BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Trilineare und baryzentrische Koordinaten in der Dreiecksgeometrie

Verfasserin

Irene Baldauf

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Education (BEd)

Wien, Juni 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	198 420
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Bachelor Lehramt UF Mathematik
Betreuer:	Doz. Dr. Franz Embacher

Abstract

Diese Arbeit beschäftigt sich mit trilinearen und baryzentrischen Koordinaten in der Dreiecksgeometrie. Im Gegensatz zu kartesischen Koordinaten verfügen sie über keinen Referenzpunkt wie den Ursprung, sondern geben Punkte in Bezug auf ein gegebenes Dreieck an. Außerdem handelt es sich nicht um absolute Koordinaten, sondern um Verhältnisse. Punkte in- und außerhalb eines Bezugsdreiecks werden durch Tripel beschrieben, die im Falle der trilinearen Koordinaten den gerichteten Normalabständen zu den jeweiligen Dreiecksseiten entsprechen, im Falle der baryzentrischen Koordinaten den Gewichtungen der Eckpunkte des Bezugsdreiecks. Mithilfe dieser Koordinaten können einige inner- und außermathematische Probleme sehr elegant gelöst werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Liebe Leserinnen und Leser,

in der folgenden Arbeit werden trilineare und baryzentrische Koordinaten sowie einige Anwendungen vorgestellt. Gestaltet ist die Arbeit so, dass kurze Aufgaben den Theorieteil unterstützen und mit den Musterlösungen am Ende der Arbeit verglichen werden können.

2 Trilineare Koordinaten

2.1 Definition

Trilineare Koordinaten wurden 1835 von Julius Plücker, einem deutschen Mathematiker und Physiker, eingeführt. Mithilfe eines Zahlentripels, das in weiterer Folge mit (u, v, w) bezeichnet wird, kann die Lage eines Punktes bezüglich eines Dreiecks ΔABC beschrieben werden.

Dieses Tripel (u, v, w) erhält man als Werte der vorzeichenbehafteten Normalabstände zu den Dreiecksseiten. Die Definition $(u, v, w) = (d_a, d_b, d_c)$ impliziert, dass beispielsweise die Koordinate u angibt, wie weit und in welcher Richtung der Punkt P von der Seite a oder genauer der Trägergeraden der Strecke $\overline{BC}$, entfernt liegt.

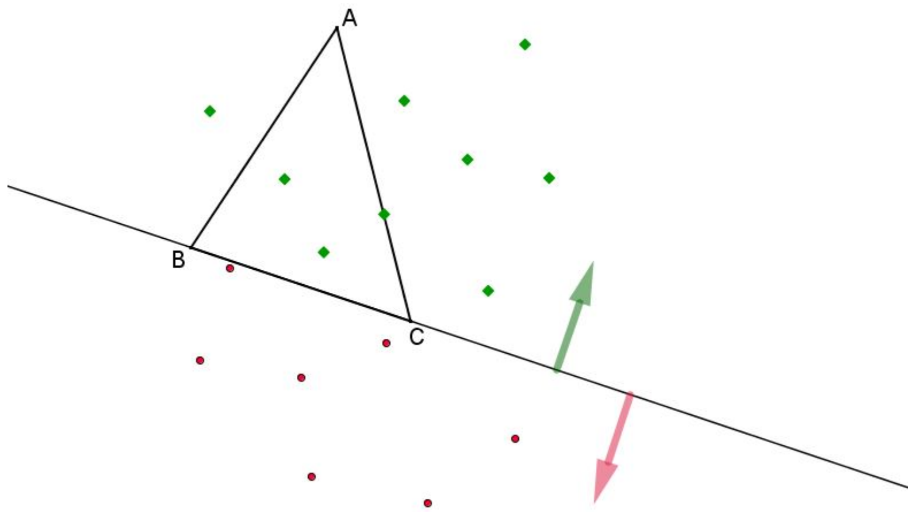


Abbildung 1: vorzeichenbehaftete Normalabstände

Abbildung 1 zeigt Punkte in- und außerhalb des Dreiecks ΔABC. Die Trägergerade von $\overline{BC}$ teilt diese Punkte gemäß ihrem vorzeichenbehafteten Abstand zur Seite a in drei Gruppen ein. Jene Punkte, die sich auf der selben Seite wie der Eckpunkt A befinden, besitzen eine positive erste Koordinate. Für alle Punkte auf der anderen Seite nimmt die Koordinate u negative Werte an. Liegt ein Punkt *auf* der Geraden, gilt natürlich $u = 0$, da der Abstand zur Seite a verschwindet.

Analog kann so das Vorzeichen für die beiden anderen Koordinaten v und w ermittelt werden. An dieser Stelle ist die erste Aufgabe zur Festigung der Theorie platziert.

Aufgabe 1
Abbildung 2 zeigt die sieben möglichen Bereiche, wo sich ein Punkt in Bezug auf das Dreieck ΔABC befinden kann. Als Beispiel sind die Vorzeichen eines trilinearen Tripels

bereits gegeben. Aufgabe ist es nun, die restlichen Vorzeichen einzutragen. Was fällt auf?

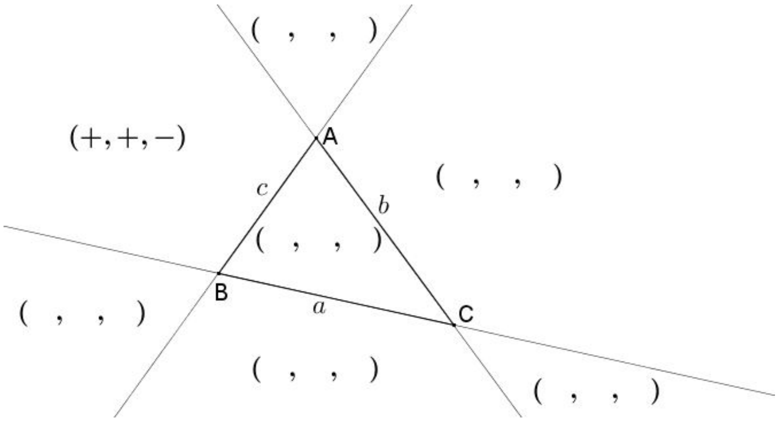


Abbildung 2: Vorzeichen

Nun werden die Eckpunkte betrachtet. Für Punkt A kann man feststellen, dass die Abstände zu den Dreiecksseiten b und c jeweils verschwinden, es also gilt $v = w = 0$. Der Normalabstand zur Seite a wird mit d_a bezeichnet. Folglich ergibt sich das trilineare Tripel $(d_a, 0, 0)$.

Auch folgende Notation $d_a : 0 : 0$ ist zur Angabe von trilinearen Koordinaten gebräuchlich. Damit wird ausgedrückt, dass es bei den Tripeln nur auf die Verhältnisse ankommt und es deshalb möglich ist, die Koordinaten mit einer Konstanten $k > 0$ zu multiplizieren. In diesem Sinn gilt $u : w : w = ku : kv : kw$. So würden sowohl $1 : 0 : 0$ oder $100 : 0 : 0$ den Eckpunkt A im Dreieck ΔABC beschreiben und es gilt $d_a : 0 : 0 = kd_a : 0 : 0 = 1 : 0 : 0 = 100 : 0 : 0$. Bei der Schreibweise der Tripel in der Form (u, v, w) und (ku, kv, kw) wäre das Gleichheitszeichen nicht ganz korrekt, auch wenn es sich beides Mal um denselben Punkt handelt.

Aufgabe 2
Gegeben sei das Dreieck ΔABC. Wie lauten die Eckpunkte B und C in trilinearen Koordinaten?

Aufgabe 3
Wo müsste man den Punkt mit den trilinearen Koordinaten $1 : 0 : 1$ in einem beliebigen Dreieck ΔABC einzeichnen?

2.2 Normierung von trilinearen Koordinaten

Dass die trilinearen Koordinaten als Verhältnisse angegeben werden und die Beziehung $u : v : w = ku : kv : kw$ gilt, zeigt, dass sie nicht eindeutig sind. Dies bedeutet weiters, dass man an einem gegebenen trilinearen Tripel eines Punktes P nicht direkt ablesen kann, wie weit der Punkt tatsächlich von den Dreiecksseiten entfernt ist.

Allerdings ist es möglich, trilineare Koordinaten so zu normieren, dass sie die tatsächlichen gerichteten Normalabstände des Punktes P zu den Dreiecksseiten eines Bezugsdreiecks ΔABC angeben. Um die Normierung durchzuführen, wird mit den Flächen der Teildreiecke ΔCPB, ΔAPC und ΔBPA des Dreiecks ΔABC gearbeitet.

Sei Punkt P durch die trilinearen Koordinaten $u : v : w$ gegeben und die tatsächlichen gerichteten Normalabstände zu den Dreiecksseiten sind unsere Unbekannten d_a, d_b und d_c. Es gilt die

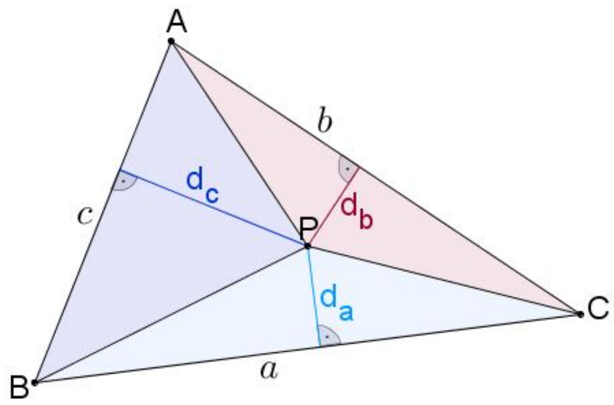


Abbildung 3: Normierung

Beziehung $d_a = ku$, $d_b = kv$ und $d_c = kw$ für ein $k > 0$.

