Analysis für PhysikerInnen I
Universität Wien, WS 2020/21

Harold C. Steinacker

Fakultät für Physik, Universität Wien
Boltzmanngasse 5, A-1090 Wien

Contents

1 Einleitung

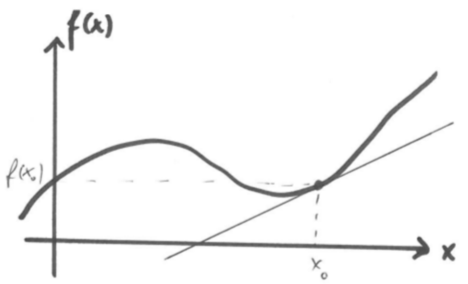
Mathematik ist die Sprache der Physik. Die Basis dazu bilden die Grundvorlesungen Analysis I sowie lineare Algebra.

Ziel dieser Vorlesung ist es, ein solides Verständnis der Analysis I für Studierenden der Physik & Naturwissenschaften zu vermitteln. Die wichtigen Themen der Analysis I sind

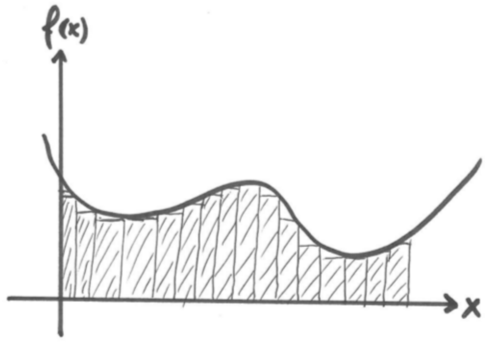
- Funktionen in einer Variable
- Grenzwertbetrachtungen
- Differential- und Integralrechnung auf $\mathbb{R}$

z.B:

1. Ableitung einer reellen Funktion als Grenzwert der Sekantensteigung



2. Integration einer reellen Funktion als Grenzwert der Rechtecksflächen unter dem Funktionsgraphen



3. Definition der Exponentialfunktion als Grenzwert einer Summe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

dazu benötigt man eine solide Basis:

- saubere *Definitionen* der grundlegenden Begriffe, und
- *Herleitung (=Beweise !)* der benötigten Eigenschaften

In der *Mathematik* wird alles lückenlos bewiesen, ausgehend von wenigen Axiomen. Dies ist anfangs etwas mühsam, letztlich aber sehr weitreichend, und sehr lehrreich.

In der *Physik* ist diese Perfektion im allgemeinen nicht möglich, und oft auch nicht sinnvoll. Die Problemstellung ist oft nicht genau definiert, die passende mathematischen Formulierung eines physikalischen Problems ist nicht immer evident und ist meist nur Idealisierung. Eine "Reduktion auf das Wesentliche" ist oft sogar wünschenswert. Manchmal ist eine exakte Lösung auch einfach zu schwierig, und Näherungen sind notwendig.

Dennoch: Mathematik ist die Sprache der Physik, und **das** entscheidende Werkzeug in den Naturwissenschaften

Die Leistungsfähigkeit dieses Werkzeugs ist bemerkenswert; hierzu ein paar Zitate

> "Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik verfaßt" (G. Galilei)
>
> "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences" (E. Wigner)
>
> "Mathematics is trivial, but I can't do my work without it" (R. Feynman)

Daher: ein *solides Verständnis* und die korrekte Anwendung der mathematischen Grundlagen ist für die Physik essentiell.

abschreckendes Beispiel:

"Paradox der Umordnung", am Beispiel der Logarithmus-Reihe (mehr dazu später):

Jede Formelsammlung enthält die Formel

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ...$$

also

$$\ln(2) = \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\frac{5}{6}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} - ... \; < \frac{5}{6}$$

andererseits ist die Reihenfolge bei der Addition egal (möchte man meinen), also sollten wir dies umordnen können, mit

$$\ln(2) = \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\frac{5}{6}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}}_{>0} + ... \; > \frac{5}{6}$$

wo ist der Fehler ???

Ziel dieser VL ist es, ein solides Verständnis der Analysis I zu vermitteln, angepaßt an die Bedürfnisse der Physik & Naturwissenschaften.

Der Aufbau dieses VL-Skriptes ist eng an eine Vorlesung von Simone Warzel (TU München) angelehnt. Der Inhalt ist weitgehend "kanonisch", und kann auch aus einer Vielzahl von vergleichbaren Quellen erlernt werden, z.B.

References

[1] O. Forster, Analysis I, Vieweg (Klassiker, sehr empfehlenswert, mathematisch rigoros) steht als eBook der Universitätsbibliothek zur Verfügung

[2] D. Grieser, Analysis I, Univ. Oldenburg (gutes Skript, creative commons) (mathematisch rigoros)

[3] K. Königsberger "Analysis 1" Springer (gutes Lehrbuch, Math.)

[4] Kerner/Wahl Mathematik für Physiker (ca. erste 100 Seiten relevant für Analysis I)

einfachere und leichter lesbare Bücher (aber etwas oberflächlich, Beweise fehlen) sind z.B

[5] Strampp, "Höhere Mathematik 2"

[5] Weltner K. Weltner, "Mathematik für Physiker 1"

Detailliertere, weiterführende Lehrbücher (für ambitionierte): z.B.

[6] J. Taylor, "Foundations of Analysis" (online-skript) (beinhaltet Analysis I und II)

[7] A. Zorich "Analysis I", Springer, Berlin Heidelberg 2006 steht als eBook der Universitätsbibliothek zur Verfügung

2 Notation und Grundbegriffe

2.1 Aussagen & Abkürzungen

Abkürzungen für häufig auftretende Wendungen durch “Quantoren”:

$\forall$ ... “für alle”

$\exists$ ... “es gibt”

$\exists_1$ ... “es gibt genau ein”

Verknüpfung von 2 Aussagen A, B durch “Junktoren”:

- Implikation: $A \Rightarrow B$ ... “wenn A, dann B” oder “A impliziert B”
- Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ ... “A genau dann wenn B” oder “A ist äquivalent zu B”

Beispiele:

- $\forall n \in \mathbb{N}:\ 2n$ ist gerade
- $x > 0$ und $y > 0 \quad \Rightarrow \quad x + y > 0$

Notation für Definitionen:

$A := B$ ... “A ist definiert durch B”

Beispiele:

- $x := 1$ “Die Variable x wird als 1 definiert”
- $f(x) := 2x + 1$ “Die Funktion $f(x)$ wird als $2x + 1$ definiert”

2.2 Mengen

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte

Notation:

$x \in M$ ... “x ist Element von M”

$x \notin M$ ... “x ist nicht Element von M”

$M \subset N$ ... “M ist Teilmenge von N”

$M \subsetneq N$ ... "M ist echte Teilmenge von N"

leere Menge: $\emptyset$ (beachte: es gilt stets $\emptyset \subset M$)

Beispiele:

Zahlenmengen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ ... natürliche Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ... natürliche Zahlen mit 0
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ... ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ ... rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ ... reelle Zahlen (später mehr dazu)
- $\mathbb{C}$ ... komplexe Zahlen (später mehr)

Mengenoperationen:

$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ ... Schnittmenge

$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ ... Vereinigungsmenge

$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ ... Differenzmenge

Kartesisches Produkt = Menge der geordneten Paare

$$A \times B = \{(m, n) \mid m \in A \text{ und } n \in B\}$$

analog:

$$\begin{aligned} &A^n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in A\} = A \times ... \times A \\ &A^2 = A \times A \end{aligned} \tag{2.1}$$

Beispiele:

$A = \{2, 4, 6, ...\}$ ... Menge aller geraden Zahlen

$B = \{1, 3, 5, ...\}$ ... Menge aller ungeraden Zahlen

$A \cup B = \mathbb{N}$

$A \cap B = \emptyset$

$\mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \mathbb{N}$

Mit Hilfe der Ordnungsrelation $a < b$ für reelle Zahlen a, b definiert man

Intervalle:

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ ... “abgeschlossenes Intervall”

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ... “offenes Intervall”

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ ... “halboffenes Intervall”

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ ... “halboffenes Intervall”

$(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$

$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$

$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

häufig verwendete Schreibweisen:

$\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$

$\mathbb{R}_0^+ = [0,\infty)$

$\mathbb{R}^- = (-\infty,0)$

$\mathbb{R}_0^- = (-\infty,0]$

2.3 Abbildungen

zentrales Konzept der Mathematik:

Definition 2.1. *Seien M, N Mengen.*

Eine Abbildung f von M nach N ordnet jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zu:

$$\begin{aligned} f:\ & M \to N \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Für $N = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) wird f auch Funktion genannt.

Bezeichnungen:

M ... *Definitionsbereich*

N ... *Wertebereich*

$f(M) := \{y \in N;\ \exists x \in M: \quad f(x) = y\} \subset N$ ... *Bild von f*

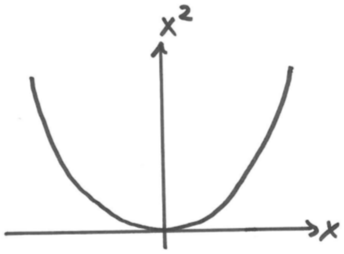
Für $A \subset M$ heißt $f(A) := \{y \in N;\ \exists x \in A: \quad f(x) = y\} \subset N$ ... Bild von A

Für $B \subset N$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in M;\quad f(x) \in B\} \subset M$ ... Urbild von B

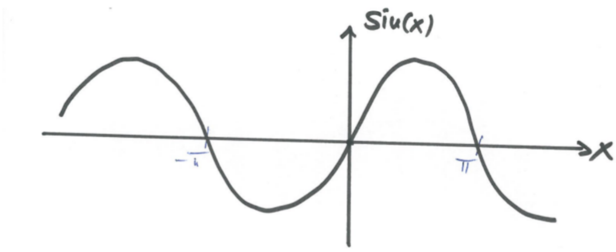
Der Graph von $f : M \to N$ ist die Menge $\{(x, f(x)) : \quad x \in M\} \subset M \times N$.

Beispiele:

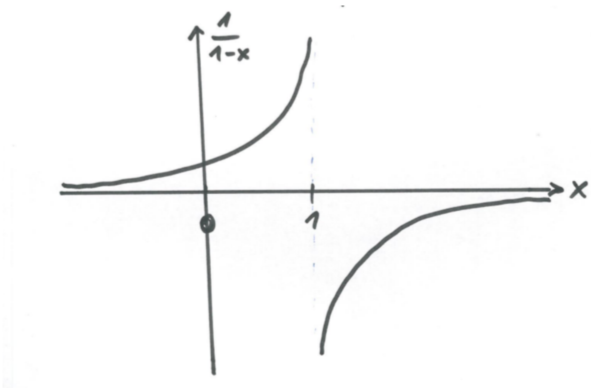
- $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$



- $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$



- $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1-x}$



Definition 2.2. *Sei M eine Menge. Eine Folge in M ist eine Abbildung $a: \ \mathbb{N} \to M$.*

Man schreibt $(a_1, a_2, ..)$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder einfach (a_n).

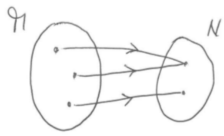
(Folgen können auch mit dem Index 0 beginnen, also $a : \mathbb{N}_0 \to M$, oder in anderer Schreibweise $(a_0, a_1, a_2, ...)$.

Definition 2.3. *Eine Abbildung $f :\ M \to N$ heißt*

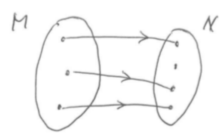
- *surjektiv (oder Surjektion), wenn $f(M) = N$*
- *injektiv (oder Injektion), wenn $\forall y \in f(M)\ \exists_1\ x \in M :\quad y = f(x)$*
- *bijektiv (oder Bijektion), wenn sie surjektiv und injektiv ist*

Beispiele:

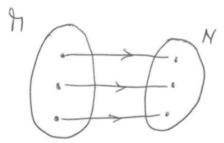
- surjektiv aber nicht injektiv



- injektiv aber nicht surjektiv



- bijektiv



- Sei $f(x) := x^2$. Betrachtet man $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist f weder injektiv noch surjektiv. betrachtet man jedoch $f :\ [0, \infty) \to \mathbb{R}$, so ist f injektiv, betrachtet man $f :\ [0, \infty) \to [0, \infty)$, so ist f bijektiv.

Praktische Bedeutung von Injektivität etc. für das Lösen von Gleichungen:

Betrachten wir die Gleichung $y = f(x)$, für eine gegebene Abbildung $f : M \to N$.
Zu gegebenem $y \in N$ möchten wir eine Lösung $x \in M$ finden:

- f injektiv $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat höchstens eine Lösung für jedes $y \in N$
- f surjektiv $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat mindestens eine Lösung für jedes $y \in N$
- f bijektiv $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat genau eine Lösung für jedes $y \in N$

Zum Beispiel hat $y = x^2$ genau eine Lösung $x \in [0, \infty)$ für jedes $y \in [0, \infty)$, nämlich $x = \sqrt{y}$.

Definition 2.4. *Seien M, N, L Mengen, und $f : M \to N$ eine Abbildung von M nach N, sowie $g : N \to L$ eine Abbildung von N nach L.*

Dann definiert man die Komposition ("Hintereinanderschaltung") $g \circ f : M \to L$ als die Abbildung, die jedem $x \in M$ den Wert $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ zuordnet. Diagrammatisch funktioniert das so:

$$\begin{array}{rccccc} g \circ f : & M & \to & N & \to & L \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

(lies: "g nach f")

Praktische Bedeutung der Komposition:

Komposition heißt "f in g einsetzen".

Beispiel: Für $M = N = L = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $g(y) = \sin(y)$ folgt:

$(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$.

Bemerkung: Warum wurde bei der Definition von g der Buchstabe y verwendet?

Formal ist es egal, welcher Buchstabe verwendet wird. Man hätte auch $g(x) = sin(x)$ schreiben können. Zum Verständnis ist es sinnvoll, verschiedene Buchstaben für Variablen zu verwenden, deren Rolle verschieden ist. Hier ist $x \in M$, also etwas, worauf f angewendet werden kann. $y \in N$ ist etwas, das als Wert von f vorkommen kann und worauf g angewendet werden kann. Dies hilft, Fehler zu vermeiden!

Definition 2.5. *Ist $f : M \to N$ bijektiv, dann nennt man die Abbildung*

$$f^{-1} : \quad N \to M \tag{2.2}$$

welche jedem $y \in N$ sein Urbild $x \in M$ mit $f(x) = y$ zuordnet, die Umkehrabbildung (inverse Abbildung, Umkehrfunktion) von f.

