\ell}_\parallel$ ab, oder, anders ausgedrückt, von der Lage der Äquinoktien auf der Bahnellipse. In Abbildung 3 sind das jene Punkte, die die roten von den blauen Teilen der Bahnkurve trennen. Die gesamte Jahreslänge ist aufgrund des dritten Keplersche Gesetzes durch

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \tag{2.4}$$

gegeben.[5] Ohne detaillierte Rechnung geben wir den Ausdruck für die Dauer

$$T_{\text{Sommer}} = \frac{(1-\varepsilon^2)^{3/2}\, a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-\varepsilon\,\sin(\varphi+\alpha))^2} \tag{2.5}$$

des Nordsommers an.[6] Das Integral kann zu einem unansehnlichen Ausdruck in ε und α ausgewertet werden, den wir aber nicht benötigen. Für kleine Exzentrizitäten empfiehlt sich eine Entwicklung des Integranden, was auf

$$T_{\text{Sommer}} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \left(\pi + 4\varepsilon\cos\alpha - \frac{2}{3}\,\varepsilon^3\cos(3\alpha) + O(\varepsilon^5)\right) \tag{2.6}$$

führt. T_{Winter} ist dann einfach $T - T_{\text{Sommer}}$. Die relative Differenz der Dauer der beiden Jahreszeiten beträgt daher (unter Vernachlässigung von Termen dritter Ordnung in ε, was für unsere Zwecke völlig ausreicht)

$$\frac{T_{\text{Sommer}} - T_{\text{Winter}}}{T} \approx \frac{4\varepsilon}{\pi}\cos\alpha. \tag{2.7}$$

Der Betrag dieser Differenz ist (bei gegebenem ε) für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ maximal und für $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ gleich 0. Beachten Sie, dass $\cos\alpha$ beide Vorzeichen annehmen kann! Welche der beiden Jahreszeiten länger ist, hängt vom konkreten Wert von α ab. (Konkrete Zahlenwerte geben wir erst ganz unten an!)

[5] Beziehung (2.4) *ist* das dritte Keplersche Gesetz!

[6] Für seine Herleitung wird $\int dt$ mittels des zweiten Keplerschen Gesetzes (1.2) in ein Integral mit Variable φ umgewandelt – die gleiche Vorgangsweise werden wir weiter unten, von (3.9) zu (3.10), anwenden – und für r der Ausdruck (1.1) verwendet. Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus Abbildung 3 bzw. Tabelle 1. Danach kann noch eine kleine Vereinfachung durchgeführt werden, die die Grenzen zu 0 und π transformiert.

3 Sonneneinstrahlung

Mit welcher Strahlungsenergie wird die Erde von der Sonne versorgt? Wie unterschiedlich sind die während der beiden Jahreszeiten von der Erde empfangenen Energien? Mit welchen Energien werden die beiden Hemisphären der Erde versorgt? Um Fragen dieser Art im Rahmen des betrachteten Modells zu beantworten, benötigen wir lediglich eine geometrische Überlegung sowie einige elementare Eigenschaften der Keplerbewegung.

Wir bezeichnen die gesamte Strahlungsleistung der Sonne (d.h. die abgestrahlte Energie pro Zeitintervall) mit P und den Radius der Erde mit R. Befindet sich die Erde zu einem Zeitpunkt im Abstand r von der Sonne, so empfängt sie die Strahlungsleistung

$$P_{\text{Erde}} \equiv \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\pi R^2}{4\pi r^2}\,P. \tag{3.8}$$

(Überlegen Sie, warum!) Dabei bedeutet $d\mathcal{E}$ die während des infinitesimalen Zeitintervalls dt empfangene Strahlungsenergie. Überstreicht die Erde von der Sonne aus betrachtet während des Zeitintervalls dt den Winkel $d\varphi$, so ist

$$d\mathcal{E} = \frac{R^2 P}{4r^2}\,dt = \frac{R^2 P}{4r^2}\,\frac{dt}{d\varphi}\,d\varphi, \tag{3.9}$$

was unter Ausnutzung des zweiten Keplerschen Gesetzes (1.2) zu

$$d\mathcal{E} = \frac{R^2 P}{4r^2}\,\frac{r^2}{\sqrt{a(1-\varepsilon^2)GM}}\,d\varphi \tag{3.10}$$

umgeschrieben werden kann. Beachten Sie, dass sich der Abstand r herauskürzt:

$$d\mathcal{E} = \underbrace{\frac{R^2 P}{4\sqrt{GM}}}_{K}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}\,. \tag{3.11}$$