Die Fläche des Dreiecks ΔCPB ist durch $\Delta_a = \frac{1}{2}ad_a$ gegeben und gleichermaßen berechnet man Δ_b und Δ_c.

Nun kann die Fläche des gesamten Dreiecks ΔABC als Summe der drei Teildreiecke ΔCPB, ΔAPC und ΔBPA angeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c && (1)\\
&= \frac{1}{2}ad_a + \frac{1}{2}bd_b + \frac{1}{2}cd_c && (2)\\
&= \frac{1}{2}(aku + bkv + ckw) && (3)\\
&= \frac{1}{2}k(au + bv + cw) && (4)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Normierungskonstante

$$k = \frac{2\Delta}{au + bv + cw}. \tag{5}$$

Für die Berechnung der Fläche des gesamten Dreiecks kann der Satz von Heron herangezogen werden. Dieser liefert die Formel $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ für $s = \frac{a+b+c}{2}$, wobei a, b und c die Seiten des Dreiecks sind.

Aufgabe 4
Gegeben sei das Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen $a = 100$, $b = 128$ und $c = 96,5$. Ein Punkt in diesem Dreieck wird mit den trilinearen Koordinaten $P = 2 : 3 : 1$ angegeben. Wie groß sind die tatsächlichen Normalabstände zu den jeweiligen Seiten?

2.3 Ausgezeichnete Punkte im Dreieck

Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt und Inkreismittelpunkt zählen zu den sogenannten ausgezeichneten, beziehungsweise merkwürdigen, Punkte im Dreieck. In diesem Kapitel soll für diese ausgewählten Punkte jeweils ein trilineares Tripel ermittelt werden, das die Postion des Punktes in einem beliebigen Dreieck ΔABC beschreibt.

2.3.1 Schwerpunkt

Im Folgenden wird die Herleitung einer allgemeinen Formel für den gerichteten Normalabstand d_a gezeigt. Wird zusätzlich d_b und d_c ermittelt, kann der Schwerpunkt in trilinearen Koordinaten angegeben werden.

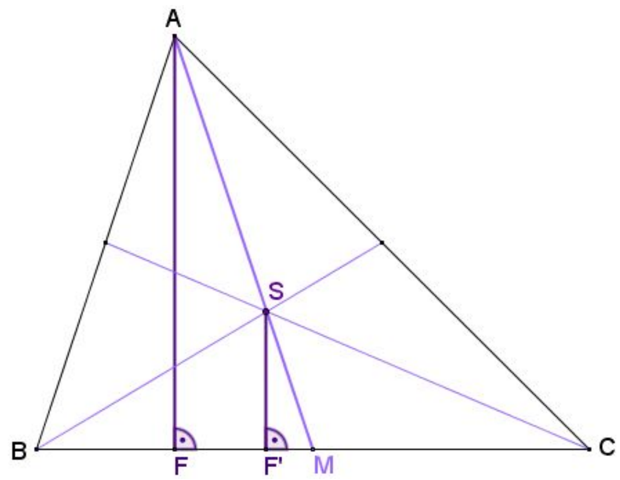


Abbildung 4: Schwerpunkt

Die Herleitung der Formel für d_a wird anhand von Abbildung 4 veranschaulicht. Der Normalabstand des Schwerpunkts zur Dreiecksseite a wurde in der Skizze mit der Strecke $\overline{SF'}$ dargestellt. Außerdem wurde die Höhenlinie durch A, sowie deren Fußpunkt F auf der Dreiecksseite a eingezeichnet.

Da die Dreiecke $\Delta SF'M$ und ΔAFM ähnlich sind und der Schwerpunkt die Schwerelinien im Verhältnis 1 : 2 teilt, ergibt sich der Zusammenhang

$$|SF'| = \frac{1}{3}|AF| \tag{6}$$

Durch Anwendung der Sinusfunktion im rechtwinkeligen Dreieck ΔBFA erhält man

$$|AF| = c \cdot \sin\beta \tag{7}$$

und kann dies nun Gleichung (6) einsetzen, was uns unmittelbar das Ergebnis für den Normalabstand liefert:

$$d_a = |SF'| = \frac{1}{3} \cdot c \cdot \sin\beta \tag{8}$$

Analog kann dies für die Normalabstände von S zu den Seiten b und c gemacht werden:

$$d_b = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \sin\gamma \tag{9}$$

$$d_c = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \sin\alpha \tag{10}$$

Das trilineare Tripel des Schwerpunkts lautet somit

$$S = \frac{1}{3}c\sin\beta : \frac{1}{3}a\sin\gamma : \frac{1}{3}b\sin\alpha \tag{11}$$

Allerdings kann man das Tripel durch Multiplizieren mit einer geeigneten Konstanten $k > 0$ noch vereinfachen. In diesem Fall wird jede Koordinate mit einem anderen Ausdruck multipliziert, die erste mit $3\frac{b}{\sin\beta}$, die zweite mit $3\frac{c}{\sin\gamma}$ und die dritte mit $3\frac{a}{\sin\alpha}$. Der Sinussatz zeigt, dass alle drei Faktoren gleich sind. Schließlich führt das zu den trilinearen Koordinaten

$$S = bc : ca : ab = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \tag{12}$$

2.3.2 Umkreismittelpunkt

Der erste Schritt zur Herleitung der trilinearen Koordinaten für den Umkreismittelpunkt ist das Ermitteln des Winkels φ, der in Abbildung 5 im Dreieck ΔMUB eingezeichnet ist. Da der Winkel $\angle CUB$ der Zentriwinkel zum Peripheriewinkel α ist, gilt $\angle CUB = 2\alpha$. Dass die Dreiecke ΔMUB und ΔMUC ähnlich zueinander sind, erkennt man an der geteilten Seite $\overline{MU}$, dem rechten Winkel bei M und den zwei Seiten $\overline{BM}$ und $\overline{MC}$, die jeweils eine Länge von $\frac{1}{2}|BC|$ haben. In weiterer Folge heißt dies, dass die Winkel $\angle MUB$ und $\angle MUC$ gleich sein müssen, also die Hälfte vom Zentriwinkel, was dann genau dem Peripheriewinkel entspricht. Somit gilt $\varphi = \alpha$.

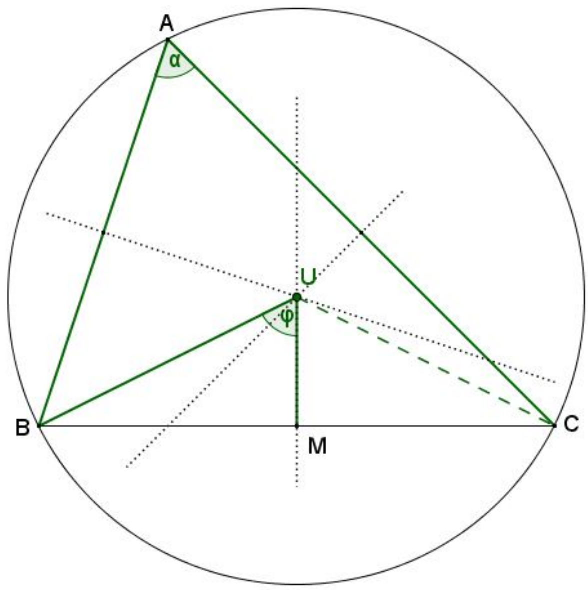


Abbildung 5: Umkreismittelpunkt

Das sind nun genügend Informationen, um den Abstand d_a des Umkreismittelpunktes zur Dreiecksseite a angeben zu können:

$$d_a = |BU| \cos\alpha \tag{13}$$

Analog ergibt sich für die Abstände zu den Seiten b und c:

$$d_b = |CU| \cos\beta \tag{14}$$

$$d_c = |AU| \cos\gamma \tag{15}$$

Da die Längen $|AU|$, $|BU|$ und $|CU|$ dem Radius des Umkreises entsprechen und daher gleich sind, kann dieser Faktor gekürzt werden, was schließlich zu einer eleganten Schreibweise des Umkreismittelpunktes in trilinearen Koordinaten führt:

$$U = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma \tag{16}$$

2.3.3 Höhenschnittpunkt

Abbildung 6 zeigt, dass die Höhen eines Dreiecks immer die Streckensymmetralen eines größeren Dreiecks sind.