Insbesondere gilt:

$$f \circ f^{-1} = id_N, \quad \textit{und} \quad f^{-1} \circ f = id_M \tag{2.3}$$

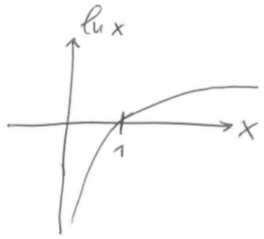
wobei $id_M: \ M \to M$ *die* <u>*Identische Abbildung*</u> *("Identität") auf* M *ist, d.h.* $id_M(x) = x \ \forall x \in M$*, und analog* id_N*.*

beachte: diese Definition funktioniert nur für bijektive Abbildungen!

Beispiele: (im Vorgriff)

1. Die Umkehrfunktion von $\exp: \ \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt (natürlicher) <u>Logarithmus</u>

$$\ln: \ (0, \infty) \to \mathbb{R}$$



<u>Notation:</u>

Die Einschränkung von $f: \ M \to N$ auf $A \subset M$ bezeichnet man mit

$$f|_A: \ A \to N \tag{2.4}$$

$$x \mapsto f(x) \tag{2.5}$$

2. Die Umkehrfunktion von $\sin(x)|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}: \ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ heißt <u>Arcussinus</u>:

$$\arcsin: \ [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

3. Die Umkehrfunktion von $\cos(x)|_{[0,\pi]}: \ [0, \pi] \to [-1, 1]$ heißt <u>Arcuscosinus</u>

$$\arccos: \ [-1, 1] \to [0, \pi]$$

(später mehr dazu)

Definition 2.6. *Eine Menge hat* <u>*Mächtigkeit*</u> $|M| := n$ *für* $n \in \mathbb{N}$*, also* n *Elemente, falls es eine Bijektion* $f: \ \{1, 2, ..., n\} \to M$ *gibt.*

Man nennt dann M <u>*endlich*</u>*, ansonsten* <u>*unendlich*</u>*.*

Man setzt $|\emptyset| := 0$*.*

Zwei Mengen M, N *haben die gleiche Mächtigkeit,* $|M| = |N|$*, genau dann wenn es eine*

Bijektion $f: M \to N$ gibt.

M heißt abzählbar unendlich, wenn es eine Bijektion $f: \mathbb{N} \to M$ gibt.

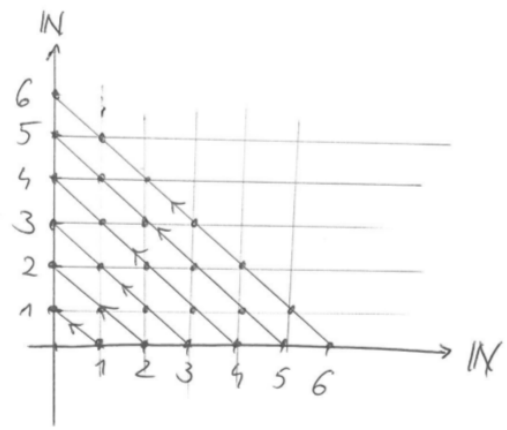
M heißt überabzählbar, wenn M nicht abzählbar und nicht endlich ist

Satz 2.1. *1) Die Vereinigung von 2 abzählbar unendlichen Mengen ist abzählbar unendlich*

2) Das kartesische Produkt von zwei abzählbar unendlichen Mengen ist abzählbar unendlich

Beweisskizze: 1) "trivial"

2) Cantor'sches Diagonalverfahren für $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:



Folgerung 2.1. *$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich*

Proof. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\}$ ist abzählbar unendlich.

betrachte die Surjektion

$$I: \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \tag{2.6}$$

$$(p, q) \mapsto \frac{p}{q} \tag{2.7}$$

Schon gezeigt: $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich, d.h. es gibt eine Bijektion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

Dann ist die Komposition $I \circ f$ eine Surjektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$:

$$g = I \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

durch Weglassen der doppelt gezählten Zahlen in $\mathbb{Q}$ erhält man eine Bijektion, also ist $\mathbb{Q}$ abzählbar.

$\square$

3 Die reellen Zahlen

Motivation:

Man kann z.B. $\sqrt{2}$ (also die Länge eines rechtwinkligen Dreiecks mit Schenkellänge 1) beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren, aber:

Satz 3.1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Proof. indirekter Beweis:

Zwei Fälle sind möglich, entweder $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ oder $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Angenommen der erste Fall tritt ein, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Wir werden unten daraus einen Widerspruch herleiten. Der erste Fall kann daher nicht eintreten. Bleibt nur der zweite, und daher muss $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ wahr sein.

Also: angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. D.h. $\exists$ ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}. \tag{3.1}$$

Durch Kürzen des Bruchs können wir erreichen, dass

$$p \text{ und } q \text{ sind teilerfremd, also } \ ggt(p,q) = 1. \tag{3.2}$$

Durch Quadrieren von (3.1) erhält man $2q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade. Daher muss auch p gerade sein, also $\exists r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$. Durch Quadrieren folgt $p^2 = 4r^2$ und wegen $2q^2 = p^2$ daher $2q^2 = 4r^2$.

Division durch 2 gibt $q^2 = 2r^2$, also ist q^2 gerade. Daher ist auch q gerade. Da p und q beide gerade sind, sind sie nicht teilerfremd, ein Widerspruch zu (3.2). Daher ist die Annahme $2 \in \mathbb{Q}$ falsch, und somit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$\square$

Die rellen Zahlen $\mathbb{R}$ erhält man als "Vervollständigung“ von $\mathbb{Q}$ (d.h. durch Auffüllen der Lücken wie z.B. $\sqrt{2}$), sodass die Rechenregeln ("Körperaxiome“) und die Ordnungsstruktur erhalten bleiben. Dise werden im folgenden besprochen.

Um die Rechenregeln nicht jedesmal (für $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$) wiederholen zu müssen, formuliert man diese Rechenregeln ein-für-allemal, indem man den Begriff eines (Zahlen-) Körpers $\mathbb{K}$ definiert. $\mathbb{R}$ ist dann vollständig charakterisiert durch die Körperaxiome, die Ordnungsstruktur und die Vollständigkeit.

3.1 Körperaxiome

$\mathbb{K}$ steht im folgenden für $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$. Wir erinnern an die Körperaxiome (lineare Algebra):

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist ein Körper, wenn die folgenden Abbildungen gegeben sind

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad \text{"Addition"} \\ & (x, y) \mapsto x + y \end{aligned} \tag{3.3}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad \text{"Multiplikation"} \\ & (x, y) \mapsto x \cdot y \end{aligned} \tag{3.4}$$

welche die folgenden Axiome (Rechenregeln) erfüllen:

Axiome der Addition:

- Assoziativgesetz: $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
- Kommutativgesetz: $\forall x, y \in \mathbb{K} : \quad x + y = y + x$
- Existenz der Null: $\exists\, 0 \in \mathbb{K} : \quad x + 0 = x \qquad \forall x \in \mathbb{K}$
- Existenz des Negativen: $\forall x \in \mathbb{K} \ \exists (-x) \in \mathbb{K} : \quad x + (-x) = 0$

Axiome der Multiplikation:

- Assoziativgesetz: $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Kommutativgesetz: $\forall x, y \in \mathbb{K} : \quad x \cdot y = y \cdot x$
- Existenz der Eins: $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad x \cdot 1 = x \qquad \forall x \in \mathbb{K}$
- Existenz des Inversen: $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ \exists x^{-1} \in \mathbb{K} : \quad x \cdot x^{-1} = 1.$

Distributivgesetz:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K} : \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Die wichtigsten Körper (in der Analysis) sind die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, und die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$; letzere werden weiter unten eingeführt.

Notation:

$$
\begin{aligned}
x - y &:= x + (-y), && (3.5)\\
\frac{x}{y} &:= x \cdot y^{-1} && (3.6)\\
x^n &:= \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}}, \qquad n \in \mathbb{N} && (3.7)\\
x^{-n} &:= \frac{1}{x^n} && (3.8)\\
x^0 &:= 1 && (3.9)
\end{aligned}
$$

oft läßt man $\cdot$ einfach weg.

Man kann leicht zeigen (lineare Algebra), dass in jedem Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ Null - und Einselement eindeutig bestimmt sind, und auch das negative Element für $+$ und das inverse Element für $\cdot$ eindeutig bestimmt sind.

Notation für Summen und Produkte:

Seien $m \leq n$ ganze Zahlen. Für jede ganze Zahl k mit $m \leq k \leq n$ sei a_k eine reelle Zahl. Dann setzt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Aus den Körperaxiomen folgt z.B.

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

und

$$\Big(\prod_{k=1}^{m} a_k\Big) \cdot \Big(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

3.2 Ordnungsstruktur auf $\mathbb{R}$

Reelle Zahlen kann man der Grösse nach vergleichen, also ordnen.

Um dies zu definieren, genügt es, zunächst die positiven Zahlen $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ zu identifizieren:

$$x > 0 \quad \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+$$

Es gilt die Transitivität:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \quad x + y > 0 \;\text{ und }\; x \cdot y > 0 \tag{3.10}$$

Damit definiert man die negativen Zahlen $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | -x \in \mathbb{R}_+\}$, und klarerweise ist

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$$

Man definiert nun

$$x > y \Leftrightarrow x - y > 0 \tag{3.11}$$
$$x \geq y \Leftrightarrow x - y > 0 \text{ oder } x = y \tag{3.12}$$

und analog $<$, $\leq$.

Damit kann man die folgenden **Rechenregeln für Ungleichungen** herleiten:

Satz 3.2. *Im Körper der reellen Zahlen* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *gilt:*

- *Transitivität*
$$x < y, \quad y < z \quad \Rightarrow \quad x < z$$
- *Spiegelung*
$$x < y \quad \Rightarrow \quad -x > -y$$
- *Inversion*
$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < y^{-1} < x^{-1}$$
- *Addition*
$$x < y \ \text{ und } \ w < z \quad \Rightarrow \quad x + w < y + z$$
- *Positivität des Quadrates*
$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 0$$

3.2.1 Betragsfunktion und Dreiecksungleichung

Definition 3.1. *Der (absolute) Betrag von* $x \in \mathbb{R}$ *ist*

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften:

1. pos. Definitheit: i) $|x| \geq 0$ ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. Multiplikativität $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$

Proof. für die Dreiecksungleichung:

für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \leq |x|, \qquad y \leq |y|$$

und

$$-x \leq |x|, \qquad -y \leq |y|$$

mit der Additivität folgt

$$x + y \leq |x| + |y| \qquad \text{und} \qquad -x - y \leq |x| + |y|$$

somit die Behauptung.

□

Bemerkung: Die Eigenschaften 1) - 3) gelten auch für $\mathbb{C}$ (später)

3.2.2 Supremum und Infimum

Definition 3.2. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es eine Konstante $k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass*

$$x \leq k \qquad (\text{bzw. } x \geq k) \qquad \text{für alle } x \in M$$

Man nennt dann k obere (bzw. untere) Schranke von M.

Die Menge M heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist also genau dann beschränkt, wenn es eine Konstante $k \geq 0$ gibt, sodass $|x| \leq k$ für alle $x \in M$.

Definition 3.3. *Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (bzw. Infimum) von M, falls k kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von M ist. Dabei heißt k kleinste obere Schranke von M, falls gilt:*

1. *k ist obere Schranke von M*
2. *falls k' eine weitere obere Schranke von M ist, dann folgt $k \leq k'$.*

analog ist die größte untere Schranke definiert.

Gilt zusätzlich $k \in M$, dann heißt k Maximum (bzw. Minimum) von M

Es ist klar, dass die kleinste obere Schranke (bzw. größte untere Schranke) im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist. Man bezeichnet sie mit $\sup(M)$ bzw. $\inf(M)$.

Beispiele:

- $\sup[a, b) = b, \qquad \inf[a, b) = \min[a, b) = a$
- (a, ∞) besitzt keine obere Schranke.
  Man schreibt dennoch $\sup(a, \infty) = \infty$ und $\inf(-\infty, b) = -\infty$.

Schreibweise: für $f: M \to \mathbb{R}$ und $A \subset M$:

$$\sup_{x \in A} f(x) := \sup f(A), \qquad \inf_{x \in A} f(x) := \inf f(A)$$

analog für min und max.

3.3 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Wir wissen schon (Satz 3.1), dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Das heißt, dass $M = \{x \in \mathbb{Q} | \ x^2 \leq 2\}$ kein Supremum *in* $\mathbb{Q}$ hat.

Die reellen Zahlen füllen gerade diese "Löcher" in $\mathbb{Q}$:

3.1. *Vollständigkeitsaxiom: in $\mathbb{R}$ gilt:*

jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Bemerkung: In $\mathbb{Q}$ gilt das nicht!

Man kann zeigen, dass $\mathbb{R}$ der einzige vollständige angeordnete Körper ist.

Man kann nun das Intervallschachtelungsprinzip folgern:

Satz 3.3. *für abgeschlossene Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ gilt:*

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n := \{x | \ \forall n \in \mathbb{N}: \ x \in I_n\}$$

Proof. Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n \leq b_n$

$\Rightarrow \ \forall m \in \mathbb{N}: \qquad b_m$ ist obere Schranke on $A := \{a_n |\ n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}: \qquad a_n \leq \sup A \leq b_n$

d.h. $\quad \sup A \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

□

3.4 Weitere Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ versus $\mathbb{R}$

Es gilt:

Satz 3.4. $\mathbb{Q}$ *ist dicht in* $\mathbb{R}$*, d.h.*

$$\forall \epsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}\ \ \exists\, p \in \mathbb{Q} \quad \textit{mit} \quad |x - p| < \epsilon$$

Proof. weggelassen.

□

Satz 3.5. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar*

d.h. es gibt keine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also keine vollständige Auflistung $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, ...\}$.

Proof. nehmen wir an, es gäbe so eine Auflistung $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, ...\}$.

Definiere $I_1 := [x_1 + 1, x_1 + 2] \not\ni x_1$

und wähle analoge abgeschlossene Intervalle $I_{n+1} \subset I_n$ mit $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ (geht immer)

Aus dem Intervallschachtelungsprinzip folgt:

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \ \ni s$$

aber per Konstruktion ist $s \neq x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. ↯

(Ein alternativer Beweis verwendet das 2. Cantor'sche Diagonalverfahren, siehe zB. [Forster §9 Satz 2) □

4 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen sind extrem nützlich und hilfreich zum Lösen von physikalischen Gleichungen, und essentiell in der Quantenphysik!