Der erste Faktor – wir haben ihn mit K bezeichnet – hängt nur von den Konstanten R, P und M ab, während im zweiten die Abhängigkeit von den Erdbahnparametern a und ε (die im Rahmen unseres Modells ebenfalls konstant sind) zusammengefasst ist. Die gesamte von der Erde während eines Umlaufs empfangene Strahlungsenergie ist daher gleich

$$\mathcal{E}_{\text{ges}} = \frac{K}{\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi K}{\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}\,. \tag{3.12}$$

Sie hängt von der großen Halbachse und von der Exzentrizität der Bahn ab. Die während des Nordsommers empfangene Strahlungsenergie ist

$$\mathcal{E}_{\text{Sommer}} = \frac{K}{\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}\int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} d\varphi = \frac{\pi K}{\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ges}}}{2}, \tag{3.13}$$

und die während des Nordwinters empfangene Strahlungsenergie ist ebenso groß. Dieses Resultat mag überraschen: Die Erde empfängt – trotz ihrer elliptischen Bahn – während Nordsommer und Nordwinter gleich viel Strahlungsenergie! Ist die Situation so wie in Abbildung 3 dargestellt, so führt die längere Dauer des Nordsommers *nicht* zu einem erhöhten Strahlungseintrag, da die Erde dann weiter von der Sonne entfernt ist – die beiden Effekte heben einander genau auf.

Für die klimatischen Verhältnisse während einer Jahreszeit ist aber nicht nur die auf die Erde insgesamt eingestrahlte Energie verantwortlich. Tatsächlich hängen sie von einer Vielzahl von Faktoren ab. So gehen insbesondere die Festlandmassen, die vor allem auf der nördlichen Hemisphäre liegen, mit der eingestrahlten Energie anders um als die Ozeane. Ganz abgesehen von den komplexen Prozessen, die letzten Endes zu einer konkreten Wettersituation führen, wird ein Teil der empfangenen Strahlungsenergie sofort wieder in den Weltraum reflektiert, wobei dieser Anteil wiederum vom Wetter (etwa von der Wolkenbildung und der Existenz großer Schneeflächen auf den Kontinenten) abhängt. Da die Erde im Nordsommer der Sonne mehr festes Land zeigt als im Winter, ist es instruktiv, die Einstrahlung auf die beiden Hemisphären getrennt zu betrachten.[7]

Die zu einem Zeitpunkt von der Erde empfangene gesamte Strahlungsleistung teilt sich auf die beiden Hemispähren in jenem Verhältnis auf, in dem diese "von der Sonne gesehen werden". Dieses Verhältnis hängt vom Winkel χ ab, den der Ortsvektor $\vec{x}$ der Erde mit dem Eigendrehimpuls $\vec{l}$ bildet. Befindet sich die Erde an jenem Punkt ihrer Bahn, der einem gegebenen Wert φ des Azimuts entspricht, so wird der Cosinus des Winkels χ mit (1.3) und

$$\vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

zu

$$\cos\chi = \frac{\vec{x}\cdot\vec{\ell}}{|\vec{x}|\,|\vec{\ell}|} = \sin\theta\,(\cos\varphi\,\cos\alpha + \sin\varphi\,\sin\alpha) \equiv \sin\theta\,\cos(\varphi-\alpha) \tag{3.15}$$

berechnet. Die Nordhemisphäre bekommt dann den Anteil $\frac{1}{2}(1-\cos\chi)$, die Südhemisphäre bekommt den Anteil $\frac{1}{2}(1+\cos\chi)$. (Überlegen Sie, warum! Benutzen Sie dazu Abbildung 4!) Unter Einbeziehung dieser Gewichtungsfaktoren wird der Strahlungseintrag in die Nordhemisphäre während des Nordsommers zu

$$\mathcal{E}_{\text{N, Sommer}} = \frac{K}{2\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}} \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} d\varphi\,\left(1-\sin\theta\,\cos(\varphi-\alpha)\right) = \frac{(\pi+2\sin\theta)K}{2\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}} \tag{3.16}$$

[7]In einer genaueren Untersuchung würde man sich natürlich nicht auf die beiden Hemisphären beschränken, sondern die tatsächliche Verteilung der Kontinente und ihre Lage hinsichtlich der geographischen Breiten berücksichtigen.