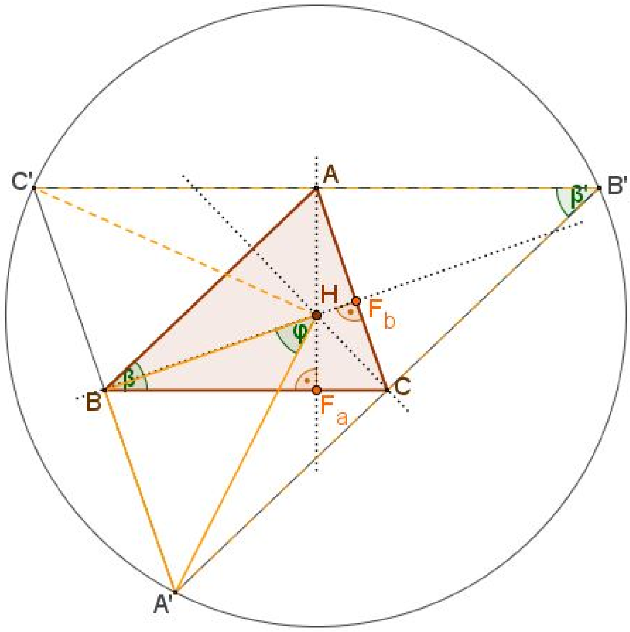


Abbildung 6: Höhenschnittpunkt

Es wird mit der Bestimmung des Winkels $\angle BHF_a$ begonnen. Da die Dreiecke ΔBHF_a und ΔBCF_b aufgrund zwei gleicher Winkel (am Eckpunkt B und jeweils ein rechter Winkel an den Fußpunkten F_i) kongruent sind, gilt

$$\angle BHF_a = \angle BCF_b = \angle BCA = \gamma, \tag{17}$$

was durch Anwendung der Kosinusfunktion unmittelbar zu dem Zusammenhang

$$|HF_a| = d_a = |BH| \cos\gamma \tag{18}$$

führt. Nun muss nur noch die Länge $|BH|$ durch $|HA'|$ ausgedrückt werden. Dafür bedient man sich erneut des Peripheriewinkelsatzes und anschließend des Stufenwinkelsatzes und erhält die Beziehung

$$\angle A'HB = \angle A'B'C' = \angle ABC = \beta \tag{19}$$

Anwenden der Kosinusfunktion im Dreieck $\Delta A'HB$ ergibt

$$|BH| = |HA'| \cos\beta, \tag{20}$$

und somit kann die erste Koordinate des trilinearen Tripels folgendermaßen angegeben werden:

$$d_a = |HA'| \cos\beta \cos\gamma \tag{21}$$

Analog für die anderen beiden Koordinaten:

$$d_b = |HB'| \cos\gamma \cos\alpha \tag{22}$$

$$d_c = |HC'| \cos\alpha \cos\beta \tag{23}$$

Mithilfe der Beziehung $|HA'| = |HB'| = |HC'| = Umkreisradius\ des\ Dreiecks\ \Delta A'B'C'$ lässt sich das trilineare Tripel durch diesen Faktor kürzen, und es ergibt sich für den Höhenschnittpunkt

$$H = \cos\beta\cos\gamma : \cos\gamma\cos\alpha : \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma} \tag{24}$$

2.3.4 Inkreismittelpunkt

Von den bekanntesten vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks ist nun noch der Inkreismittelpunkt ausständig.

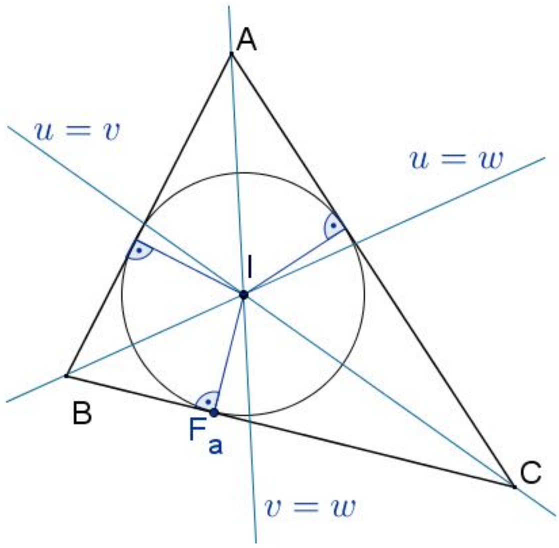


Abbildung 7: Inkreismittelpunkt

Aufgabe 5
Ermitteln Sie ein trilineares Tripel zur Beschreibung des Inkreismittelpunktes in einem beliebigen Dreieck ΔABC.

Für den Inkreismittelpunkt soll zusätzlich zur Musterlösung ein zweiter Weg zur Herleitung des trilinearen Tripels vorgestellt werden. Dieser beginnt damit, dass bewiesen wird, dass sich die drei Winkelsymmetralen, durch die der Inkreismittelpunkt konstruiert werden kann, immer in einem Punkt schneiden.

Dafür müssen die Geradengleichungen für die Winkelsymmetralen in trilinearen Koordinaten gefunden werden. In Anlehnung an Aufgabe 3 kann man mit der Tatsache arbeiten, dass für Punkte auf einer Winkelsymmetralen die Abstände zu den dazugehörigen Winkelschenkeln immer gleich groß sind. Für einen Punkt auf der Winkelsymmetralen durch den Punkt A gilt also, dass der Abstand zu den Seiten b und c gleich groß ist, wodurch sich der Zusammenhang $v = w$ ergibt. Analog erhält man $w = u$ und $u = v$ für die anderen beiden Winkelsymmetralen. Man erkennt nun, dass für den Inkreismittelpunkt $u = v = w$ gelten muss. Diese Bedingung enthält zwei Informationen zugleich: Erstens zeigt sie, dass die drei Winkelsymmetralen immer einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Zweitens weiß man unmittelbar, wie dieser Schnittpunkt lautet. Da alle drei Koordinaten den gleichen Wert haben müssen, führt dies zu folgenden Tripeln $I = r : r : r = 1 : 1 : 1$.

2.4 Dreieckszentren

Wie in den vorigen Kapiteln schon angedeutet, gibt es mehr als diese vier behandelten ausgezeichneten Punkte des Dreiecks. In den letzten Jahrhunderten wurden viele weitere Punkte gefunden und untersucht. Aufgelistet sind sie in der „Encyclopedia of Triangle Centers“, kurz ETC, des US-amerikanischen Mathematikers, Musikers und Komponisten Clark Kimberling.

Dort führte er eine Standardbezeichnung ein, die alle ausgezeichneten Punkte - in Anlehnung an den englischen Begriff in weiterer Folge Dreieckszentren genannt - mit dem Buchstaben X und einem dazugehörigen Index i bezeichnet. Eine kleine Auswahl von Dreieckszentren ist in Tabelle 1 dargestellt.

X_n	**Name des Zentrums**	**Trilineare Koordinaten**
X_1	Inkreismittelpunkt	$1:1:1$
X_2	Schwerpunkt	$bc:ac:ab$
X_3	Umkreismittelpunkt	$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma$
X_4	Höhenschnittpunkt	$\sec\alpha:\sec\beta:\sec\gamma$
X_5	Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises	$\cos(\beta-\gamma):\cos(\gamma-\alpha):\cos(\alpha-\beta)$
X_6	Symmedianenpunkt (Lemoine-Punkt)	$a:b:c$
X_7	Gergonne-Punkt	$\frac{bc}{b+c-a}:\frac{ca}{c+a-b}:\frac{ab}{a+b-c}$
X_{10}	Spiekerpunkt	$bc(b+c):ca(c+a):ab(a+b)$
X_{13}	1. Fermat-Punkt	$\csc(\alpha+\frac{\pi}{3}):\csc(\beta+\frac{\pi}{3}):\csc(\gamma+\frac{\pi}{3})$
X_{40}	Bevan-Punkt	$\cos\beta+\cos\gamma-\cos\alpha-1:...:...$
X_{485}	1. Vecten-Punkt	$\sec(\alpha+\frac{\pi}{4}):\sec(\beta+\frac{\pi}{4}):\sec(\gamma+\frac{\pi}{4})$

Tabelle 1: Dreieckszentren

Um einen Überblick und eine Idee von Dreieckszentren zu erhalten, werden die in Tabelle 1 angeführten Punkte kurz beschrieben.

Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises
Auf dem sogenannten Feuerbach-Kreis, oder auch Neun-Punkt-Kreis genannt, liegen die Fußpunkte der Höhen, die Mittelpunkte der Seiten und die Mittelpunkte der Strecken zwischen einer Dreiecksecke und dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

Symmedianenpunkt
Die Symmedianen eines Dreiecks sind die Spiegelungen der Seitenhalbierenden an den Winkelhalbierenden. Diese schneiden sich in einem Punkt, dem Symmedianen-, Lemoine- oder auch Grebe-Punkt.

Gergonne-Punkt
Die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten werden mit den jeweils gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden. Die drei Geraden schneiden sich in dem sogenannten Gergonne-Punkt.

Spieker-Punkt
Der Spieker-Punkt beschreibt den Schwerpunkt des Dreiecksumfangs. Konstruiert wird er, indem vom Mittendreieck (Verbindung der Mittelpunkte der Seiten) der Inkreismittelpunkt bestimmt wird.

1. Fermat-Punkt
Konstruiert wird der Fermat-Punkt, indem über die Seiten eines beliebigen Dreiecks gleichseitige Dreiecke gezeichnet werden und die so entstandenen neuen Eckpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des ursprünglichen Dreiecks verbindet. Der Schnittpunkt dieser drei Geraden wird dann als erster Fermat-Punkt bezeichnet.

Dieser Punkt findet in der Wirtschaftsmathematik, speziell bei der Standortplanung, Anwendung. Wenn man drei Firmenstandorte als Eckpunkte eines Dreiecks annimmt und nun ein Zentrallager an die Stelle des ersten Fermat-Punktes setzt, hat man ein Minimum an Transportkosten erreicht. Der Fermat-Punkt besitzt nämlich die Eigenschaft, die Summe der Abstände vom Punkt zu den Eckpunkten zu minimieren, unter der Voraussetzung, dass alle Winkel im Dreieck kleiner als 120° sind.