4.1 Der Körper der komplexen Zahlen

4.1. Definition & Satz*:*

Die Menge $\mathbb{R}^2$ *der reellen Zahlenpaare* (x, y) *wird durch*

- *Addition:* $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$
- *Multiplikation:* $(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y)$

zum Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Eigenschaften

- der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist in $\mathbb{C}$ eingebettet durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

  man kann also jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0)$ identifizieren

- imaginäre Einheit:
  $i := (0, 1)$ erfüllt $i^2 = (-1, 0) = -1$

- Wegen $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ schreibt man für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$:

$$z = x + iy$$

  wobei $x = Re(z)$ ... Realteil, $y = Im(z)$ ... Imaginärteil

- Rechenregeln:

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + x') + i(y + y') \\ z \cdot z' &= (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y) \\ &= z' \cdot z \end{aligned}$$

  und für $z = x + iy \neq 0$ gilt:

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Definition 4.1. *Für* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *heißt*

- $\overline{z} := x - iy$ *... komplex konjugierte von* z *(oft:* $z^* = \overline{z}$*)*

- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ ... *Betrag von z*

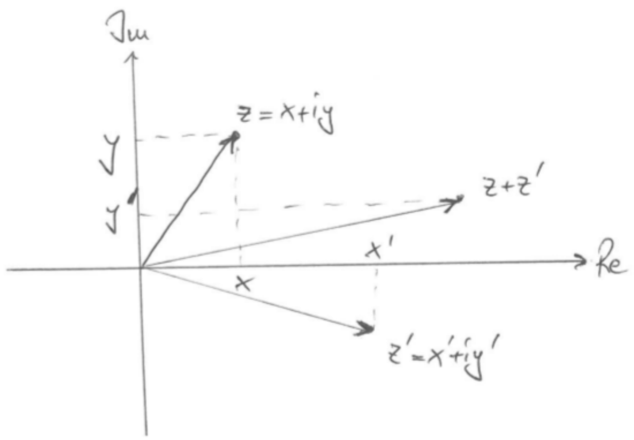
<u>nützliche Eigenschaften:</u>

- $\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}, \quad |\overline{z}| = |z|$
- $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, falls $z \neq 0$
- $|z + w| \leq |z| + |w| \qquad \forall\ z, w \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung)

Die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$

Die komplexe Zahlen $z = (x, y)$ können als Vektoren (x, y) in $\mathbb{R}^2$ visualisiert werden:

<u>Kartesische Darstellung:</u>



nützlich für Addition

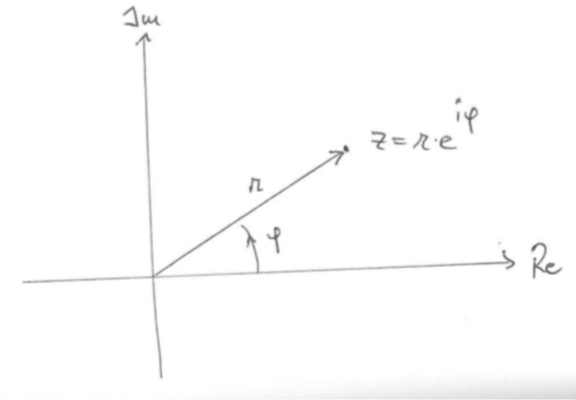
<u>Polardarstellung</u>

nützlich für Multiplikation:

jede komplexe Zahl läßt $z \neq 0$ sich eindeutig durch <u>Betrag</u> $r := |z|$ und <u>Phase</u> $\varphi := arg(z) \in (-\pi, \pi]$ festlegen:

$$\boxed{z = r \cos\varphi + ir \sin\varphi}$$

also



Schreibweise mit der komplexen Exponentialfunktion (später genauer):

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$$

also

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

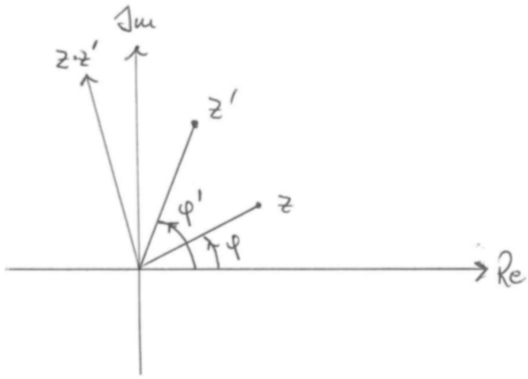
es gilt (Begründung später):

$$e^{i(\varphi+\varphi')} = e^{i\varphi}e^{i\varphi'}$$

und somit für $z = re^{i\varphi}$ und $z' = r'e^{i\varphi'}$:

$$\boxed{zz' = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}} \quad \text{...Polardarstellung, mit } \varphi \in (-\pi, \pi]$$

graphisch funktioniert das so:



Insbesondere:

$$|z| = r, \qquad z^n = r^n e^{in\varphi} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

4.2 Komplexe Wurzeln & Fundamentalsatz der Algebra

Die komplexen Zahlen sind sehr nützlich, weil man damit polynomiale Gleichungen immer lösen kann.

Definition 4.2. *Für $w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe n-te Wurzel von w, wenn $z^n = w$ gilt.*

beachte: die komplexen n-ten Wurzeln sind nie eindeutig.

z.B. sind $\pm i$ zwei (2te) Wurzeln von -1.

genauer: Es gibt stets n komplexe n-te Wurzeln von 1.

Insbesondere: z heißt n-te Einheitswurzel, wenn gilt

$$z^n = 1 \tag{4.1}$$

explizite Form in Polardarstellung:

$$z_k := e^{i\frac{k}{n}2\pi}, \qquad k = 1, 2, ..., n$$

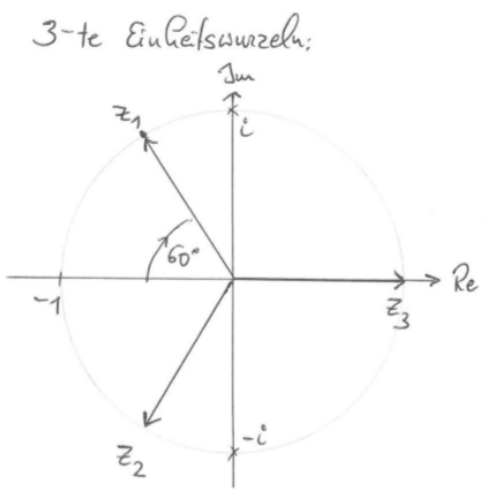
erfüllt

$$z_k^n = \left(e^{i\frac{k}{n}2\pi}\right)^n = e^{i2k\pi} = 1$$

zum Beispiel für $n = 3$

$$z_1 = e^{i\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$
$$z_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$
$$z_3 = e^{i2\pi} = 1$$

graphisch sieht das so aus:



Definition 4.3. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \sqrt{}: \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto \sqrt{z} = \sqrt{|z|}\ e^{i\frac{\arg z}{2}} \end{aligned}$$

heißt (Hauptzweig der) komplexen Quadratwurzel.

Verallgemeinerung:

Sei $p(z)$ ein (komplexes) Polynom vom Grad n, also

$$\begin{aligned} p: \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto p(z) = a_0 + a_1 z^1 + ... + a_n z^n, \qquad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0 \end{aligned}$$

Dann gilt:

Satz 4.1. *(Abspaltung von Linearfaktoren)*

Ist $p(z)$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und z_0 eine Nullstelle von p, also

$$p(z_0) = 0$$

dann gibt es ein Polynom $q(z)$ vom Grad $n-1$ mit

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

(dies gilt nicht nur in $\mathbb{C}$ sondern auch für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$).

Der folgende Satz gilt aber nur in $\mathbb{C}$:

Satz 4.2. *(Fundamentalsatz der Algebra)*

Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, d.h. $p(z_0) = 0$.

Zusammen mit dem vorherigen Satz erhält man sofort

Satz 4.3. *Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ kann in Linearfaktoren zerlegt werden, d.h. es gibt (nicht notwendig verschiedene) $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit*

$$p(z) = a(z - z_1)...(z - z_n)$$

Beispiel:

$$p(z) = z^3 - 13z + 12$$

durch probieren: $z = 1$ ist Nullstelle, $p(1) = 0$.

Durch Polynomdivision erhält man

$$(z^3 - 13z + 12) : (z - 1) = z^2 + z - 12$$

Die Nullstellen eines Polynoms 2. Grades $az^2 + bz + c$ erhält man bekanntlich aus

$$z_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

für $z^2 + z - 12$ ergibt dies die Nullstellen $z = 3, z = -4$

also Linearfaktorzerlegung:

$$p(z) = z^3 - 13z + 12 = (z - 1)(z - 3)(z + 4)$$

5 Vollständige Induktion und etwas Kombinatorik

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Wir wollen zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Dazu kann man man so vorgehen: Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist. Dann zeigt man, dass aus $A(1)$ die Aussage $A(2)$ folgt, aus $A(2)$ die Aussage $A(3)$ folgt, und "so weiter"; d.h. aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$. Diese Schlussweise wird präzisiert im Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Satz 5.1. (Vollständige Induktion)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage; es gelte:

1. *$A(1)$ ist richtig.* *"Induktionsanfang"*
2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte: wenn $A(n)$ richtig ist, dann auch $A(n+1)$* *"Induktionsschritt"*

dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Dies folgt aus einer grundlegenden Eigenschaft der natürlichen Zahlen: Wenn für eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ gilt: $1 \in M$ und aus $n \in M$ folgt: $n + 1 \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$.

Beispiel:

Wir beweisen mit vollständiger Induktion die Formel

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$A(n)$ sei die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proof. Induktionsanfang: $n = 1$

nachprüfen

Induktionsschritt:

Wir nehmen an, $A(n)$ sei richtig. Zu zeigen ist, dass $A(n+1)$ richtig ist. Dies können wir schreiben als

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &\overset{A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned} \tag{5.1}$$

Damit ist $A(n+1)$ hergeleitet, und somit ist $A(n)$ wahr $\forall n$.

$\square$

Eine weitere wichtige Formel in diesem Zusammenhang ist:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{5.2}$$

man kann dies mit vollständiger Induktion beweisen (Übung), oder direkt: Sei

$$s_n = 1 + x + x^2 + ... + x^n$$

dann ist

$$1 + xs_n = 1 + x(1 + x + x^2 + ... + x^n) = s_n + x^{n+1}$$

also

$$s_n(x-1) = x^{n+1} - 1$$

dies ergibt die Behauptung.

5.1 Der binomische Lehrsatz

Bekannt sind die Formeln

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

wir suchen eine allgemeine Formel für $(x+y)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dazu definiert man:

Definition 5.1. *Die* <u>*Fakultät*</u> $n!$ *von* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist definiert durch*

$$
\begin{aligned}
0! &:= 1 \\
n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \qquad n \geq 1
\end{aligned}
$$

oder rekursiv $n! = n \cdot (n-1)!$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

Definition 5.2. *Für* $n, k \in \mathbb{N}$ *sei*

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \overset{n \geq k}{\equiv} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sowie $\binom{n}{0} := 1$.

Insbesondere ist $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ und $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$.

Wir zeigen zuerst den folgenden

Hilfssatz: Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{5.3}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{5.4}$$

Proof. <u>Beweis des Hilfssatzes:</u> einfach nachrechnen

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(k + (n-k)) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

Die Aussage $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ folgt sofort aus der Definition.

□

Dies kann man im Pascal'schen Dreieck veranschaulichen (Übung) und einfach ausrechnen.

Damit kann man nun zeigen:

Satz 5.2. (Binomischer Lehrsatz) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Proof. vollständige Induktion.

<u>Induktionsanfang: $n = 1$</u>

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y$$

stimmt

<u>Induktionsschritt</u>

Wir nehmen an, dass

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

gilt. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $x + y$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k-1}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \binom{n-1}{l-1} x^l y^{n-l} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{n-1} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\Big) x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} y^n
\end{aligned}$$

(mit $l = k + 1$ in der 3. Zeile). Nun ist $\binom{n-1}{n-1} = 1 = \binom{n-1}{0}$, und mit dem obigen Hilfssatz (5.4) erhalten wird

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{5.5}$$

□

Wir zeigen noch die folgende wichtige Interpretation der Binomialkoeffizienten:

Satz 5.3. *Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$ gilt:*

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge M ist $\binom{n}{k}$

Proof. Induktion über n.

Induktionsanfang $n = 1$ ist klar

Induktionsschritt:

Wir nehmen an, die Aussage sei für $n-1$ richtig. Sei M eine Menge mit n Elementen. Wir wählen wir ein $p \in M$.

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen $A \subset M$ mit $p \notin A$ ist nach Induktionsannahme gleich $\binom{n-1}{k}$, weil $A \subset M \setminus \{p\}$.

Alle k-elementigen Teilmengen $A \subset M$ mit $p \in A$ erhält man, indem man alle $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{p\}$ wählt und p hinzufügt; die Anzahl ist also $\binom{n-1}{k-1}$ laut Induktionsannahme.

Zusammen ergibt dies also $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten

□

6 Folgen und Grenzwerte

Motivation: viele Größen sind nicht durch einen in endlich vielen Schritten exakt berechenbaren Ausdruck gegeben, sondern können nur mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden. Eine Zahl mit beliebiger Genauigkeit approximieren heißt, sie als Grenzwert einer Folge darstellen.

6.1 Definition und Beispiele

Definition 6.1. *Eine reelle Folge ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} a: \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \\ & n \mapsto a(n) =: a_n \end{aligned}$$

Notation: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oder einfach* (a_n).

elementare Eigenschaften

- (a_n) heißt monoton steigend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  (a_n) heißt streng monoton steigend, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (a_n) heißt monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  (a_n) heißt streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (a_n) heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq k$ (bzw. $a_n \geq k$) für alle n .

Beispiele:

- Folge der Stammbrüche:
$$a_n = \frac{1}{n}$$
also $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$.
ist streng monoton fallend, beschränkt.

- $$a_n = (-1)^n$$
also $(1, -1, 1, -1, ...)$

- $$(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...)$$

- Potenzfolge:
$$a_n = x^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$
ist monoton steigend für $x > 1$, konstant für $x = 1$, monoton fallend für $0 < x < 1$, nicht monoton für $x < 0$.

- nicht mehr so offensichtlich:
$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$
ist streng monoton steigend (ohne Beweis) und beschränkt (Übung)

- rekursiv definierte Folgen: z.B.
  - **Fibonacci Folge**: $a_1 = a_2 = 1, \; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
    $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$
  - **Quadratwurzel-Folge**: gegeben $x, \; a_1 > 0$. Definiere $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$

6.2 Konvergenz und Grenzwert

Frage: Wie verhält sich (a_n) für große n?

Definition 6.2. *Eine (reelle) Folge (a_n) heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn*

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - a| < \epsilon} \tag{6.1}$$

In diesem Fall heißt a Grenzwert (oder Limes) der Folge, und man schreibt

$$\boxed{a = \lim_{n\to\infty} a_n} \qquad \textit{kurz:}\ a_n \to a$$

Existiert kein solches $a \in \mathbb{R}$, dann heißt (a_n) divergent

beachte, dass die Zahl N von ϵ abhängt. Im Allgemeinen wird man N umso größer wählen müssen, je kleiner ϵ ist.