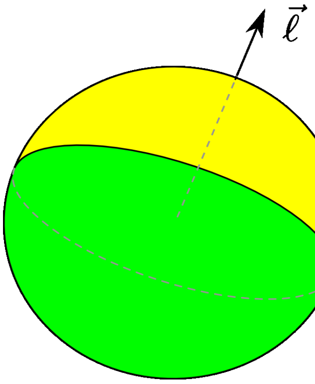

Abbildung 4: Zu jedem Zeitpunkt "sieht" die Sonne einen gewissen Teil der nördlichen (gelb) und einen gewissen Teil der südlichen (grün) Hemisphäre. Der Äquator der Erde, der die beiden Hemisphären trennt, liegt in der Ebene orthogonal zum Eigendrehimpulsvektor $\vec{\ell}$. Die Richtung dieses Vektors relativ zum Ortsvektor der Erde (d.h. zu der von der Sonne aus gezogenen "Sichtlinie") bestimmt daher, wie sich die Einstrahlung auf die beiden Hemisphären aufteilt. Die Grafik zeigt die Erde, wie sie von der Sonne während des Nordwinters gesehen wird. Der Vektor $\vec{\ell}$ wird von der Sonne aus verkürzt "gesehen".

und der Strahlungseintrag in die Nordhemisphäre während des Nordwinters zu

$$\mathcal{E}_{\text{N, Winter}} = \frac{K}{2\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}} \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} d\varphi \, \left(1 + \sin\theta \, \cos(\varphi - \alpha)\right) = \frac{(\pi - 2\sin\theta)K}{2\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}} \tag{3.17}$$

ermittelt. Analog ist der Strahlungseintrag in die Südhemisphäre während des Nordsommers durch

$$\mathcal{E}_{\text{S, Sommer}} = \frac{(\pi - 2\sin\theta)K}{2\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}} \tag{3.18}$$

und während des Nordwinters durch

$$\mathcal{E}_{\text{S, Winter}} = \frac{(\pi + 2\sin\theta)K}{2\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}. \tag{3.19}$$

gegeben. Da

$$\mathcal{E}_{\text{N, Sommer}} + \mathcal{E}_{\text{N, Winter}} = \mathcal{E}_{\text{S, Sommer}} + \mathcal{E}_{\text{S, Winter}} \tag{3.20}$$

gilt, bekommen die beiden Hemisphären während eines gesamten Umlaufs gleich viel Strahlungsenergie ab – eine schöne Symmetrie, trotz der ungleichen Verteilung der beiden Jahreszeiten entlang der Umlaufbahn! Beachten Sie, dass alle diese Größen von der Schiefe der Ekliptik θ, nicht aber von α und damit nicht von der Richtung des Vektors

$\vec{\ell}_\parallel$ abhängen. Der relative Unterschied von Nordsommer- und Nordwintereinstrahlung auf die beiden Hemisphären kann durch die Verhältnisse

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{N, Sommer}} - \mathcal{E}_{\text{N, Winter}}}{\mathcal{E}_{\text{N, Sommer}} + \mathcal{E}_{\text{N, Winter}}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{S, Winter}} - \mathcal{E}_{\text{S, Sommer}}}{\mathcal{E}_{\text{S, Winter}} + \mathcal{E}_{\text{S, Sommer}}} = \frac{2}{\pi} \sin\theta \tag{3.21}$$

ausgedrückt werden.

Wie "kräftig" der Sommer auf einer Hemispäre ausfällt, hängt nicht nur von der während dieser Zeit insgesamt in sie eingestrahlten Energie ab, sondern auch von seiner Dauer. Die Verhältnisse sind zwar von Ort zu Ort unterschiedlich, aber wir begnügen uns mit einer mittleren Kenngröße, der durchschnittlich pro Zeitintervall (etwa pro Tag) während des Nordsommers auf die Nordhemisphäre eingestrahlten Energie. Unter Ausnutzung von (3.16) und (2.6) ermitteln wir mit

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{N, Sommer}}}{T_{\text{Sommer}}} \approx \frac{R^2 P}{8} \frac{\pi + 2\sin\theta}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\pi + 4\varepsilon\cos\alpha)} \tag{3.22}$$

eine bis zur zweiten Ordnung in ε gültige (für unsere Zwecke ausreichend genaue) Formel. Unter anderem von dieser Größe hängen die typischen Sommertemperaturen auf der Nordhemisphäre ab. Sie beeinflusst daher auch, wie effektiv der Nordsommer die Schneemassen schmelzen kann, die sich (vor allem in höheren Lagen wie etwa dem Hochland von Tibet) während des Nordwinters auf dem Festland angesammelten haben. Beachten Sie, dass sie von *allen* relevanten Bahn- und Rotationsparametern a, ε, θ und α abhängt (interessanterweise aber nicht von der Sonnenmasse).[8]