Bevan-Punkt
Der Bevan-Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises, der durch die drei Ankreismittelpunkte geht.

1. Vecten-Punkt
Über die Seiten eines Dreiecks werden nach außen Quadrate gezeichnet. Die Mittelpunkte dieser Quadrate werden mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des ursprünglichen Dreiecks verbunden. Die drei Geraden schneiden sich in einem Punkt und bilden den ersten Vecten-Punkt.

Wie man aus der Tabelle entnehmen kann, ist der erste Vecten-Punkt bereits das 485. Dreieckszentrum. Insgesamt sind derzeit (Stand 12. Juni 2018) in der ETC schon 19 550 Punkte aufgelistet und die Anzahl steigt noch immer.

Angenommen, man entwickelt nun selbst eine Idee für ein Dreieckszentrum und möchte wissen, ob dieses im Verzeichnis schon vorhanden ist. Damit man nicht alle 19 550 Punkte durchlesen und überprüfen muss, ob sich die Konstruktionsvorschrift oder die trilinearen Koordinaten nirgends decken, gibt es auf der Homepage der ETC verschiedene, sehr viel effizientere Wege.

Ein Beispiel ist die Überprüfung mittels Referenzdreieck. So ist etwa ein Dreieck durch seine Seitenlängen $a = 6$, $b = 9$ und $c = 13$ eindeutig vorgegeben. Aufgabe ist es nun, die Position des eigenen, vermutlich neuen, Dreieckzentrums in diesem Referenzdreieck zu bestimmen und dann den gerichteten Normalabstand zur Dreiecksseite a auf 20 Nachkommastellen genau zu bestimmen.

Dieser Wert kann schließlich in einer Tabelle, in der alle bisher im Verzeichnis aufgenommenen Dreieckszentren aufgelistet sind, nachgeschaut werden. Kommt es zu Übereinstimmungen, muss dort überprüft werden, ob das vermutlich neue Dreieckszentrum bereits existiert.

Kommt es zu keiner Übereinstimmung, wurde ein neues Dreieckszentrum gefunden! Allgemein können diese Punkte in der Form $P = u : v : w = f(a; b; c) : f(b; c; a) : f(c; b; a)$ angegeben werden, wobei es sich bei der Funktion f um die sogenannte Dreieckszentrumsfunktion handelt.

2.4.1 Dreieckszentrumsfunktion

Die Dreieckszentrumsfunktion (engl. „triangle center function“) ermöglicht eine allgemeine Angabe von Dreieckszentren in trilinearen Koordinaten in Abhängigkeit der Seitenlängen und/oder Winkel des Bezugsdreiecks ΔABC. Die Herleitung der trilinearen Koordinaten in Kapitel 2.3 war nichts anderes als das Auffinden der entsprechenden Zentrumsfunktionen.

Eine Dreieckszentrumsfunktion (o.B.d.A. nur von den Seitenlängen abhängig) muss drei Bedingungen erfüllen:

Homogenität:
$f(ta; tb; tc) = t^n f(a; b; c)$

Bisymmetrie in b und c:
$f(a; b; c) = f(a; c; b)$

Zyklizität in a, b und c:
$u : v : w = f(a; b; c) : f(b; c; a) : f(c; a; b)$

Das bedeutet, dass die Zentrumsfunktion nicht von der Beschriftung des Dreiecks abhängen darf und auch für zentrisch gestreckte oder gestauchte Dreiecke immer den entsprechenden Punkt beschreiben muss.

Für einen Punkt im Dreieck, der beispielsweise durch die Koordinaten $bc : 1 : ab$ beschrieben wird, kann man *nicht* von einem Dreieckszentrum sprechen. Da sich die Koordinaten u und w des Tripels bei einer zentrischen Streckung des Bezugsdreiecks ΔABC dem Verhältnis entsprechend mitverändern würden, die Koordinate v aber konstant bleiben müsste, wird die Homogenität verletzt.

Auch die Zyklizität ist in diesem Beispiel nicht gegeben. Kennt man eine Koordinate des Tripels, sollte das Ermitteln der beiden anderen durch zyklisches Ersetzen $(a, A, \alpha \rightarrow b, B, \beta \rightarrow c, C, \gamma \rightarrow a, A, \alpha ...)$ möglich sein, was lediglich bei w auf u (oder u auf w) funktioniert.

Die Bisymmetrie wäre für diesen Punkt $P = bc : 1 : ab$ erfüllt. Werden die Beschriftungen der Seiten b und c des Dreiecks ΔABC vertauscht (man könnte dann auch vom Dreieck ΔACB sprechen), dann die Koordinaten nach der ursprünglichen Angabe des Tripels ermittelt, so bleiben die gerichteten Normalabstände auf die jeweiligen Seiten erhalten.

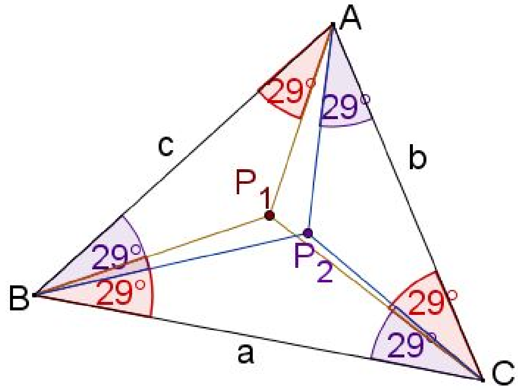


Abbildung 8: Brocard-Punkte

Punkte, bei denen die Bisymmetrie nicht erfüllt ist, sind die sogenannten Brocard-Punkte (in Abbildung 8 dargestellt). Um den ersten Brodard-Punkt P_1 handelt es sich genau dann, wenn die Seiten a, b, c der Reihe nach mit den Strecken $|BP_1|$, $|CP_1|$ und $|AP_1|$, also entgegen dem Uhrzeigersinn, den gleichen Winkel einschließen und folglich $\angle P_1BC = \angle P_1CA = \angle P_1AB$ gilt.

Der zweite Brocard-Punkt P_2 unterscheidet sich vom ersten dadurch, dass der Winkel hier in Richtung des Uhrzeigersinns bestimmt wird und somit $\angle P_2CB = \angle P_2BA = \angle P_2AC$. Wären P_1 und P_2 Dreieckszentren, so würde das bedeuten, dass der erste Brocard-Punkt des Dreiecks ΔABC gleichzeitig der zweite Brocard-Punkt des Dreiecks ΔACB ist. Dies widerspricht der Forderung der Bisymmetrie.

Man könnte das Verletzten der Bisymmetrie auch anhand des trilinearen Tripels des ersten Brocard-Punktes $P_1 = ac^2 : ba^2 : cb^2$ analysieren und würde feststellen, dass die Koordinate u proportional zu a und c^2 ist. Sobald die Beschriftung der Seiten b und c des Bezugsdreiecks ΔABC vertauscht wird, beschreibt die Formel einen anderen Punkt. Die Bisymmetrie ist nur dann erfüllt, wenn die Koordinate u symmetrisch in b und c ist.

Aufgabe 6
Handelt es sich bei dem Eckpunkt $B = 0 : 1 : 0$ des Dreiecks ΔABC um ein Dreieckszentrum?

Der Zugang über die Dreieckszentrumsfunktion eröffnet neue Möglichkeiten, da ein Dreieckszentrum nicht mehr nur als Position in einem zweidimensionalen Raum angesehen wird, sondern als Funktion. Es lässt sich damit sehr viel flexibler arbeiten und Punkte in beliebigen Dreiecken schnell und effizient berechnen.

2.5 Umfüllrätsel

Sogenannte Umfüllrätsel sind eine beliebte Art von Denksportaufgaben. Prinzipiell geht es darum, dass man zwei oder mehr Gefäße zur Verfügung hat, von denen man das Fassungsvermögen kennt, die jedoch keine anderweitigen Markierungen aufweisen, die über den Füllstand Auskunft geben könnten. Nun ist es aber das Ziel, eine bestimmte Menge an Wasser abzumessen, was durch geschicktes Umfüllen erreicht werden kann. Dabei wird ein Gefäß immer entweder vollständig gefüllt oder vollständig geleert und es darf natürlich auch nichts verschüttet werden, damit immer klar ist, wie viel Wasser sich gerade in den Gefäßen befindet.

Eine elegante Herangehensweise an die Lösung dieser Rätsel ist die Verwendung trilinearer Koordinaten. Das Referenzdreieck ist ein gleichseitiges Dreieck ΔABC mit einer Höhe, die dem insgesamt zur Verfügung stehenden Wasser entspricht. Ein Punkt innerhalb dieses gleichseitigen Dreiecks oder auf den Dreiecksseiten wird mit den trilinearen Koordinaten (d_a, d_b, d_c) beschrieben, wobei d_a den Füllstand vom ersten Gefäß beschreibt, d_b den vom zweiten Gefäß und d_c den vom dritten. Der Füllstand ist also durch den Normalabstand zur entsprechenden Dreiecksseite gegeben.