Der Grenzwert einer Folge ist **eindeutig** (falls er existiert):

Satz 6.1. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere sowohl gegen a als auch gegen a'. Dann gilt $a = a'$.*

Man kann also konvergenten Folgen eine eindeutige Zahl (den Grenzwert) zuordnen. Darin begründet sich deren Nützlichkeit.

Proof. nicht schwer, siehe z.B. [Forster] . □

alternative Charakterisierung mit ϵ - Umgebung von a:

Definition 6.3. *Sei $\epsilon > 0$. Die ϵ- Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}$ ist definiert durch*

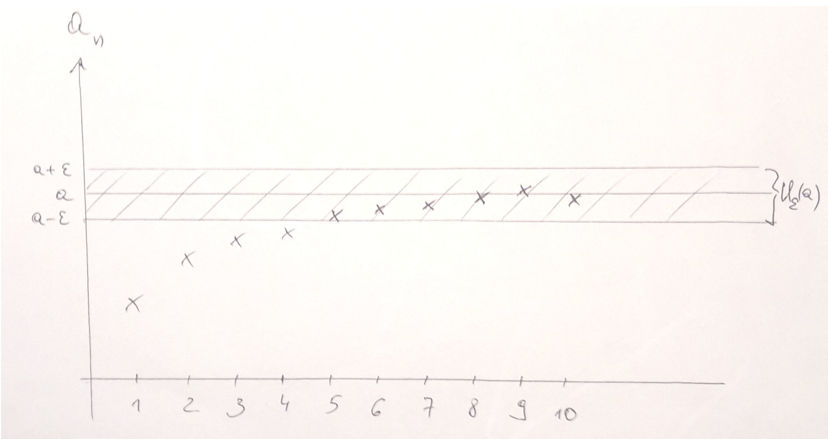
$$U_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}| \ \ |x - a| < \epsilon\}$$

dies ist das offene Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ um a.

$a_n \to a$ bedeutet also:

Für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ gilt:

Bis auf endlich viele Folgenglieder liegen alle a_n in $U_\epsilon(a)$



also:

$$\boxed{a_n \text{ konvergiert gegen } a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 : \quad a_n \in U_\epsilon(a) \quad \text{für fast alle} \quad n \in \mathbb{N}}$$

Hierbei bedeutet "fast alle" ≡ "alle bis auf endlich viele" (in der Mathematik)

Beispiele (anknüpfend an die obigen Bsp):

- $(a_n) = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist <u>Nullfolge</u>, d.h. konvergiert gegen 0:

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

  Proof. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N > \frac{1}{\epsilon}$ (geht immer). Dann gilt: $\forall n \geq N$: $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$

  □

- $$a_n = (-1)^n$$

  konvergiert nicht, ist also divergent.

  Proof. Annahme: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = a$

  d.h. für $\epsilon = 1$ muss gelten: $\exists N : \; \forall n > N : \quad |(-1)^n - a| < 1$

  Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus

  $$2 = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| \overset{\Delta-Ugl.}{\leq} |(-1)^{n+1} - a| + |a - (-1)^n| < 1 + 1 = 2$$

  Widerspruch ↯

  □

- $$(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...)$$

  konvergiert gegen 1

  Beweis: Übung

- Potenzfolge:

  $$a_n = x^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

  ist divergent für $|x| \geq 1$

  für $x = 1$: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$

  für $|x| < 1$: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

  Beweis: Übung

- $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2,1718... \qquad \text{(Euler'sche Zahl)}$$
  Beweis: später (ist nicht so einfach)

- **Quadratwurzel-Folge**: gegeben $x,\ a_1 > 0$. Definiere $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$ konvergiert gegen $\sqrt{x}$
  Beweis: später

6.2.1 Konvergenzkriterien

Notwendig, aber nicht hinreichend für Konvergenz:

Satz 6.2. *Jede konvergente Folge ist beschränkt*

Proof. (Skizze): für $\epsilon > 0$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder a_n in $U_\epsilon(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$.

□

der folgende Satz ist sehr nützlich:

Satz 6.3. *(Monotoniekriterium für Folgen)*

Jede beschränkte, monoton $\left\{\begin{array}{c}\textit{steigende}\\ \textit{fallende}\end{array}\right\}$ *reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

Der Grenzwert ist gegeben durch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \left\{\begin{array}{c}\sup a(\mathbb{N})\\ \inf a(\mathbb{N})\end{array}\right\}$.

Proof. (für steigende Folgen)

Da $a := \sup(a(\mathbb{N}))$ kleinste obere Schranke ist, gilt:

$$\forall \epsilon > 0 :\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_N > a - \epsilon$$

Aus der Monotonie folgt für $n \geq N$: $\quad a \geq a_n \geq a_N > a - \epsilon$,

also $|a - a_n| < \epsilon$.

□

beachte: hier geht das Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$ ein (Existenz des Supremums).

Für $\mathbb{Q}$ gilt der Satz nicht.

Beispiele:

- $a_n = \frac{1}{n^p}$ für $p > 0$ ist monoton fallend und beschränkt, also konvergent, und der Grenzwert kann nur 0 sein:

  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

- $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist monoton wachsend und beschränkt (Übung)

  daher konvergent. Man kann den Grenzwert ausrechnen (später):

  $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2,1718.$ (Euler'sche Zahl)

auch das folgende Kriterium ist oft nützlich:

Satz 6.4. *(Majorantenkriterium)*

Seien $(a_n),\ (b_n)$ *Folgen und* $a \in \mathbb{R}$ *mit*

1. $|a_n - a| \leq b_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$ *und*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \qquad$ *(d.h:* (b_n) *ist Nullfolge).*

Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Proof. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung 2. gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\forall n > N: \quad |a_n - a| < \epsilon$. Dies ergibt die Behauptung.

□

Beispiele für Nullfolgen:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ für $p > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ für $|x| < 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0$ für $p > 0,\ |x| > 1$.

Beweis später bzw. Übung.

6.2.2 Grenzwertregeln

Satz 6.5. *Grenzwertarithmetik*

Seien $(a_n),\ (b_n)$ *konvergent mit* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *und* $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$*. Dann gilt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

3. *Falls* $b \neq 0$*:* $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

4. $a_n \leq b_n \;\Rightarrow\; a \leq b$

Proof. nur für 1.) und 3.) , Rest Übung

1.)

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ groß genug, dass $\forall n \geq N: \quad |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$

Dann ist

$$\forall n \geq N: \quad |a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \overset{\Delta-Ugl}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \tag{6.2}$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{6.3}$$

3.) Wegen 2.) genügt es z.z: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ folgt: $\quad |b_n - b| \leq \frac{|b|}{2}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

Also $\quad |b_n| \overset{\Delta-Ugl}{\geq} |b| - |b_n - b| \geq \frac{|b|}{2} > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

daher können wir wie folgt argumentieren:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{|b_n - b|}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Wegen der Konvergenz von $b_n \to b$ folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

□

Insbesondere: setzte $b_n = b$. Dann folgt z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b = a \cdot b$.

6.2.3 Anwendung: Newton-Verfahren für $\sqrt{w}$

Für $w > 0$ gibt es genau eine positive Lösung von $x^2 = w$, genannt die Quadratwurzel von w.

Iterative Berechnung: Wähle $a_1 > 0$ beliebig, und definiere rekursiv eine Folge

$$\boxed{a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{w}{a_n})}$$

Behauptung: für $n \geq 2$ ist die Folge monoton fallend und beschränkt

Proof. berechne dazu

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2w + \frac{w^2}{a_n^2}) = \frac{1}{4}(a_n - \frac{w}{a_n})^2 + w \geq w \tag{6.4}$$

und damit

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(\frac{w}{a_n} - a_n) = \frac{w - a_n^2}{2a_n} \overset{6.4)}{\leq} 0$$

Beschränktheit ist klar: $a_n > 0$. Daher konvergiert (a_n).

□

Den Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ können wir mit der Grenzwertarithmetik berechnen:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{w}{a_n}) = \frac{1}{2}(a + \frac{w}{a}) > 0$$

also $a^2 = w$ und daher $a = \sqrt{w}$.

Ein analoges Verfahren funktioniert auch für $\sqrt[k]{w}$ (Übung)

6.3 Bestimmte Divergenz, $\limsup, \liminf$

Definition 6.4. *Eine reelle Folge (a_n) heißt <u>bestimmt divergent</u> (oder <u>uneigentlich konvergent</u> gegen $+\infty$), wenn*

$$\forall k \in \mathbb{R}: \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N: \quad a_n \geq k$$

man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \textit{oder} \quad a_n \to \infty$$

Analog heißt (a_n) <u>bestimmt divergent</u> gegen $-\infty$, wenn $-a_n \to \infty$. man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \textit{oder} \quad a_n \to -\infty$$

Beispiel:

für $x > 1$ ist $x^n \to +\infty$.

Achtung: für $x < -1$ konvergiert x^n nicht einmal im uneigentlichen Sinn!

es gilt (leicht einzusehen): Jede monotone reelle Folge konvergiert oder ist bestimmt divergent

für uneigentlich konvergente Folgen gilt auch eine (eingeschränkte) Grenzwertarithmetik:

<u>Rechenregeln:</u>

- $\infty + a = \infty, \qquad \infty + \infty = \infty$
  für $a > 0: \quad a \cdot \infty = \infty, \infty \cdot \infty = \infty$
- $-\infty + a = -\infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty$
  für $a > 0: \quad a \cdot (-\infty) = -\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

aber nicht definiert (also nicht eindeutig) ist

$\infty - \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty, ...$

wir benötigen noch ein (etwas subtiles) Konzept für Folgen (a_n), das nützlich sein wird: zunächst:

$$\overline{a_n} := \sup\{a_m | \ \ m \geq n\}, \qquad \underline{a_n} := \inf\{a_m | \ \ m \geq n\}$$

es gilt also immer

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}$$

Aus der Definition folgt sofort, dass die Folge $(\overline{a_n})$ monoton fallend (!) ist, und die Folge $(\underline{a_n})$ monoton wachsend ist.

Daher existiert ihr (eigentlicher oder uneigentlicher) Grenzwert:

Definition 6.5. *der Limes superior bzw. Limes inferior einer reellen Folge* (a_n) *sind definiert durch*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}$$

es gilt dann:

Satz 6.6. *Die Folge* (a_n) *konvergiert (uneigentlich) genau dann gegen* $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *falls* $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$

Proof. Übung

□

6.4 Cauchy Folgen

Definition 6.6. *eine Folge (a_n) heißt <u>Cauchy-Folge</u>, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N : \quad |a_n - a_m| < \epsilon$$

(wichtig!)

das folgende Konvergenzkriterium ist sehr nützlich für Folgen, deren Grenzwert man nicht kennt:

Satz 6.7. *(Cauchy Kriterium)*

(a_n) ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ $\quad \Leftrightarrow \quad$ (a_n) ist konvergent

Proof. <u>$\Rightarrow$:</u>

Da jede Cauchy-Folge beschränkt ist, gilt $a := \limsup_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $n, m \geq N$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Daraus folgt

$$a_n - \epsilon \leq \overline{a_m} \leq a_n + \epsilon \qquad \forall \, n, m \geq N$$

Daraus folgt, dass

$$a_n - \epsilon \leq a \leq a_n + \epsilon$$

also $|a_n - a| < \epsilon$

<u>$\Leftarrow$:</u>

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$.

Daraus folgt, dass

$$\forall n, m \geq N : \quad |a_n - a_m| \overset{\Delta - Ugl}{\leq} |a_n - a| + |a - a_m| < \epsilon$$

□

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass die Aussage "jede Cauchy-Folge konvergiert" äquivalent zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist.

Beispiel:

Die Folge

$$a_n = \frac{1}{n}$$

ist eine Cauchy-Folge.

Man kann nämlich zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein N so wählen, dass $N > \frac{1}{\varepsilon}$ erfüllt ist. Sind nun $m > n > N$ beliebig gewählt, dann gilt

$$|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = |\frac{m-n}{nm}| < \frac{m}{nm} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Hingegen ist $a_n = n$ keine Cauchy-Folge, weil $|a_n - a_m| \geq 1$ für $n \neq m$.

6.5 Teilfolgen, Häufungspunkte, Bolzano-Weierstraß

Definition 6.7. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $b_k = a_{n_k}$, also*

$$(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_2}, \ldots)$$

Teilfolge der Folge (a_n).

Es folgt unmittelbar: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit dem Limes a, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.

Definition 6.8. *Eine Zahl a heißt Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.*

<u>alternative Charakerisierung:</u>

a ist Häufungspunkt

$\Leftrightarrow\ \forall\epsilon > 0 :\quad a_n \in U_\epsilon(a)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow\ \forall\epsilon > 0,\ N \in \mathbb{N} :\quad \exists n > N :\ a_n \in U_\epsilon(a)$.

Beispiele:

- $a_n = (-1)^n$ besitzt die Häufungspunkte $+1$ und -1.

  Teifolgen: $b_k = a_{2k} \to 1$

  $b'_k = a_{2k+1} \to -1$

- $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n},\quad n > 1$, besitzt ebenfalls die beiden Häufungspunkte $+1$ und -1, denn

  $$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty}((-1)^{2n} + \frac{1}{2n}) = 1$$

  und analog für a_{2n+1}.

- $a_n := n,\quad n \in \mathbb{N}$ besitzt keinen Häufungspunkt, da jede Teilfolge unbeschränkt ist, also nicht konvergiert.

- ist a_n eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, so ist jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von a_n. (weil: in jeder Umgebung $U_\epsilon(x)$ liegen unendlich viele rationale Zahlen.)

allgemein gilt: ist $\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n \ \in \mathbb{R}$

so sind dies stets Häufungspunkte von (a_n), und für jeden Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq x \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

(also ist $\liminf$ der kleinste HP, und $\limsup$ der größte HP.)

Der folgende Satz ist sehr wichtig (und nicht trivial!):

Satz 6.8. *(Bolzano-Weierstrass)*

Jede beschränkte reelle Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt

Proof. (a_n) beschränkt $\Rightarrow \limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$

$\square$

7 Reihen

Definition 7.1. *Sei (a_n) eine (reelle) Folge. Die Folge*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

der Partialsummen heißt (unendliche) <u>Reihe</u>, und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Andernfalls spricht man von einer divergenten Reihe.

Falls eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ "bestimmt divergiert“ also $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, schreibt man auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Beispiele:

- Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert, weil

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}\right)$$

Dies ist eine "Teleskopsumme“, welche unmittelbar summiert werden kann:

$$s_n = \left(\frac{n}{n+1} - \frac{0}{1}\right) = \frac{n}{n+1} \to 1$$

Daher konvergiert die unendliche Reihe und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim s_n = 1$$

- <u>geometrische Reihe</u>

  Sei $|x| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{7.1}$$

Proof. Wir erinnern uns an die geometrische Summenformel (5.2):

$$s_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \tag{7.2}$$

Wir wissen bereits, dass $x^n \to 0$ konvergiert (für $|x| < 1$!). Damit ergibt sich aus der Grenzwertarithmetik sofort

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1-x}$$

□

Für $|x| > 1$ ist die geometrische Reihe divergent, weil sie keine Cauchy-Foge ist ($|s_n - s_{n+1}| = |x^{n+1}| = |x|^{n+1} > 1$).