Die – auf relativ einfachem Weg – in diesem Abschnitt erzielten Resultate (3.12) – (3.22) geben eine grobe Vorstellung davon, wie astronomische und astrophysikalische Verhältnisse das Erdklima und die Ausprägung der Jahreszeiten beeinflussen (wobei das, was auf der Erde im Detail mit der eingestrahlten Energie geschieht, sehr komplex ist und nur mit Hilfe aufwändiger Klimamodelle erklärt werden kann).

4 Heutige Werte der "Konstanten"

Bisher haben wir es vermieden, konkrete Zahlenwerte für die auftretenden Konstanten anzugeben. Das liegt daran, dass (fast) alle dieser Größen in Wahrheit nicht konstant

[8] Eine analoge Berechnung führt auf

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{N, Winter}}}{T_{\text{Winter}}} \approx \frac{R^2 P}{8} \frac{\pi - 2\sin\theta}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\pi - 4\varepsilon\cos\alpha)}\,, \tag{3.23}$$

und entsprechende Formeln (mit entsprechend geänderten Vorzeichen) ergeben sich für die Quotienten $\mathcal{E}_{\text{S, Winter}}/T_{\text{Winter}}$ und $\mathcal{E}_{\text{S, Sommer}}/T_{\text{Sommer}}$, die die Südhemisphäre kennzeichnen. Die relativen Nordsommer-Nordwinter-Unterschiede dieser Größen für die beiden Hemisphären führen in der niedrigsten Ordnung der betrachteten Näherung auf $\frac{4}{\pi}\sin\theta$, d.h. auf das Zweifache von (3.21).

sind, sondern sich langsam und quasiperiodisch ändern – manche im Laufe von Jahrtausenden, manche im Laufe von Jahrhunderttausenden bis Jahrmilliarden – und wir daher ein möglichst allgemeines Bild der Abhängigkeit der berechneten Größen von den astronomischen Parametern zeichnen wollten. Tatsächlich über Jahrmilliarden konstant sind der (mittlere) Erdradius $R = 6371\,\mathrm{km}$ und die Sonnenmasse $M = 1.9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Über lange Zeiträume hinweg konstant ist auch die große Halbachse

$$a = 1.495979 \times 10^{8}\,\mathrm{km} \tag{4.24}$$

sowie die Strahlungsleistung der Sonne. Letztere kann aus der (auf der Erde gemessenen) Solarkonstante von $1367\,\mathrm{W/m^2}$ zu $P = 3.845 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$ ermittelt werden.[9] Die heutigen Werte der verbleibenden Erdbahn- und Erdrotationsparameter sind

$$\varepsilon = 0.0167 \tag{4.25}$$
$$\theta = 23.44^\circ \tag{4.26}$$
$$\alpha = -12.5^\circ. \tag{4.27}$$

ε, θ und α durchlaufen zyklische Änderungen auf Zeitskalen von $20\,000$ bis $400\,000$ Jahren.

Mit Hilfe dieser Zahlen können einige der heute auf der Erde beobachtbaren astronomischen und jahreszeitlichen Gegebenheiten reproduziert werden. Insbesondere ergibt sich aus (2.7) die relative Differenz der Dauer zwischen Nordsommer und Nordwinter zu 0.02076, was 7.58 Tagen entspricht. Auf die Frage, welche typischen Temperaturen sich aus der Sonneneinstrahlung während der verschiedenen Jahreszeiten ergeben, gehen wir nicht ein, da sie nur auf der Basis einer Physik der Atmosphäre beantwortet werden kann und uns damit zu weit weg von den hier interessierenden astronomischen Einflüssen führen würde. Von den Auswirkungen der langfristigen Schwankungen der Bahn- und Rotationsparameter der Erde handelt der Text "Langfristige Variationen und die Konsequenzen".[10]

[9] Da der über die Zeit gemittelte Abstand der Erde von der Sonne nicht a, sondern mit $\overline{r} = 1.00014\,a$ geringfügig größer ist, sieht die genaue Berechnung so aus: $P = 4\pi\overline{r}^2 \times 1367\,\mathrm{W/m^2} = 3.845 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$.

[10] Zu finden unter http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/DidaktikAstronomie/ss2009/.