In einem gleichseitigen Dreieck gilt außerdem für jeden beliebigen Punkt (innen oder am Rand), dass die Summe der Normalabstände von den drei Seiten der Höhe des Dreiecks entspricht. Dies erfüllt die Forderung, dass die Gesamtmenge des Wassers unverändert bleibt, also $d_a + d_b + d_c = const$. Innerhalb des Dreiecks werden Parallelen zu allen Dreiecksseiten gezogen, die jeweils einen ganzzahligen Abstand von der Seite haben. Die dadurch entstandenen Schnittpunkte markieren jene Punkte, bei denen alle Abstände ganzzahlig sind.

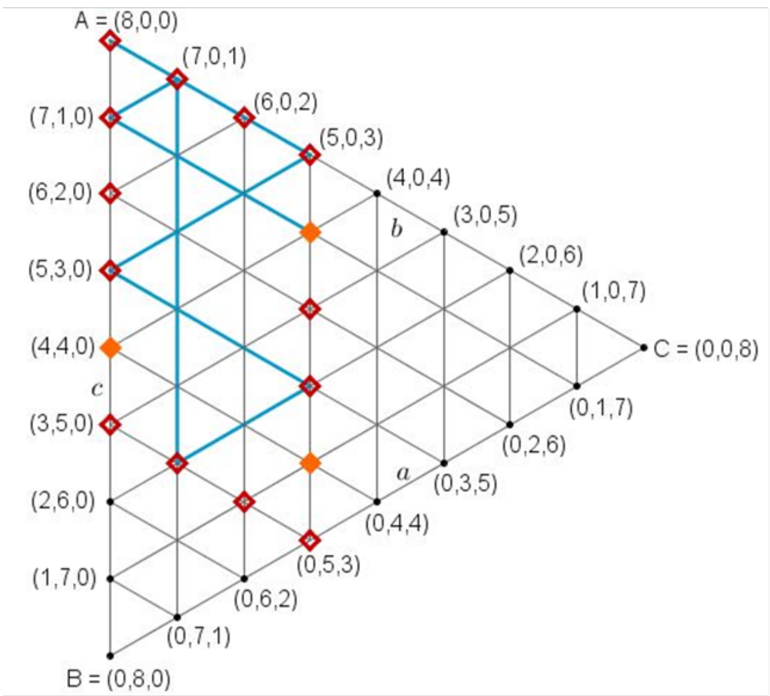
Die Lösung eines solchen Rätsels mithilfe trilinearer Koordinaten soll nun direkt an einem Beispiel demonstriert werden:

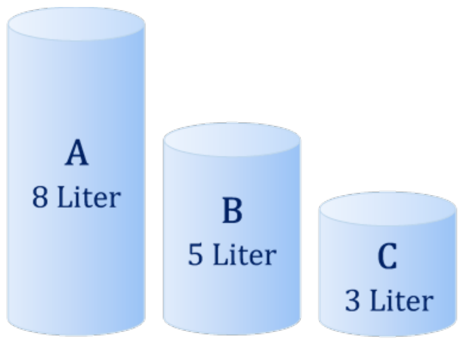
Es stehen drei Gefäße zur Verfügung, wobei das erste (in weiterer Folge **A** genannt) 8 Liter fasst, das zweite (**B**) fasst 5 Liter und im dritten Gefäß (**C**) haben 3 Liter Platz. Das erste Gefäß ist bereits randvoll mit Wasser angefüllt. Die anderen beiden sind leer. Es sollen 4 Liter abgemessen werden.

Aus den Informationen, dass das erste Gefäß randvoll mit Wasser angefüllt ist und ein Fassungsvermögen von 8 Litern hat und die anderen beiden Gefäße leer sind, kann geschlossen werden, dass insgesamt mit 8 Litern gearbeitet wird. Das bedeutet für das gleichseitige Dreieck eine Gesamthöhe von 8 Einheiten. Anschließend werden noch alle Parallelen mit ganzzahligem Abstand zu den Dreiecksseiten eingezeichnet.

Die trilinearen Koordinaten des Eckpunkts $A = (8, 0, 0)$ beschreiben also jene Situation, bei dem Gefäß **A** mit 8 Litern befüllt ist und die anderen beiden Gefäße leer sind, da $d_b = d_c = 0$. Analog erhält man für den Eckpunkt $B = (0, 8, 0)$ die Interpretation, dass Gefäß **B** mit 8 Litern angefüllt ist und die anderen beiden leer sind. Wie aus der Angabe aber zu entnehmen ist, hat das Gefäß **B** nur ein Fassungsvermögen von 5 Litern und deshalb ist dieser Zustand in der Realität nicht umsetzbar.

Durch die Forderungen $d_b \leq 5$ und $d_c \leq 3$ (und $d_a \leq 8$) kann ein Bereich abgegrenzt werden, der die gültigen Füllzustände beschreibt. Dadurch entsteht ein Parallelogramm, wie es in Abbildung 9 durch die roten und orangenen, rauteförmigen Punkte angedeutet ist. Punkte innerhalb dieses Parallelogramms entsprechen zwar gültigen Füllzuständen, können jedoch durch bloßes Umfüllen nicht erreicht werden, da ein Gefäß immer vollständig gefüllt oder geleert werden muss.





Schritte	A	B	C
Start	8	0	0
1. Schritt	5	0	3
2. Schritt	5	3	0
3. Schritt	2	3	3
4. Schritt	2	5	1
5. Schritt	7	0	1
6. Schritt	7	1	0
7. Schritt	**4**	1	3

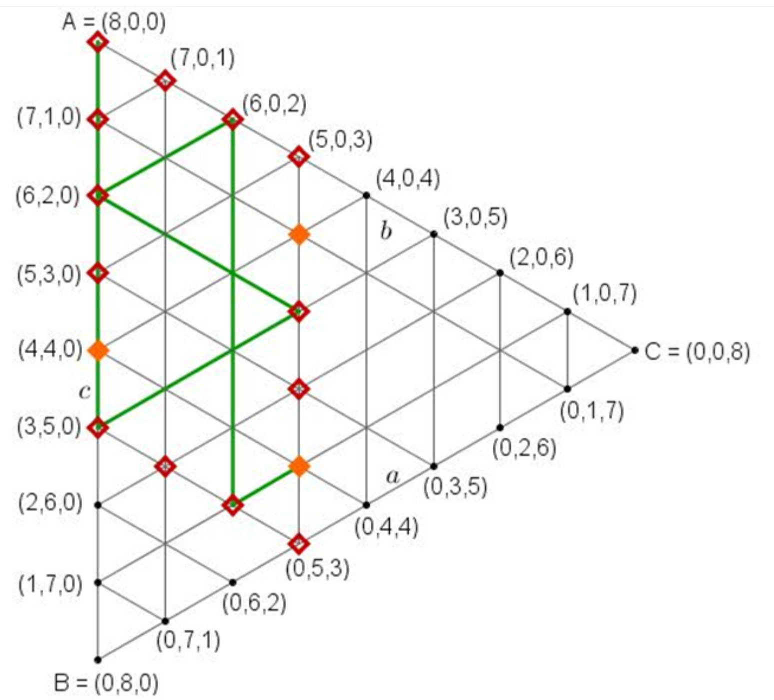
Abbildung 9: Umfüllrätsel mit drei Gefäßen (8, 5 und 3 Liter), die Gesamtwassermenge beträgt 8 Liter, abgemessen werden 4 Liter (hier in sieben Schritten)

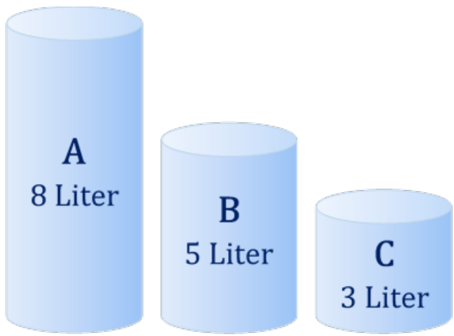
Um 4 Liter abzumessen, muss man also zu einem Punkt auf dem Parallelogramm gelangen, bei dem zumindest eine der drei Koordinaten den Wert 4 annimmt. Das bedeutet nämlich, dass sich dann in mindestens einem der Gefäße genau 4 Liter befinden. Die drei möglichen Punkte sind in Abbildung 9 durch die orangen, ausgefüllten Punkte markiert.

Wird nun mit dem ersten Umfüllschritt begonnen und etwas vom Gefäß **A** ins Gefäß **C** geschüttet, gelangt man zum Punkt $P_1 = (5, 0, 3)$. Dabei kann beobachtet werden, dass die Bewegung auf einer Parallelen zur Dreiecksseite stattfindet, was daran liegt, dass bei einem Umfüllvorgang das dritte Gefäß unberührt bleibt und somit der Abstand zur entsprechenden Seite gleich bleiben muss. In diesem Fall findet die Bewegung direkt auf der Seite b statt, da $d_b = 0$ gelten muss.

Ausgehend vom Punkt $P_1 = (5, 0, 3)$ wird der komplette Inhalt des Gefäßes **C** ins Gefäß **B** geleert. Der resultierende Punkt P_2 muss sich auf der zur Dreiecksseite a parallelen Strecke mit der Eigenschaft $d_a = 5$ befinden, da bei diesem Umfüllvorgang der Füllstand von Gefäß **A** unverändert bleibt. Für jede Abstandseinheit, die sich der Punkt von der Dreiecksseite b entfernt, nähert er sich der Dreiecksseite c an, da $d_b + d_c$ erhalten bleiben muss. Schließlich gelangt man zum Punkt $P_2 = (5, 3, 0)$.