- <u>harmonische Reihe</u>:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

  ist divergent.

  Um dies zu sehen, zeigen wir zunächst

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \to \infty \tag{7.3}$$

  woraus die Divergenz der harmonischen Reihe folgt.

Wir zeigen (7.3) induktiv:

<u>Induktionsanfang $n = 1$:</u> klar

<u>Induktionsschritt $n \to n+1$:</u>

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + ... + \frac{1}{2^n+2^n}\right)}_{2^n \text{ Terme}} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

7.1 Konvergenzkriterien

Satz 7.1. *(Cauchy-Kriterium)*

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *eine reelle Reihe. Dann gilt:*

$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert* $\Leftrightarrow \; \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m \geq N : \quad |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$

Proof. ... einfach Definition, dass s_n Cauchyfolge, daher konvergent. □

daraus folgt unmittelbar: Das Konvergenzverhalten einer Reihe ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder abändert. (Nur die Summe ändert sich.)

Beispiel: <u>Laurent-Reihe</u>:

Für $x > 1$ und (a_n) beschränkt konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}$$

Proof. Wir zeigen, dass

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k}$$

eine Cauchy-Folge ist.

Sei dazu $\epsilon > 0$ und $a := \sup\{|a_n|; \quad n \in \mathbb{N}\}$.

schon bekannt: $\frac{1}{x^n}$ konvergiert gegen 0

Wähle $N > 0$ wählen sodass $(\frac{1}{x})^N < (1 - \frac{1}{x})\frac{\epsilon}{a}$

Dann gilt $\forall m \in \mathbb{N},\ n \geq N:$

$$\begin{aligned} |s_{n+m} - s_n| &= |\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_k}{x^k}| \overset{\Delta - Ugl}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+m} |\frac{a_k}{x^k}| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |\frac{a}{x^k}| = \frac{a}{x^n} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{x^k} \leq \frac{a}{x^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} < \epsilon \end{aligned}$$

□

Das folgende Konvergenzkriterium ist sehr nützlich

Satz 7.2. *(Monotoniekriterium für Reihen)*

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n \geq 0$ *konvergiert genau dann, wenn die Reihe (d.h. die Folge der Partialsummen) beschränkt ist.*

Proof. da $a_n \geq 0$, ist Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ monoton wachsend. Die Behauptung folgt daher aus dem Monotoniekriterium für Folgen.

□

Eine einfache Beobachtung ist:

Satz 7.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent* $\Rightarrow \quad a_n \to 0$

Proof. folgt sofort aus Cauchy-Kriterium □

die Umkehrung dieser Aussage stimmt aber nicht, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt;

d.h. $\lim a_n = 0$ ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die Feinheiten der Konvergenz von Reihen sieht man gut am Beispiel der

<u>alternierenden harmonischen Folge:</u>

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.

Dies folgt sofort aus dem

Satz 7.4. *(Leibnitz Kriterium)*

Sein $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monotone Nullfolge* $\lim a_n = 0$ *mit* $a_n \geq 0$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Proof. (Idee:) Sei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^n a_n$$

Man sieht leicht:

$$s_1 < s_3 < s_5 < \ldots < s_{2n-1} < s_{2n} < s_{2n-2} < s_4 < s_2$$

aus dem Monotoniekriterium folgt, dass

$$s^* := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$
$$s_* := \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$$

existieren, und es gilt

$$0 \leq s^* - s_* = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

□

7.2 Absolute Konvergenz, Umordnungen

Definition 7.2. *Die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Bemerkungen:

- absolut konvergente Reihen bilden eine "robuste" Klasse von Reihen mit guten Eigenschaften, die in Anwendungen sehr nützlich sind, und gut manipuliert werden können (siehe später).
- aus absoluter Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

  (Weil: für $n \geq m \geq 1$ gilt $|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$, und somit erfüllt neben $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ das Cauchy-Kriterium).
- nicht alle konvergenten Reihen sind absolut konvergent!

  Gegenbeispiel: die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut.

  Konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, die nicht absolut konvergent sind, nennt man "bedingt konvergent". Diese sind delikat und mit Vorsicht zu genießen.

es folgen einige sehr nützliche Konvergenzkriterien:

Satz 7.5. *(Majorantenkriterium für abs. konv. Reihen)*

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergent mit* $b_n \geq 0$. *Falls* $|a_n| \leq b_n$, *dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

Proof. Idee: Cauchy-Kriterium $\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \sum_{k=n}^{m} b_k$ □

Beispiel:

für $k \geq 2$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^k}, \qquad k > 1$$

absolut.

Proof. zunächst: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$.

Wir wissen schon, dass sie Folge $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)}$ gegen 2 konvergiert.

Daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ nach dem Majorantenkriterium.

□

Bemerkung: Man kann (z.B. mithilfe der Theorie der Fourier-Reihen, oder Ende der VL) beweisen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

etc.

Satz 7.6. *(Quotientenkriterium I)*

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe mit* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$. *Es gebe eine reelle Zahl* θ *mit* $0 < \theta < 1$, *sodass*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \theta \qquad \text{für alle} \;\; n \geq n_0.$$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

Proof. oBdA ("ohne Beschränkung der Allgemeinheit): $n_0 = 1$, also

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \theta \qquad \text{für alle} \;\; n.$$

daraus folgt:

$$|a_{n+1}| \leq \theta^n |a_1|$$

aus dem Majorantenkriterium und $\sum_n \theta^n = \frac{1}{1-\theta}$ folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

□

es gilt auch die folgende Variante des Quotientenkriteriums:

Satz 7.7. *(Quotientenkriterium II)*

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe mit* $a_n \neq 0$ *für fast alle* n*. Ferner existiere* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \theta$*. Dann gilt:*

1. *Falls* $\theta < 1$*, dann ist die Reihe absolut konvergent*
2. *Falls* $\theta > 1$*, dann ist die Reihe divergent.*

(Beweis: Übung).

Beispiele:

- Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolut.

  Beweis: Sei $|x| < 1$. Dann gibt es eine reelle Zahl θ mit $|x| < \theta < 1$, und es gilt

  $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x| < \theta < 1$$

  Absolute Konvergenz folgt somit aus dem Quotientenkriterium.

- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergiert absolut, da mit $a_n := \frac{n}{2^n}$ für alle $n \geq 2$ gilt:

  $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{2n} \leq \frac{3}{4} =: \theta < 1$$

- Für $a_n := \frac{1}{n}$ erhalten wir die harmonische Reihe. Es gilt zwar

  $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

  aber es gibt kein $\theta < 1$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$. Daher ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.

- Für $a_n := \frac{1}{n^2}$ gilt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist absolut konvergent, obwohl es wieder kein $\theta < 1$ gibt mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$.

Im allgemeinen ist das Quotientenkriterium also nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Konvergenz.

Ein weiteres nützliches Kriterium:

Satz 7.8. *(Wurzelkriterium)*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut*

2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergiert*

Proof. Übung □

In den Grenzfällen $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ bzw. $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ kann nichts allgemeines ausgesagt werden.

7.3 Umordnung von Reihen

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, und

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine **Umordnung** der gegebenen Reihe. (dieselben Summanden, aber andere Reihenfolge.)

In der Einleitung zur VL wurde gezeigt, dass Umordnungen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i.a. **nicht** gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, z. B. für $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Man kann sogar zeigen:

Satz 7.9. *(Riemann'scher Umordnungssatz)*

Für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, die nicht absolut konvergiert, und jedes $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, die gegen s konvergiert.

Für absolut konvergente Reihen gibt es diese Subtilität nicht:

Satz 7.10. *Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, dann konvergiert jede Umordnung gegen denselben Grenzwert.*

Proof. Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion und $\epsilon > 0$.

Dann gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{M} |a_n| = \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

Wähle $N \in \mathbb{N},\ N \geq M$ mit $\{1, ..., M\} \subset \{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n| &\leq |\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{M} a_n| + |\sum_{n=M+1}^{\infty} a_n| \\ &\leq 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| < \epsilon \end{aligned} \tag{7.4}$$

□

Dies kann insbes. auf Doppelreihen angewandt werden:

Sei

$$\begin{aligned} a: \quad & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & (n, m) \mapsto a_{nm} \end{aligned}$$

Dann kann man die folgenden iterierten Reihen betrachten:

$$A := \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$$
$$B := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$$

dann gilt die folgende Variante des Umordnungssatzes:

Satz 7.11. *Wenn A oder B absolut konvergent ist, dann konvergiert für jede Abzählung*

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad (bjektiv)$$

die Reihe $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ absolut, und es gilt:

$$A = B = S =: \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{nm}$$

Proof. siehe [Königsberger] □

Bemerkung: Selbstverständlich gelten analoge Aussagen für Reihen, die nicht mit $n = 1$ beginnen, da die Konvergenz einer Reihe davon unabhängig ist.

7.4 Rechenregeln für Reihen

Satz 7.12. *Seien* $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *zwei konvergente Reihen, und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann sind auch* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$ *konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A \tag{7.5}$$

$$\tag{7.6}$$

Proof. Dies folgt direkt aus der Grenzwertarithmetik für Folgen. □

Für Produkte von Reihen muss man absolute Konvergenz voraussetzen:

Satz 7.13. *Seien* $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *zwei absolut konvergente Reihen. Dann ist*

$$A \cdot B = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n b_m$$

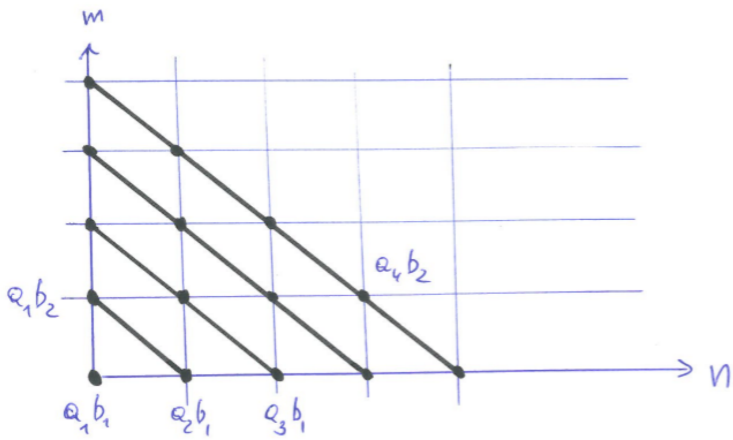
auch absolut konvergent.

(beachte: hier sind 2 Aussagen enthalten: 1) die absolute Konvergenz der Doppelsumme, und 2) die Aussage dass deren Grenzwert durch $A \cdot B$ gegeben ist).

Insbesondere gilt dann die Cauchy Produktformel:

$$\boxed{A \cdot B = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \qquad \text{mit } c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}$$

Dies folgt aus Satz 7.11. Ein direkter Beweis für diesen wichtigen Satz steht in [Forster §8 Satz 3] oder [Griesser 7.4].



7.5 Potenzreihen

Eine wichtige Methode, Funktionen zu definieren und zu untersuchen, ist über Potenzreihen.

Definition 7.3. *Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei $a_n \in \mathbb{R}$ für alle n.*

Wir wollen eine Potenzreihe als Funktion von $x \in \mathbb{R}$ auffassen. Dafür müssen wir zunächst wissen, für welche Werte x sie überhaupt konvergiert. Der erste Schritt in dieser Richtung ist:

Satz 7.14. *Falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = x_0$ konvergiert, so konvergiert sie auch für alle x mit $|x| < |x_0|$, und zwar absolut.*

Proof. oBdA $x_0 \neq 0$ (sonst ist nichts zu zeigen). Per Annahme konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, also $a_n x_0^n \to 0$. Daher ist die Folge beschränkt, also existiert ein k , sodass für alle n gilt $|a_n x_0^n| < k$. Wir schreiben nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

Nun benutzen wir das Majorantenkriterium: Es ist $|a_i x_0^i| \leq k$, daher $|a_n x_0^n||\frac{x}{x_0}|^n \leq k|\frac{x}{x_0}|^n$, und $\sum_{n=0}^{\infty} k|\frac{x}{x_0}|^n$ konvergiert da $|\frac{x}{x_0}| < 1$.

□

Definition 7.4. *Der Konvergenzradius R von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist*

$$R := \sup\{x \geq 0; \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert}\}$$

Satz 7.15. *Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius R, dann gilt:*

1. *Für $|x| < R$ konvergiert die Reihe absolut.*
2. *Für $|x| > R$ divergiert die Reihe*
3. *Für $|x| = R$ ist keine allgemeine Aussage möglich.*

Proof. 1. Sei $|x| < R$. Dann existiert x_0 mit $0 < x_0 < R$ und $|x| < x_0$. Nach Definition von R konvergiert die Reihe für x_0 . Verwende nun Satz 7.14.

2. Sei $|x| > R$. Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert, so würde nach Satz 7.14 folgen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergiert für alle y mit $|y| < |x|$. Wähle y mit $R < y < |x|$, dann folgt ein Widerspruch zur Definition von R.

□

Beispiele:

- Was ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$?

  Wir wissen bereits: Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe absolut, und für $|x| > 1$ divergiert sie. Daraus folgt: $R = 1$.

- Wir werden weiter unten zeigen, dass die Exponentialreihe

  $$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  für beliebige $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, also ist der Konvergenzradius $R = \infty$.

- Betrachte die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$. Es gilt

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} = (n+1)x$$

  Nun ist $|(n+1)x| > 2$ für $n > \frac{2}{|x|}$, also ist die Reihe divergent für alle $x \neq 0$ mit Konvergenzradius $R = 0$.

Es gibt ach eine allgemeine (aber nicht immer sehr praktische) Formel für den Konvergenzradius:

Satz 7.16. *Der Konvergenzradius R von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \textit{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

Hierbei ist $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ zu verstehen.

Analog definiert man “verschobene“ Potenzreihen um einen beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$:

Definition 7.5. *Eine ("verschobene") Potenzreihe um $a \in \mathbb{R}$ ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$.*

Es gelten analoge Aussagen über den Konvergenzradius R "um a", insbesondere ist die Reihe absolut konvergent für alle x mit $|x-a| < R$.

8 Exponentialreihe und Logarithmus

Die Exponentialreihe ist (neben der geometrischen Reihe) die wichtigste Reihe in der Analysis.