Wird diese Vorgehensweise weiter verfolgt, gelangt man durch erneutes Umschütten von Gefäß **A** nach Gefäß **C** zum Punkt $P_3 = (2, 3, 3)$. Nun wird vom Gefäß **C** so viel nach **B** geschüttet, bis es voll ist, was durch die Bewegung auf der Parallelen mit der Eigenschaft $d_a = 2$ beschrieben wird und zum Punkt $P_4 = (2, 5, 1)$ führt. Dann wird der gesamte Inhalt von Gefäß **B** wieder nach **A** geschüttet und liefert $P_5 = (7, 0, 1)$. Schließlich wird der eine Liter aus Gefäß **C** nach **B** geschüttet ($P_6 = (7, 1, 0)$) und dann erneut 3 Liter von Gefäß **B** nach **C**, wodurch im Gefäß **A** genau die gewünschten 4 Liter übrig bleiben. Auch die trilinearen Koordinaten liefern das gewünschte Ergebnis $P_7 = (4, 1, 3)$.





Schritte	**A**	**B**	**C**
Start	8	0	0
1. Schritt	3	5	0
2. Schritt	3	2	3
3. Schritt	6	2	0
4. Schritt	6	0	2
5. Schritt	1	5	2
6. Schritt	1	**4**	3

Abbildung 10: Umfüllrätsel mit drei Gefäßen (8, 5 und 3 Liter), insgesamt stehen 8 Liter zur Verfügung, abgemessen werden 4 Liter (hier in sechs Schritten)

Wie die unterschiedlichen orangen Punkte schon zeigen, muss die Lösung nicht eindeutig sein. Abbildung 10 zeigt einen Lösungsweg, bei dem man das Ziel schon in sechs Schritten erreicht und somit einen Umfüllvorgang weniger vornehmen muss. Außerdem sind die gewünschten 4

Liter schließlich im Gefäß **B** vorzufinden.

In welchem der Gefäße sich die gewünschte Menge an Wasser zum Schluss befindet, ist besonders dann wichtig, wenn man ein Umfüllrätsel bearbeitet, bei dem man nur zwei Gefäße zur Verfügung hat und das dritte Gefäß als Modell für einen Brunnen oder eine andere Wasserquelle dient. Es kann nicht von einer Lösung des Rätsels gesprochen werden, wenn die gewünschte Wassermenge schließlich im Brunnen vorzufinden ist. Ergänzende Informationen dazu werden am Ende des Kapitels angeführt.

Abbildung 11 zeigt ein weiteres Umfüllrätsel. Es stehen wieder drei Gefäße zur Verfügung, diesmal aber mit den Fassungsvermögen von 8, 7 und 6 Litern. Außerdem wird insgesamt mit 10 Litern Wasser gearbeitet, weshalb das gleichseitige Referenzdreieck eine Höhe von 10 Einheiten besitzt. Um einen weiteren Blickwinkel auf die Verwendung der trilinearen Koordinaten zu bekommen, wurden hier nur die Eckpunkte als Tripel angeschrieben. Für die anderen Punkte sind in Verlängerung der Parallelen zu den Seiten die jeweiligen Koordinatenwerte eingezeichnet, die jeweils den Normalabstand zur entsprechenden Seite angeben.

Da keines der drei Gefäße 10 Liter fassen kann, ist es nicht möglich einen Eckpunkt zu erreichen. Die rauteförmigen Punkte, die den Bereich der gültigen Füllzustände begrenzen, bilden hier also kein Parallelogramm, sondern ein (unregelmäßiges) Sechseck. Je nach Fassungsvermögen der Gefäße und dem insgesamt zur Verfügung stehenden Wasser kann es sich um ein Parallelogramm, Fünf- oder Sechseck handeln.

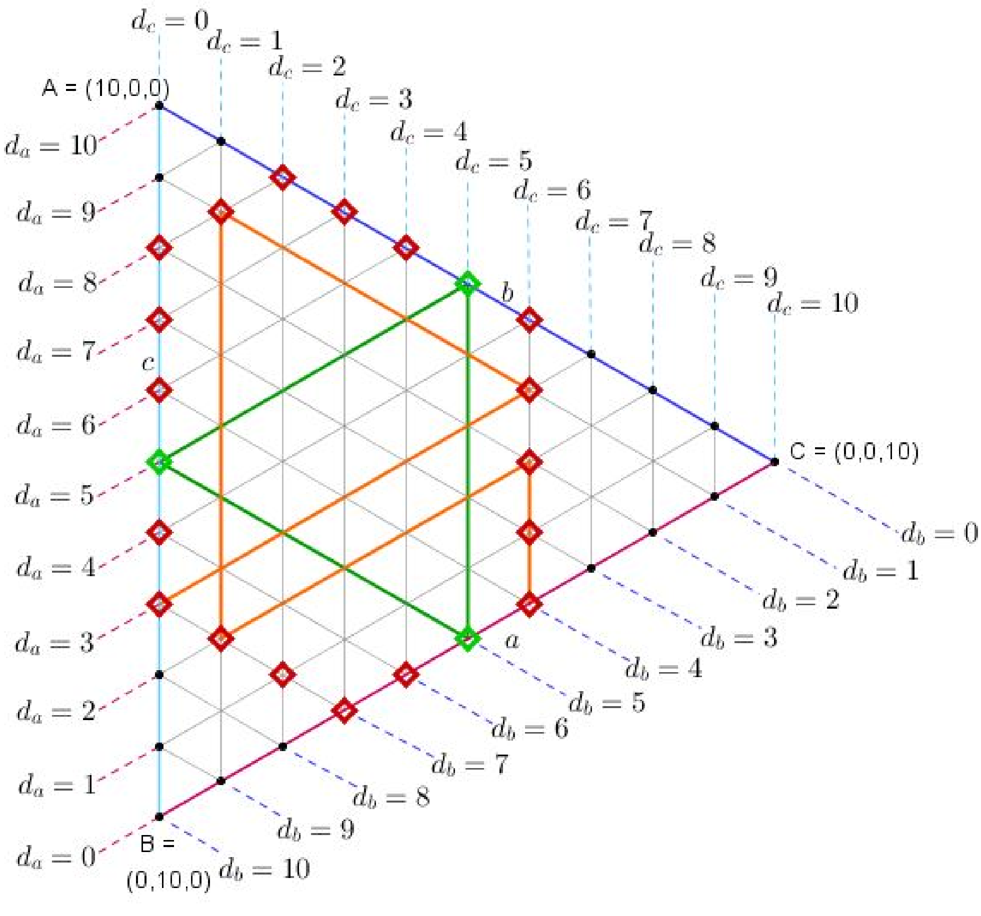


Abbildung 11: Umfüllrätsel mit drei Gefäßen (8, 7 und 6 Liter), insgesamt stehen 10 Liter zur Verfügung

Auffallend ist beim Beispiel aus Abbildung 11 außerdem, dass nicht alle Punkte von allen Startpunkten aus erreicht werden können. So bilden die Punkte $(5, 5, 0)$, $(5, 0, 5)$ und $(0, 5, 5)$ einen Kreislauf, was bedeutet, dass diese Punkte nur dann erreicht werden können, wenn der Startpunkt auf einem dieser durchlaufenen Punkte liegt. Da diese drei Punkte die einzigen Randpunkte sind, die den Koordinatenwert 5 aufweisen, bedeutet dies folglich, dass es unmöglich ist mit diesen drei Gefäßen (8, 7 und 6 Liter) und dieser Wassermenge (10 Liter) 5 Liter abzumessen.

Alle anderen Werte können erreicht werden. Im Folgenden wird ein Beispiel genannt, bei dem man am Punkt $(3, 7, 0)$ beginnt. Das 7-Liter-Gefäß ist also ganz voll und im 8-Liter-Gefäß sind noch 3 Liter. Es wird so lange umgefüllt bis alle Werte von 1 bis 8 (mit der Ausnahme 5) zumindest einmal vorgekommen sind.

Eine solche mögliche Lösung könnte schon in fünf Schritten erreicht werden: $(3, 7, 0) \to (3, 1, 6) \to (8, 1, 1) \to (2, 7, 1) \to (2, 2, 6) \to (0, 4, 6)$

Als etwas abgeänderte Version des Rätsels kann die Aufgabe auch so gestellt werden, dass nur zwei Gefäße zur Verfügung stehen, dafür hat man aber beispielsweise einen Brunnen zur Verfügung, von dem man sich immer beliebig viel Wasser holen kann beziehungsweise das Wasser aus den Gefäßen dort ausleeren kann. Diese Variante lässt sich im Prinzip aber auf die Variante mit drei Gefäßen zurückführen. Dafür muss man nur annehmen, dass der Brunnen das dritte Gefäß ist und gleichzeitig ein sehr hohes Fassungsvermögen hat, sowie immer genügend Wasser beinhaltet, das von dort geholt werden könnte.

Bei genauerer Überlegung erkennt man, dass das benötigte Fassungsvermögen sehr leicht eingeschränkt werden kann. So reicht es in jedem Fall aus, wenn es der Summe der Fassungsvermögen der beiden anderen Gefäße entspricht.

Aufgabe 7
Drei Gefäße haben jeweils ein Fassungsvermögen von 12, 8 beziehungsweise 5 Litern. Sie haben keine Skala, an der abgelesen werden könnte, wie viel Wasser sich gerade in den Gefäßen befindet. Das Gefäß, das 12 Liter fasst, ist bis zum Rand mit Wasser angefüllt. Die anderen beiden sind leer. Wie kann man durch geschicktes Umfüllen genau 6 Liter Wasser abmessen?

Es soll zum Schluss auch noch bemerkt werden, dass es nicht nötig ist, das ganze gleichseitige Dreieck zu zeichnen. Es kann auch nur mit dem Bereich der gültigen Füllzustände, der eben einem Parallelogram, Fünf- oder Sechseck entsprechen kann, gearbeitet werden.

3 Baryzentrische Koordinaten

3.1 Defintion

Baryzentrische Koordinaten werden im deutschsprachigen Raum auch Schwerpunktskoordinaten genannt. Sie setzten sich aus drei Verhältniskoordinaten zusammen, die im Folgenden r, s und t genannt werden und in Tripeln $r : s : t$ angegeben werden.

Die drei Koordinaten des Tripels $r : s : t$ geben die „Massen“ an den Eckpunkten A, B und C des Dreiecks ΔABC an, sodass sich der Massenmittelpunkt des Dreiecks genau an dem Punkt befindet, der durch das Tripel beschrieben werden soll. Es wird auch häufig mit der Interpretation gearbeitet, dass die baryzentrischen Koordinaten $r : s : t$ proportional zu den Flächen der Teildreiecke ΔAPB, ΔBPC und ΔCPA sind, wobei P der gesuchte Punkt ist. Gilt $r = s = t$, sind die Massen gleichverteilt. Dies bedeutet, dass es sich um den gewöhnlichen Schwerpunkt des Dreiecks handelt.

Aufgabe 8
Wie können die Eckpunkte eines allgemeinen Dreiecks ΔABC in baryzentrischen Koordinaten angegeben werden?

3.2 Zusammenhang der baryzentrischen mit den trilinearen Koordinaten

Der Zusammenhang von trilinearen und baryzentrischen Koordinaten kann besonders gut am Beispiel des Schwerpunkts gezeigt werden. Um für Klarheit zu sorgen, werden die Tripel in diesem Kapitel mit T für Trilineare Koordianten und mit B für Baryzentrische Koordinaten indiziert.

Die trilinearen Koordinaten für den Schwerpunkt lauten $S_T = bc : ac : ab$. Das Tripel kann mit der Konstante $\frac{1}{abc}$ multipliziert werden und liefert schließlich $S_T = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. Für die baryzentrischen Koordinaten konnte gerade $S_B = 1 : 1 : 1$ ermittelt werden. Wird nun die erste Koordinate des trilinearen Tripels mit der Dreiecksseite a multipliziert, die zweite mit b und die dritte mit c kommt man direkt von den trilinearen zu den baryzentrischen Koordinaten.

Dieser Zusammenhang von baryzentrischen und trilinearen Koordinaten gilt allgemein für beliebige Punkte: $P_B = r : s : t = au : bv : cw$, wobei $P_T = u : v : w$ der entsprechende Punkt in trilinearen Koordinaten ist.

Aufgabe 9
Der Symmedianenpunkt ist in trilinearen Koordinaten durch das Tripel $a : b : c$ gegeben. Wie lautet das Tripel in baryzentrischen Koordinaten?

3.3 Merkwürdige Geraden

Die bekannteste merkwürdige Gerade im Dreieck ist die Eulersche Gerade. Sie liefert die Information, dass unter anderem der Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt und der Schwerpunkt immer auf einer Geraden liegen. Außerdem ist bekannt, in welchen Streckenverhältnissen die Punkte zueinander liegen.

Ob Dreieckszentren auf einer Geraden liegen, lässt sich besonders schnell und elegant mit baryzentrischen Koordinaten lösen. Das folgende Beispiel soll zeigen, wie man überprüfen kann, ob Schwerpunkt, Spieker-Punkt und Inkreismittelpunkt auf einer Geraden liegen.

Für den Schwerpunkt S eines Dreiecks ΔABC lauten die baryzentrischen Koordinaten $S = 1 : 1 : 1$. Möchte man sie normieren, sodass $r + s + t = 1$ erhält man das Tripel $S = \frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$. Das Normieren ermöglicht die Angabe des Punktes in Abhängigkeit der Eckpunkte und liefert $S = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}(A + B + C)$.

Der Spieker-Punkt S' beschreibt den Massenmittelpunkt des Dreiecksumfangs. Die Masse am Eckpunkt A entspricht der Summe der Seiten b und c, die Masse am Eckpunkt B der Summe der Seiten a und c und analog für den dritten Eckpunkt. Dies führt zu den baryzentrischen Koordinaten $S' = b+c : c+a : a+b$. Die Normierung ergibt sich aus der Summe der Koordinaten $b + c + c + a + a + b = 2(a + b + c) = 2u$, wobei u dem Umfang des Dreiecks entspricht. Für den Spieker-Punkt ergibt sich schließlich $S' = \dfrac{b+c}{2u}A + \dfrac{c+a}{2u}B + \dfrac{a+b}{2u}C$.

Als letztes wird der Inkreismittelpunkt I betrachtet. Dieser kann sehr leicht aus den trilinearen Koordinaten $I_T = 1 : 1 : 1$ abgeleitet werden: $I_B = a : b : c$. Man sieht, dass die den Eckpunkten zugeordneten Massen für den Inkreismittelpunkt den gegenüberliegenden Seitenlängen entsprechen. Um die Gewichtung der Eckpunkte des Dreiecks ΔABC zu symbolisieren, wurden sie in Abbildung 12 unterschiedlich groß gezeichnet.

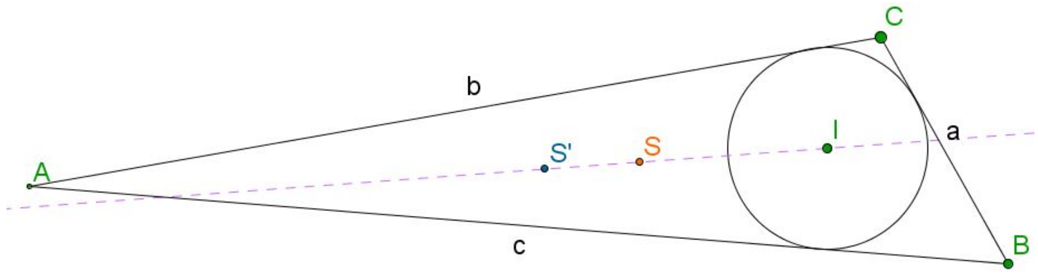


Abbildung 12: Inkreismittelpunkt

Mithilfe einer Normierung durch den Umfang u gelangt man schließlich zum Inkreismittelpunkt $I = \dfrac{a}{u}A + \dfrac{b}{u}B + \dfrac{c}{u}C$.

Nun soll die Lagebeziehung der drei Punkte S, S' und I thematisiert werden. Abbildung 12 zeigt, dass S' tatsächlich eine andere Position als S einnimmt, was man besonders gut bei langgestreckten Dreiecken nachvollziehen kann. Außerdem ist bereits ersichtlich, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen. Jedoch soll dies auch noch allgemein rechnerisch überprüft werden.

Hierfür wird der Punkt S' mithilfe einer „kreativen Null“ umgeformt auf

$$\left(\frac{b+c+a}{2u} - \frac{a}{2u}\right)A + \left(\frac{c+a+b}{2u} - \frac{b}{2u}\right)B + \left(\frac{a+b+c}{2u} - \frac{c}{2u}\right)C = \tag{25}$$

$$\frac{u}{2u}(A+B+C) - \frac{1}{2u}(aA + bB + cC) \tag{26}$$

Einsetzen von Schwerpunkt S und Inkreismittelpunkt I führt zu

$$S' = \frac{3}{2}S - \frac{1}{2}I \tag{27}$$

Aus der Vektorrechnung ist bekannt, dass eine Subtraktion von zwei Punkten einen Richtungsvektor angibt. Wird nun auf beiden Seiten S subtrahiert, ergibt sich

$$S' - S = \frac{1}{2}(S - I) \tag{28}$$

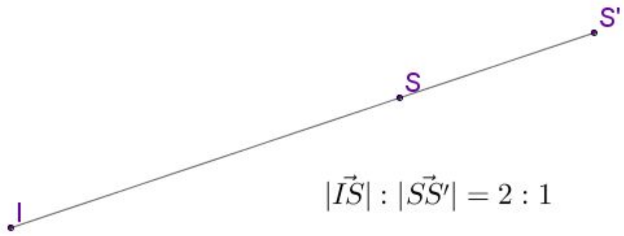


Abbildung 13: Kollineare Punkte I, S und S'

Da die Vektoren $\vec{SS'}$ und $\vec{IS}$ Vielfache voneinander sind und deshalb $\vec{SS'} \parallel \vec{SI}$, müssen die drei Punkte kollinear sein. Außerdem kann man aus der letzten Gleichung ablesen, dass die Strecke $\overline{IS}$ doppelt so lang ist, wie $\overline{SS'}$. Dies zeigt, dass das Teilungsverhältnis, mit dem der Punkt S die Strecke $\overline{IS'}$ teilt, $2 : 1$ beträgt.

4 Musterlösungen

Lösung 1
Abbildung 14 zeigt die richtigen Vorzeichen. Es ist ersichtlich, dass es keine trilinearen Tripel gibt, deren drei Koordinaten alle negativ sind.