Satz 8.1. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die “Exponentialreihe”*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergent

Proof. folgt aus Quotientenkriterium: für alle $n \geq 2|x|$ gilt

$$\frac{|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}|}{|\frac{x^n}{n!}|} = \frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2}$$

□

Damit definiert man die Euler'sche Zahl e:

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,71828...$$

Satz 8.2. *(Eigenschaften der Exponentialfunktion)*

1. *<u>Funktionalgleichung:</u>* *für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

   $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$ *Additions-Theorem der Exponentialfunktion*

2. *<u>Verhalten</u>*

$$\begin{aligned} \exp(0) &= 1, \\ \exp(x) &> 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \exp(-x) &= \exp(x)^{-1} \\ \exp(y) &> \exp(x) \quad \textit{wenn} \quad y > x \end{aligned}$$

3. *<u>Restgliedabschätzung</u> es gilt:*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x),$$

   mit

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \qquad \textit{für alle } |x| \leq \frac{N}{2} + 1$$

Bemerkungen:

- Es gilt:

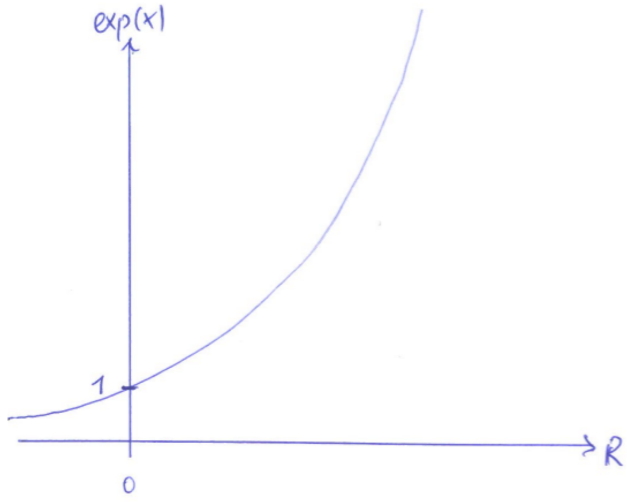
$$\exp(n) = e^n$$

  (folgt induktiv aus der Funktionalgleichung und der Definition von e, Übung)

  Man definiert:

$$e^x := \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Graph der Exponentialfunktion:



Proof. • Funktionalgleichung:

Wir wissen schon, dass die Exponentialreihe absolut konvergent ist. Daher können wir die Cauchy'sche Produktformel verwenden:

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n \tag{8.1}$$

unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes. Daraus folgt $\exp(x)\exp(y) = \sum c_n = \exp(x+y)$.

- $\exp(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$
- für $x \geq 0$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 > 0$$

für $x < 0$: Aus der Funktionalgleichung folgt

$\exp(x)\exp(-x) = 1 \quad \Rightarrow \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$ weil $\exp(-x) > 0$.

- Monotonie: für $y > x$ gilt

$$\exp(y) = \exp(x + (y-x)) = \exp(x)\underbrace{\exp(y-x)}_{\geq 1} \geq \exp(x)$$

da $\exp(x) \geq 1$ für $x \geq 0$, wie oben gezeigt wurde.

- Restgliedabschätzung:

$$
\begin{aligned}
|R_{N+1}(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + ...\Big) \\
&\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{N+2} + (\frac{|x|}{N+2})^2 + ...\Big) \qquad (8.2)
\end{aligned}
$$

für $|x| \leq \frac{N+2}{2}$ kann dies abgeschätzt werden durch

$$
|R_{N+1}(x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\Big) \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \qquad (8.3)
$$

unter Verwendung der geometrischen Reihe für $\frac{1}{2}$.

$\square$

Weiters kann man zeigen, dass

$$
\lim_{n\to\infty} \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n = \exp(x)
$$

(ohne Beweis, siehe z.B. Forster)

Bemerkung: Bei der praktischen Berechnung von $\exp(x)$ benutzt man nur für kleine Werte von $|x|$ die Reihendarstellung, die dann schnell konvergiert. Für größere Werte von $|x|$ zieht man die Funktionalgleichung mit heran. Z.B. läßt sich jede reelle Zahl x in der Form $x = n+h$ darstellen, wobei n eine ganze Zahl und $|h| \leq \frac{1}{2}$ ist. Es gilt dann $\exp(x) = \exp(n+h) = e^n \exp(h)$.

8.1 Logarithmus

Definition 8.1. *(Monotone Funktionen)*

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend), wenn aus $x, x' \in D, x < x'$ stets folgt $f(x) \leq f(x')$ (bzw. $f(x) < f(x')$, $f(x) \geq f(x'), f(x) > f(x')$).

Die folgende Tatsache lässt sich leicht mit Satz 8.2 nachweisen:

Die Exponentialfunktion

$$
\exp : \quad \mathbb{R} \to (0, \infty)
$$

ist bijektiv und streng monoton wachsend.

Damit definieren wir:

Definition 8.2. *Die Umkehrfunktion zu* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *heißt (natürlicher) Logarithmus*

$$\ln : \quad (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

Es gilt:

Satz 8.3. *(Eigenschaften des nat. Log.)*

1. *Funktionalgleichung:*
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
2. $\ln 1 = 0, \qquad \ln e = 1$
3. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
4. $y > x \quad \Rightarrow \quad \ln y > \ln x$

(vgl. auch Satz 10.8 !)

Proof. Funktionalgleichung:

Setze $\xi := \ln x$ und $\eta := \ln y$. Dann ist laut Definition $\exp \xi = x$ und $\exp \eta = y$. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \exp(\eta) = xy$$

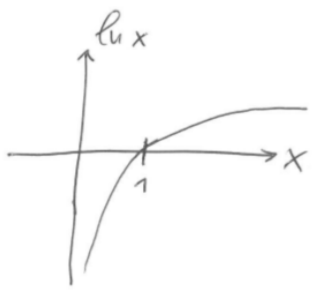
Wieder nach Definition der Umkehrfunktion ist daher

$$\ln(xy) = \xi + \eta = \ln x + \ln y$$

Die übrigen Eigenschaften sind Übungsaufgaben.

□

Graph von $\ln x$:



Damit kann man die allgemeine Potenzfunktion definieren:

Definition 8.3. *Für $a > 0$ definiert man die Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x := \exp(x \ln a) \end{aligned}$$

außerdem definiert man

$$0^x := \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Man bezeichnet dies auch als Exponentialfunktion zur Basis a.

Die Notation verallgemeinert die bisher eingeführten Spezialfälle der Potenzfunktion und hat die gewünschten Eigenschaften:

Satz 8.4. *für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $$a^{x+y} = a^x a^y$$
2. $$a^n = \underbrace{a...a}_{n}, \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad n \in \mathbb{N}$$
3. $$\ln(a^x) = x \ln a, \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$
4. $$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \big(\frac{1}{a}\big)^x$$

Proof. 1) folgt unmittelbar aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Aus $a = \exp(\ln a)$ folgt somit $\exp(n \ln a) = a^n = \underbrace{a...a}_{n}$.

Weiters gilt

$$a = \exp(\ln a) = \exp(n\frac{1}{n} \ln a) = \big(\exp(\frac{1}{n} \ln a)\big)^n$$

und daher $\sqrt[n]{a} = \exp(\frac{1}{n} \ln a) = a^{\frac{1}{n}}$.

Ähnlich folgt aus

$$\ln(a^x) = \ln(\exp(x \ln a)) = x \ln a$$

sofort

$$(a^x)^y = \exp(y \ln(a^x)) = \exp(yx \ln a) = a^{xy}.$$

$\square$

9 Folgen und Reihen komplexer Zahlen

Ganz analog wie für $\mathbb{R}$ kann man konvergente Folgen und Reihen von komplexen Zahlen definieren. Dazu benötigen wir zunächst eine wichtige Eigenschaft der Norm $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ (cgl. Kapitel 4):

Satz 9.1. *Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:*

1. $|z| \geq 0; \quad |z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$
2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung)*
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Proof. 1.) ist trivial.

3) folgt aus

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = (z_1\overline{z}_1)(z_2\overline{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2$$

2.) Da für jede komplexe Zahl z gilt $Re(z) \leq |z|$, folgt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

also $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

□

Damit definiert man

Definition 9.1. *Der <u>Abstand</u> zweier komplexer Zahlen z und w in $\mathbb{C}$ ist definiert durch* $|z - w|$

Für die Konvergenzbetrachtungen bei Folgen reeller Zahlen war nur wichtig, dass wir einen Abstands-Begriff hatten, der die Dreiecksungleichung erfüllt. Da wir nun auch auf $\mathbb{C}$ einen solchen Abstandsbegriff haben, können wir vieles sofort von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragen. Zum Beispiel die Definition von Konvergenz:

Definition 9.2. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt <u>konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$</u>, wenn*

$$\boxed{\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - a| < \epsilon} \tag{9.1}$$

wir schreiben dann

$$\boxed{a = \lim_{n\to\infty} a_n} \qquad \textit{kurz:}\ a_n \to a$$

Wenn man den Begriff einer ϵ- Umgebung in $\mathbb{C}$ verwendet, kann man das genau wie für $\mathbb{R}$ fomulieren:

Definition 9.3. *Sei $\epsilon > 0$. Die ϵ- Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{C}$ ist definiert durch*

$$U_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{C} | \ |x - a| < \epsilon\}$$

dies ist eine offene Kreisscheibe um $a \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$\boxed{a_n \text{ konvergiert gegen } a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 : \ a_n \in U_\epsilon(a) \quad \text{für fast alle } \ n \in \mathbb{N}}$$

Dies kann man auch durch die Real- und imaginärteile von a_n formulieren:

Satz 9.2. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die Folge konvergiert genau dann, wenn die beiden reellen Folgen $(Re(a_n))$ und $(Im(a_n)))$ konvergieren. Im Falle der Konvergenz gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} Re(a_n) + i \lim_{n\to\infty} Im(a_n)$$

Proof. es gilt:

$$\begin{aligned} |Re(a_n) - Re(a)| &\leq |a_n - a| \\ |Im(a_n) - Im(a)| &\leq |a_n - a| \end{aligned} \tag{9.2}$$

$\underline{\Rightarrow}$

$a_n \to a$ heißt, dass $|a_n - a| \to 0$. Daher konvergiert $Re(a_n) \to Re(a)$ und $Im(a_n) \to Im(a)$ (Majorantenkriterium mit (9.2)).

$\underline{\Leftarrow}$

Aus der Grenzwertarithmetik folgt $\lim_{n\to\infty} \left(|Re(a_n) - Re(a)|^2 + |Im(a_n) - Im(a)|^2\right) = 0$, als $\lim_{n\to\infty} |a_n - a|^2 = 0$,

□

Beispiel:

für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergiert die komplexwertige Folge $a_n = z^n$:

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0$$

Proof. $|z^n - 0| = |z|^n \to 0$.

$\square$

Insbesondere folgt $Rez^n \to 0$ und $Imz^n \to 0$

eine einfache Folgerung ist die folgende Aussage:

Satz 9.3. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann konvergiert auch die Folge $(\bar{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{a}$$

Definition 9.4. *eine Folge (a_n) komplexer Zahlen heißt Cauchy-Folge, falls*

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n, m \geq N : \quad |a_n - a_m| < \epsilon$$

und es gilt analog wie auf $\mathbb{R}$:

Satz 9.4. *(Cauchy Kriterium)*

(a_n) ist Cauchy-Folge komplexer Zahlen $\Leftrightarrow$ (a_n) ist konvergent

(zum Beweis zeigt man zunächst, dass (a_n) Cauchy-Folge genau dann ist, wenn $(Re(a_n))$ und $(Im(a_n))$ reelle Cauchy-Folgen sind. Dann kann man Satz 9.2 verwenden).

Die Aussage dieses Satzes bezeichnet man als Vollständigkeit der komplexen Zahlen.

Definition 9.5. *Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.*

Dann gilt:

Satz 9.5. *Die Rechenregeln für Folgen und Reihen, das Cauchy-, das Majoranten-, das Quotienten- und das Wurzelkriterium gelten auch für komplexe Zahlen; ebenso die Sätze über absolute Konvergenz und Umordnungen.*

Der Beweis ist analog wie für $\mathbb{R}$, da alle diese Sätze darauf beruhten, dass Cauchy-Folgen konvergieren. Dies gilt analog in $\mathbb{C}$.

Beim Majorantenkriterium ist zu beachten, dass die Majorante immer eine Folge (nicht-negativer) reeller Zahlen ist. Denn die Bedingung $|a_n| \leq b_n$ macht nur für reelle Zahlen b_n Sinn.

Weiters kann man leicht sehen, dass die Grenzwertarithmetik auch für komplexe konvergente Reihen gilt.

Beispiel: komplexe geometrische Reihe

Sei $|z| < 1$ eine komplexe Zahl. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \tag{9.3}$$

Proof. wir erinnern uns an die geometrische Summenformel (5.2):

$$s_n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \tag{9.4}$$

Wir wissen bereits, dass $z^n \to 0$ konvergiert (für $|z| < 1$!). Damit ergibt sich aus der Grenzwertarithmetik sofort

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$$

□

für $|z| > 1$ ist die geometrische Reihe divergent, weil sie keine Cauchy-Foge ist ($|s_n - s_{n+1}| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1} > 1$).

Komplexe Potenzreihen. Für komplexe Potenzreihen $\sum a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $a_n \in \mathbb{C}$ gelten analoge Ausssagen wie für reelle. Insbesondere definiert man den Konvergenzradius als

$$R = \sup\{|z|; \quad \sum |a_n z^n| \quad \text{konvergiert}\} \geq 0$$

Die Reihe konvergiert dann wieder absolut für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$. Beachte aber, dass es nun unendlich viele Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$ gibt (falls $0 < R < \infty$).

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R\}$ heißt Konvergenzkreis. Dies ist wirklich ein Kreis (falls $0 < R < \infty$), und dies ist der Grund für den Namen "Konvergenzradius".

9.1 Komplexe Exponentialfunktion.

Man kann die Definition der Exponentialfunktion sofort auf $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ verallgemeinern. Dies ist wichtig zum Verständnis der trigonometrischen Funktionen (und für eine wichtige Klasse von Differenzialgleichungen).

Satz 9.6. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die "Exponentialreihe"*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent

(Beweis genau wie im reellen, Übung)

Man verwendet die Schreibweise

$$e^z := \exp(z)$$

auch im komplexen.