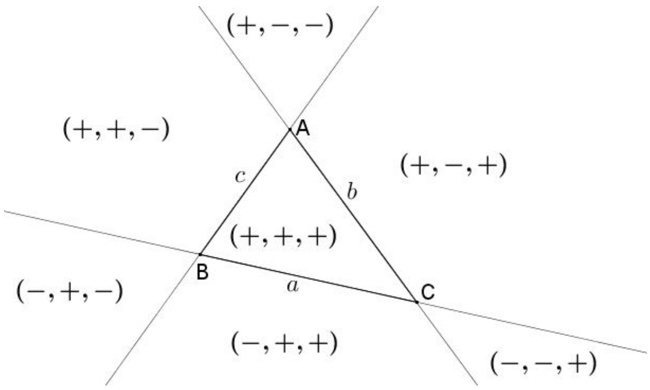


Abbildung 14: Lösung zu den Vorzeichen

Lösung 2
Eckpunkt $B = 0 : d_b : 0 = 0 : 1 : 0 = 0 : kd_b : 0$
Eckpunkt $C = 0 : 0 : d_c = 0 : 0 : 1 = 0 : 0 : kd_c$

Lösung 3
Hier darf man nicht übersehen, dass die *Normalabstände* zu den Dreiecksseiten gleich groß sein sollen. Es handelt sich also *nicht* um den Mittelpunkt der Seite b. Die Lösung ist aber trotzdem relativ leicht zu ermitteln und basiert auf der Tatsache, dass jeder Punkt auf einer Winkelsymmetralen zu den beiden jeweiligen Schenkeln den gleichen Normalabstand hat. Eine mögliche Lösung, die sich also durch den Schnittpunkt der Winkelsymmetralen durch den Eckpunkt B mit der gegenüberliegenden Seite b ergibt, ist durch Abbildung 15 veranschaulicht.

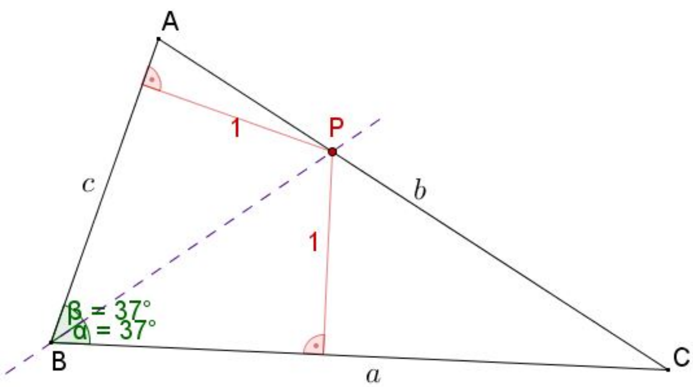


Abbildung 15: Musterlösung zu Aufgabe 3

Lösung 4
Der halbe Umfang $s = \frac{a+b+c}{2}$ beträgt $162,25$. Eingesetzt in Formel 5 ergibt sich die Normierungskonstante $k = 14$. Dies bedeutet für die trilinearen Koordinaten $2 : 3 : 1 = kd_a : kd_b : kd_c$, dass die tatsächlichen Abstände zu den Dreiecksseiten 28, 42 und 14 Längeneinheiten betragen.

Lösung 5
Da die Normalabstände zu den Dreiecksseiten jeweils genau dem Radius des Inkreises entsprechen, kann der Inkreismittelpunkt entweder durch $I = r : r : r$ oder gekürzt durch $I = 1 : 1 : 1$ angegeben werden. Da trilineare Koordinaten nicht eindeutig sind, beschreiben all jene Punkte den Inkreismittelpunkt, für die $u = v = w$ gilt.

Lösung 6
Beim Eckpunkt B eines beliebigen Dreiecks ΔABC handelt es sich nicht um ein Dreieckszentrum. Lediglich die Homogenität würde erfüllt werden. Durch das Verletzen der Bisymmetrie und Zyklizität kann der Punkt nicht in Form einer Dreieckszentrumsfunktion angegeben werden.

Lösung 7
Die Lösung wird analog zu den Beispielen in Kapitel 2.5 mit trilinearen Koordinaten hergeleitet. Wie Abbildung 16 zeigt, ist der Bereich der möglichen Füllzustände in diesem Fall ein unregelmäßiges Fünfeck. Die Füllmenge der Gefäße wird mithilfe von trilinearen Tripeln (d_a, d_b, d_c) angegeben, wobei d_a das im 12-Liter-Gefäß befindliche Wasser beschreibt, d_b das Wasser im Gefäß mit 8 Litern Fassungsvermögen und d_c die Menge des Wassers im 5-Liter-Gefäß. Um 6 Liter abzumessen, kann man folgendem Weg folgen: $(12, 0, 0) \to (4, 8, 0) \to (4, 3, 5) \to (9, 3, 0) \to (9, 0, 3) \to (1, 8, 3) \to (1, 6, 5)$. An diesem Punkt angelangt, befinden sich im zweiten Gefäß mit einem Fassungsvermögen von 8 Litern genau die gewünschten 6 Liter.

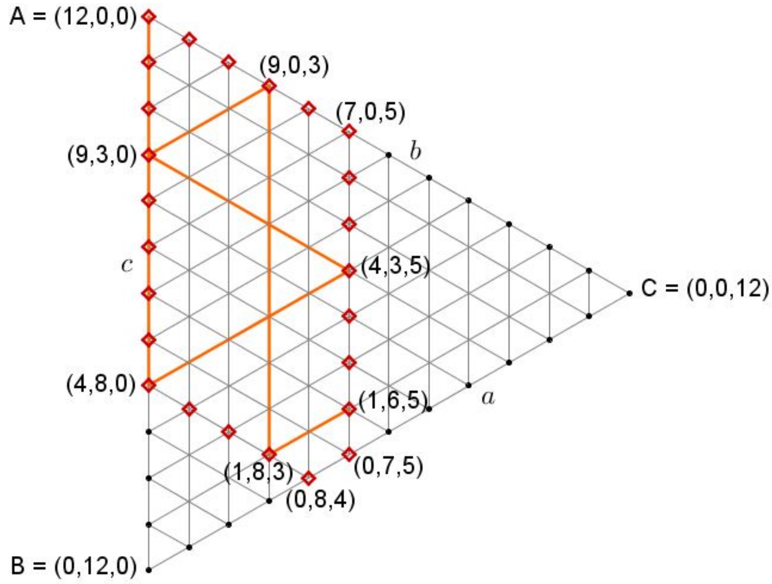


Abbildung 16: mögliche Lösung des Umfüllrätsels

Lösung 8
Wenn das baryzentrische Tripel den Eckpunkt A beschreiben soll, müssen die Massen an den Eckpunkten des Dreiecks so verteilt werden, dass der Massenmittelpunkt genau auf A zu liegen kommt. Dies ist dann der Fall, wenn die Masse für die Eckpunkte B und C verschwindet. Ein mögliches baryzentrisches Tripel für den Eckpunkt A ist also $A = 1 : 0 : 0$. Analog erhält man $B = 0 : 1 : 0$ und $C = 0 : 0 : 1$.

Lösung 9
Alle Vielfachen des Triples $a^2 : b^2 : c^2$ beschreiben den Symmedianenpunkt in baryzentrischen Koordinaten.

Literatur

[1] Kimberling, Clark: *Triangle centers and central triangles.* Utilitas Mathematica Publishing Incorporated, 1998.

[2] Kimberling, Clark: *Triangle centers as functions.* The Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1993 Oct 1:1269-86.

[3] Rev. Whitworth, William Allen: *Trilinear coordinates and other methods of modern analytical geometry of two dimensions: an elementary treatis.* Deighton, 1866.

[4] Embacher, Franz: *Die Schwerpunkte des Dreiecks.* Mathematische Semesterberichte, 2008, 55. Jg., Nr. 2, S. 131-148.

[5] `http://mathworld.wolfram.com/TrilinearCoordinates.html`

[6] `http://mathworld.wolfram.com/ExactTrilinearCoordinates.html`

[7] `http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html`

[8] `http://mathworld.wolfram.com/TriangleCenter.html`

[9] `http://mathworld.wolfram.com/TriangleCenterFunction.html`

[10] `http://mathworld.wolfram.com/KimberlingCenter.html`

[11] `http://www.vivat-geo.de/Pdf-Dateien/Schwerpunktskoordinaten.pdf`

[12] `http://www.minsocam.org/ammin/am49/am49_926.pdf`

[13] `http://www.mcs.uvawise.edu/msh3e/resources/geometryBook/22Trilinear Coordinates.pdf`

[14] `http://140.127.223.1/senior/speech/95/952/960628/%B0%AA%A4%A4%BC%C6%BE%C7%B1%D0%AEv%AC%E3%B2%DF%C1%BF%B8q.pdf`

[15] `https://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/t/t361.htm`

[16] `https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.rmjm/1181072493`

[17] `https://web.archive.org/web/20120419171900/http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`

[18] `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`

[19] `https://www.youtube.com/watch?v=9fZB4s38Ygg`

[20] `https://www.youtube.com/watch?v=0Oef3MHYEC0`

[21] `https://www.cut-the-knot.org/triangle/glasses.shtml`

[22] `http://www.schulmodell.eu/unterricht/84-unterrichtsfaecher/mathematik-unterricht/mathematik-themen/mathelexikon/1882-fermatpunkt.html`