Satz 9.7. *(Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion)*

1. *Funktionalgleichung: für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)} \qquad \textit{Additions-Theorem der Exponentialfunktion}$$

2. *für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\exp(-z) = \exp(z)^{-1}$$
$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$$

3. *Restgliedabschätzung es gilt:*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + R_{N+1}(z),$$

mit

$$|R_{N+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \qquad \textit{für alle } |z| \leq \frac{N}{2} + 1$$

Proof. genauso wie im Reellen (Die Cauchy'sche Produktformel gilt auch im Komplexen).

um $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ zu zeigen, setzten wir

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$
$$\tilde{s}_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} \tag{9.5}$$

Nach den Rechenregeln der komplexen Konjugation gilt

$$\tilde{s}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{(z^k)}}{k!} = \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(z^k)}{k!}\right)} = \overline{s_n(z)}$$

Mit Satz 9.3 folgt daher

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n(z) = \lim_{n\to\infty} \overline{s_n(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} s_n(z)} = \overline{\exp(z)}$$

□

Definition 9.6. *(Sinus, Cosinus)*

für $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\cos x := Re(e^{ix}) \tag{9.6}$$
$$\sin x := Im(e^{ix}) \tag{9.7}$$

es gilt also

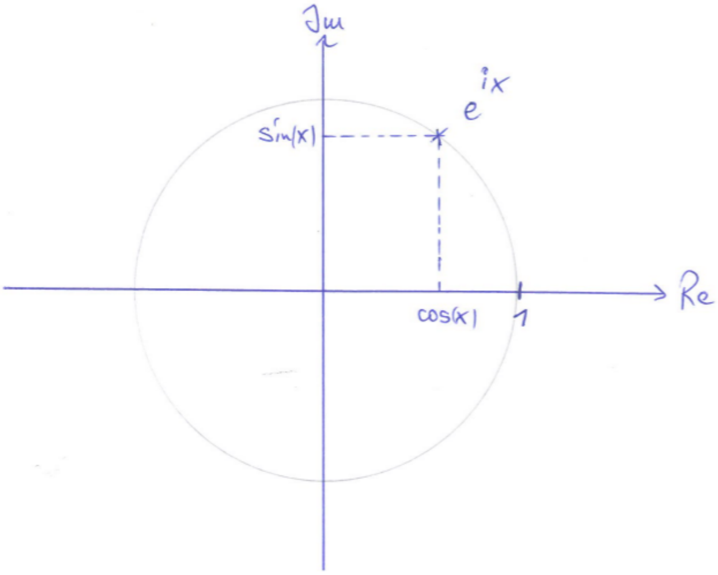
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \textit{Euler'sche Formel}$$

Geometrische Deutung von Cosinus und Sinus in der Gaußschen Zahlenebene.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|e^{ix}| = 1$, da

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$$

nach Satz 9.7. Also ist e^{ix} ein Punkt des Einheitskreises komplexen Ebene, und $\cos x$ bzw. $\sin x$ sind die Projektionen dieses Punktes auf die reelle bzw. imaginäre Achse.



Die wichtigsten Eigenschaften sind wie folgt:

Satz 9.8. *(Eigenschaften von* sin *und* cos*)*

1.
$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

2.

$$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

insbesondere ist $\cos(0) = 1$ *und* $\sin(0) = 0$.

3.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

4. (Additionstheoreme)

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

5. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\sin x - \sin y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$

Proof. 1. folgt unmittelbar aus der Definition

2. folgt aus 1)

3. folgt aus 1)

4. folgt aus Vergleich von Real- und Imaginärteil in

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} &= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i\Big(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)\Big)\end{aligned} \tag{9.8}$$

5. wir setzen $u = \frac{x+y}{2}$ und $v = \frac{x-y}{2}$. Dann ist $u + v = x$ und $u - v = y$. Aus dem Additionstheorem 4) folgt

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\ &= (\sin u \cos v + \cos u \sin v) - (\sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v))) \\ &= 2\cos u \sin v = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})\end{aligned}$$

die 2. Gleichung wird analog bewiesen.

$\square$

sin und cos lassen sich auch durch Potenzreihen darstellen:

Satz 9.9. *für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Proof. Für die Potenzen von i gilt:

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4m \\ i, & \text{falls } n = 4m+1 \\ -1, & \text{falls } n = 4m+2 \\ -i, & \text{falls } n = 4m+3 \end{cases}$$

(für $m \in \mathbb{N}$). Damit erhält man aus der Exponentialreihe

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{(n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{(x)^n}{(n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big) \end{aligned}$$

Mit $\cos x = Re(e^{ix})$ und $\sin x = Im(e^{ix})$ folgt die Behauptung.

Die absolute Konvergenz folgt unmittelbar aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe.

□

Man kann weiters zeigen:

Satz 9.10. *Die Funktion $\cos(x)$ ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend, d.h. $\cos(x) < \cos(y)$ für $x > y$, und hat genau eine Nullstelle.*

(Beweis: Siehe Forster §14 Satz 6)

Damit definiert man:

Definition 9.7. *$\frac{\pi}{2}$ ist die (eindeutig bestimmte) Nullstelle der Funktion $\cos x$ im Intervall $[0, 2]$.*

numerisch findet man

$$\pi = 3.141592653...$$

Nun können wir die Nullstellen und die Periodizität der trigonometrischen Funktionen beschreiben:

Satz 9.11. *Es gilt:*

(spezielle Werte der Exponentialfunktion)

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \qquad e^{2\pi i} = 1$$

Proof. Aus $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ folgt $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Man kann leicht sehen, dass $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$, und daher $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Somit

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$$

und die übrigen Behauptungen folgen aus $e^{i\frac{n\pi}{2}} = i^n$.

$\square$

Somit ergibt sich die folgende Wertetabelle für sin und cos

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

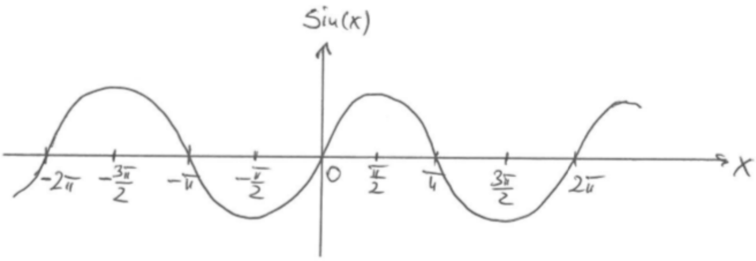
Satz 9.12. *(Periodizität)*

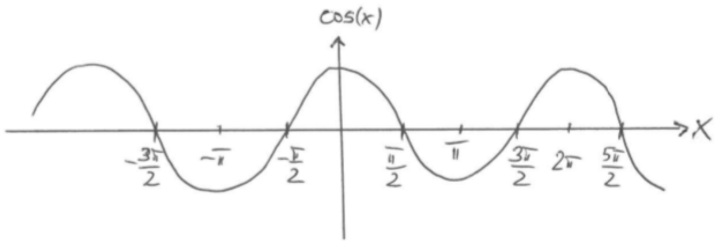
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x), \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$
$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \qquad \sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

dies folgt einfach aus den Additionstheoremen und der obigen Wertetabelle.

Graph von $\sin x$ und $\cos x$:





Satz 9.13. *(Nullstellen von* sin *und* cos*)*

1.
$$\{x \in \mathbb{R};\ \sin(x) = 0\} = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

2.
$$\{x \in \mathbb{R};\ \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Proof. siehe Forster § 14 Corollar 2

□

Daraus folgt:

Satz 9.14. *Für $x \in \mathbb{R}$ ist $e^{ix} = 1$ genau dann, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.*

Proof. wir schreiben
$$\sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2i}\big(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\big) = \frac{e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}\big(e^{ix} - 1\big)$$
Daher gilt $e^{ix} = 1$ genau dann wenn $\sin(\frac{x}{2}) = 0$. Die Behauptung folgt daher aus dem vorherigen Satz. □

Weitere trigonometrische Funktionen

Definition 9.8. *Tangens:*

$$\begin{aligned} \tan :\quad & \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

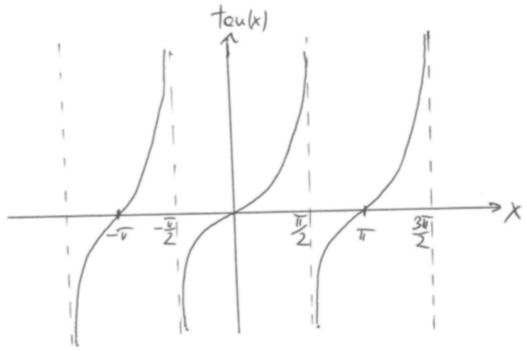
Cotangens:

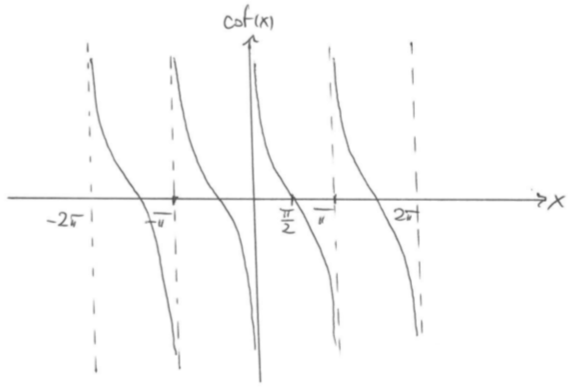
$$\cot :\quad \mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

<u>beachte:</u> Die Nullstellen des Nenners sind vom Definitionsbereich ausgenommen, sodass die Funktionen wohldefiniert sind.

Graph von $\tan x$ und $\cot x$:





<u>hyperbolische Winkelfunktionen</u>

die folgenden Funktionen sind in der Physik gebräuchlich:

Definition 9.9.

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

und

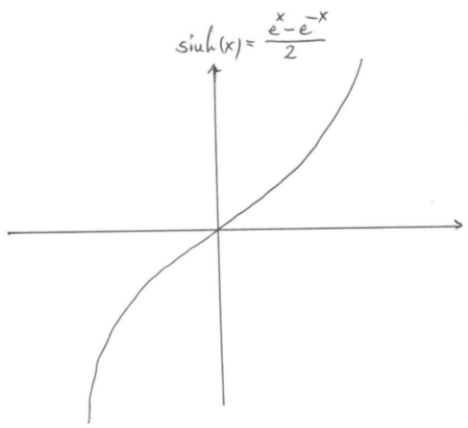
$$\tanh : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

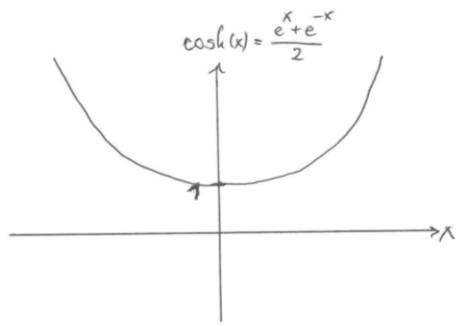
$$x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

es gelten analoge Additionstheoreme, die analog aus der Funktionalgleichung von exp bewiesen werden. z.B:

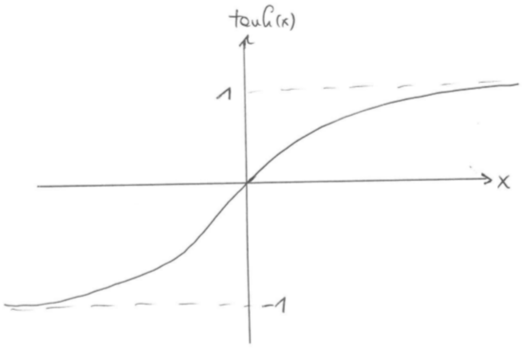
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Graph von $\sinh x$ und $\cosh x$:





Graph von $\tanh x$



9.2 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 9.15. *+ Definition*

1. *Die Funktion* cos *bildet das Intervall* $[0, \pi]$ *bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab (streng monoton fallend).*

   Die Umkehrfunktion

$$\arccos : \; [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos(x)$$

heißt Arcus-Cosinus.

2. *Die Funktion* sin *bildet das Intervall* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *bijektiv auf* $[-1,1]$ *ab (streng monoton wachsend).*

   Die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} \arcsin:\ [-1,1] &\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

   heißt Arcus-Sinus.

3. *Die Funktion* tan *bildet das Intervall* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab (streng monoton wachsend).*

   Die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} \arctan:\ \mathbb{R} &\to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

   heißt Arcus-Tangens.

Proof. nicht schwer [Forster § 14] □

Das heißt, dass z.B.

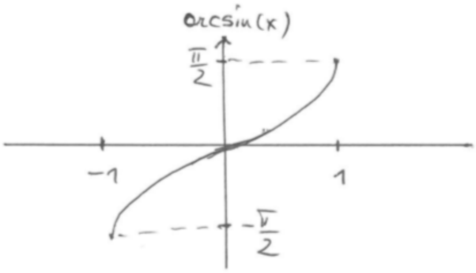
$$\sin(\arcsin(x)) = x \qquad \text{für} \quad -1 \le x \le 1$$

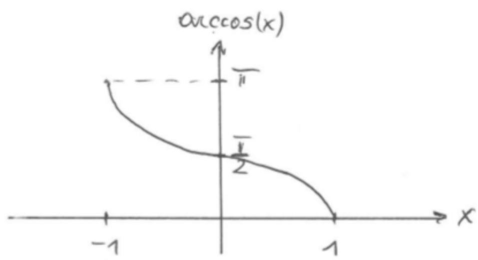
und

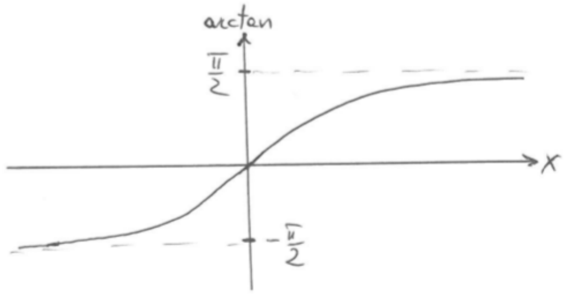
$$\arcsin(\sin(x)) = x \qquad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

analog für die übrigen Arcus-Funktionen

Graphen:







Die oben definierten Funktionen nennt man auch die *Hauptzweige* von arccos, arcsin und arctan. Man kann auch analoge "Nebenzweige" mit verschobenen Definitionsbereichen definieren.

Die komplexe Exponentialfunktion liefert eine nützliche Darstellung von komplexen Zahlen:

Satz 9.16. *(Polarkoordinaten)*

Jede komplexe Zahl z läßt sich schreiben als

$$z = re^{i\varphi}$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \geq 0$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Proof. Für $z = 0$ ist $z = 0e^{i\varphi}$ mit beliebigem φ.

Se jetzt $z \neq 0$. Setze $r := |z|$ und $\zeta = \frac{z}{r}$. Dann ist $|\zeta| = 1$. Zerlege $\zeta = \xi + i\kappa$ in Real- und Imaginärteil. Dann ist $\xi^2 + \kappa^2 = 1$, also $|\xi|^2 \leq 1$. Daher ist

$$\psi := \arccos \xi$$

wohldefiniert. Da $\cos \psi = \xi$, folgt

$$\sin \psi = \pm\sqrt{1 - \xi^2} = \pm\kappa$$

Wir setzen $\varphi := \psi$ falls $\sin \psi = \kappa$, und $\varphi := -\psi$ falls $\sin \psi = -\kappa$. Dann ist in jedem Fall

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = \xi + i\kappa = \zeta$$

also

$$z = re^{i\varphi}.$$

Die Eindeutigkeit von φ bis auf ein Vielfaches von 2π folgt aus Satz 9.14, da $e^{i\varphi} = e^{i\alpha} = \zeta$ impliziert $e^{i(\varphi-\alpha)} = 1$ also $\varphi - \alpha = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

□

Dies erlaubt eine einfache Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen. Sei $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Dann ist

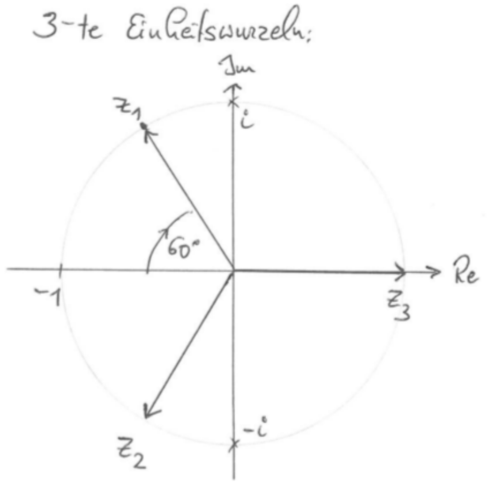
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Man erhält also das Produkt zweier komplexer Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.

n-te Einheitswurzeln

Satz 9.17. *Sei n eine natürliche Zahl. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n komplexe Lösungen, nämlich $z = \zeta_k$ mit*

$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, .., n-1$$



Proof. Sei z eine Lösung von $z^n = 1$. Wir können dann z schreiben als $z = re^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $r \geq 0$. Wegen

$$1 = |z^n| = |z|^n = r^n$$

folgt $r = 1$, also

$$z^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = 1$$

Nach Satz 9.14 ist $n\varphi = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, d.h.

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n}$$

Wegen $0 \leq \varphi < 2\pi$ ist $0 \leq k < n$, also $z = \zeta_k$. Umgekehrt ist für jedes k

$$\zeta_k^n = (e^{i\frac{2k\pi}{n}})^n = e^{i2k\pi} = 1$$

□

(vgl. Fundamentalsatz der Algebra!) Es gilt also

$$z^n - 1 = (z - \zeta_0)(z - \zeta_1)..(z - \zeta_{n-1})$$

10 Stetige Funktionen

anschauliche Bedeutung der Stetigkeit:

"Eine Funktion ist stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzten"

Definition 10.1. *Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.*

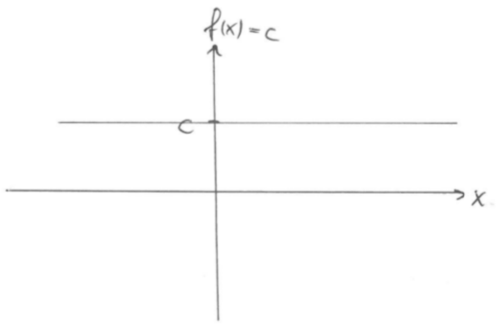
Der Graph von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} : \ y = f(x)\}$$

Beispiele:

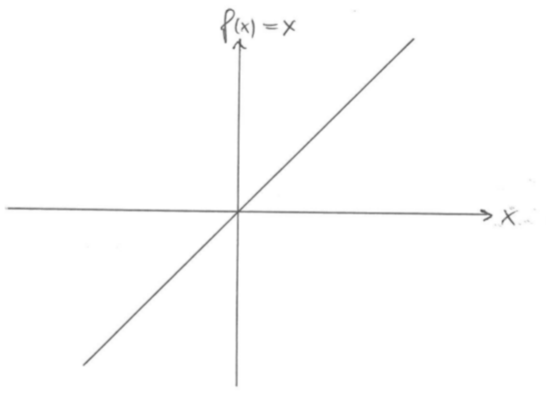
- konstante Funktion. Sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{10.1}$$
$$x \mapsto f(x) = c \tag{10.2}$$



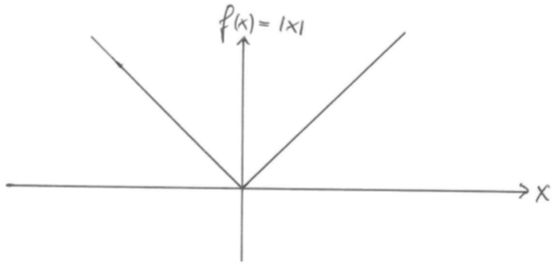
- identische Abbildung

$$id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{10.3}$$
$$x \mapsto f(x) = x \tag{10.4}$$

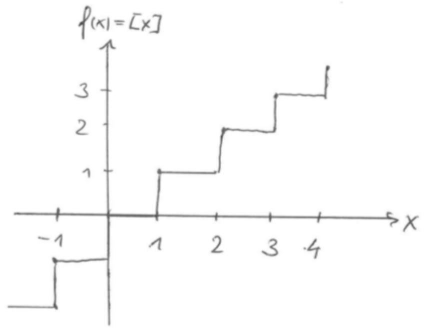


- Absolutbetrag

$$abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{10.5}$$
$$x \mapsto |x| \tag{10.6}$$

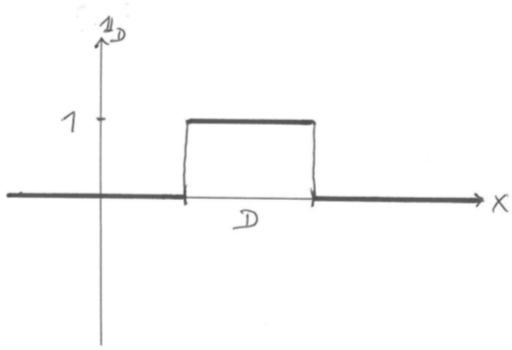


- $x \mapsto [x], \quad x \in \mathbb{R}$ (größte ganze Zahl kleiner oder gleich x)



- <u>charakteristische Funktion</u>:
  Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann:

$$\mathbb{1}_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$



mathematisch präzise Definition von Stetigkeit:

10.1 Definition

Definition 10.2. *Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$.*

f heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ *für jede Folge* (a_n) *in* D *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn sie in allen $x_0 \in D$ stetig ist.

Satz 10.1. *(Stetigkeit von Summen, Produkten und Quotienten)*

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann ist ebenso stetig in $x_0 \in D$:

1. *Summenfunktion:* $f + g : D \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. *Produktfunktion:* $f \cdot g : D \to \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
3. *für* $x_0 \in D_0 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$:
   Quotientenfunktion: $\frac{f}{g} : D_0 \to \mathbb{R}, \quad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Proof. folgt aus Grenzwertarithmetik für Folgen. □

Beispiele für stetige Funktionen:

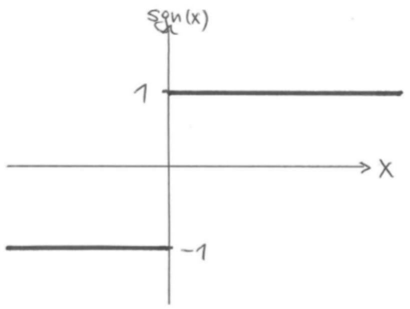
- $x \mapsto p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$
  ... Polynomfunktion vom Grad n
- f, g Polynome, $D = \{x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 0\}$

$$\begin{aligned} r : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{rationale Funktion} \end{aligned}$$

- $x \mapsto |x|, \quad x \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$
- exp, sin, cos etc. sind stetig (Beweis später).

Beispiele für *nicht* stetige Funktionen:

- $x \mapsto [x], \quad x \in \mathbb{R}$ (größte ganze Zahl kleiner oder gleich x)
-
$$sgn: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$



- $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ist nicht stetig in 0 und 1, sonst stetig
- $1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nirgends stetig.

Satz 10.2. *(Stetigkeit der Komposition)*

Sei $g : D \to L$ stetig in $x_0 \in D$ und $f : L \to N$ stetig in $y_0 = g(x_0) \in L$. Dann ist $f \circ g : D \to N$ stetig in x_0.

Proof. Sei (a_n) Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Aus der Stetigkeit von g in x_0 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = g(x_0) = y_0$. Aus der Stetigkeit von f in y_0 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(a_n)) = f(y_0) = (f \circ g)(x_0)$.

□

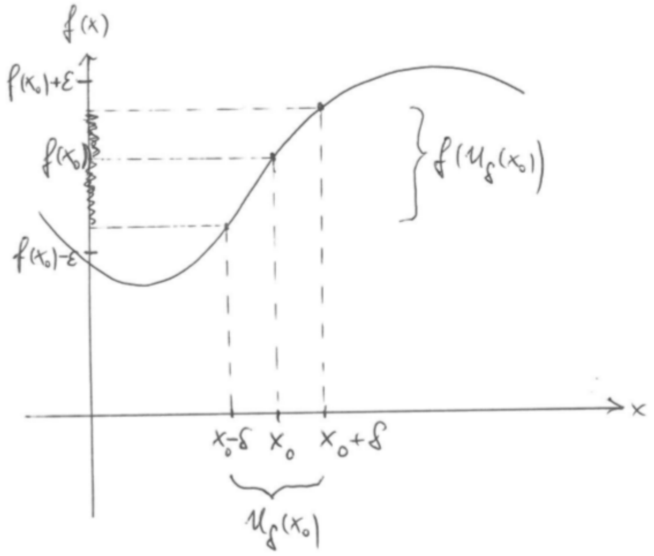
10.2 Alternative Charakterisierung ($\epsilon - \delta$-Kriterium)

Satz 10.3. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn*

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad f(U_\delta(x_0)) \subset U_\epsilon(f(x_0))$

oder explizit:

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_0) - f(x)| < \epsilon.$



Dies entspricht dem anfangs erwähnten intuitiven Konzept von Stetigkeit

Proof. $\Rightarrow$: indirekter Beweis:

Ann: $\exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \quad f(U_\delta(x_0)) \not\subset U_\epsilon(f(x_0))$

$\Rightarrow \exists \epsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : \quad f(U_{\frac{1}{n}}(x_0)) \not\subset U_\epsilon(f(x_0))$

Wähle Folge $a_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)$ mit $f(a_n) \notin U_\epsilon(f(x_0))$. Dann:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$
2. $f(a_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$ (weil $\forall n \in \mathbb{N} : \quad f(a_n) \notin U_\epsilon(f(x_0))$)
   d.h. f nicht stetig in x_0 $\lightning$

$\Leftarrow$: Sei a_n Folge mit $a_n \to x_0$ und $\epsilon > 0$. Dann:

1. $\exists \delta > 0 : \; f(U_\delta(x_0)) \subset U_\epsilon(f(x_0))$
2. $\exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n > N : \; a_n \in U_\delta(x_0)$
   $\Rightarrow \; \forall n \geq N : \; f(a_n) \in U_\epsilon(f(x_0))$

□

Bemerkung:

Die Definition von Stetigeit und die bisherigen Sätze kann man sofort auf Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verallgemeinern, da nur der Begriff des Abstandes verwendet wird.

10.3 Grenzwerte von Funktionen

Mit der Stetigkeit eng verwandt ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion $f(x)$, wenn sich x an eine Zahl x_0 annähert. Dabei ist es insbesondere erlaubt, dass x_0 nicht im Definitionsbereich D von f liegt, aber an D "angrenzt". genauer:

Definition 10.3. *Sei $D \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt*

1. *Häufungspunkt von D, falls es eine gegen x_0 konvergente Folge $a : \mathbb{N} \to D \backslash \{x_0\}$ gibt.*
2. *Berührpunkt von D, falls es eine gegen x_0 konvergente Folge $a : \mathbb{N} \to D$ gibt.*

Die Menge der Berührpunkte von D bezeichnet man mit $\overline{D}$ ("Abschluß von D").

beachte: x_0 muss hierbei nicht in D liegen!

Die beiden Konzepte sind ähnlich, aber es gibt einen feinen Unterschied: jeder Häufungspunkt ist Berührpunkt, aber nicht umgekehrt.

Beispiele:

1. Jedes $x_0 \in [0,1]$ ist Häufungspunkt von $(0,1)$ und es gibt keine weiteren. Insbesondere ist $\overline{(0,1)} = [0,1]$.
2. $\mathbb{Z}$ hat keinen Häufungspunkt, aber $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$
3. Die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ist ganz $\mathbb{R}$. (Übung)

Definition 10.4. *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, und $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von D . Die Funktion f hat in x_0 den Grenzwert y_0, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $a : \mathbb{N} \to D \backslash \{x_0\}$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = y_0$$

Schreibweise: $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

Für den Grenzwert von Funktionen gelten analoge Rechenregeln wie für Grenzwerte von Folgen.

Insbesondere: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von D mit $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$ und $b = \lim_{x \to x_0} g(x)$. Dann gilt:

- $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = a + b$

- $\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = a\cdot b$
- $\lim_{x\to x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{a}{b}$ falls $b\neq 0$.

Beispiele:

- $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}\subset\mathbb{R}$ und $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^x-1}{x}$. Dann ist
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$
Proof. mit der Restgliedabschätzung in Satz 8.2 gilt
$$|e^x-(1+x)|\leq |x^2| \qquad \text{für} \quad |x|\leq \frac{3}{2}.$$
Division duch $|x|$ ergibt für $0<|x|\leq\frac{3}{2}$
$$|\frac{e^x-1}{x}-1| = |\frac{e^x-(1+x)}{x}|\leq |x|$$
Daraus folgt die Behauptung, weil $\lim_{x\to 0}|x|=0$.
(explizit: für jede Folge (a_n) in $D=D\setminus\{0\}$ mit $\lim a_n = 0$ folgt $\lim f(a_n)=1$)

$\square$

- $$\lim_{x\to 0,\ x\neq 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{10.7}$$
Beweis: Übung
(Strategie wie oben, unter Verwendung von $\sin(x) = \frac{1}{2i}e^{-ix}(e^{2ix}-1)$ und der Restgliedabschätzung für die komplexe Exponentialfunktion)

Manchmal existiert der Grenzwert einer Funktion nur in einem eingeschränkten Sinn, als links- oder rechtsseitiger Grenzwert:

Definition 10.5. *Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}$ besitzt den*

1. *rechtsseitigen Grenzwert y_0 bei x_0, falls x_0 Häufungspunkt von $D\cap(x_0,\infty)=:D^+$ ist und die Restriktion $\hat{f}:D^+\to\mathbb{R},\ x\to f(x)$ erfüllt: $\lim_{x\to x_0}\hat{f}(x)=y_0$.*

   Schreibweise: $\lim_{x\searrow x_0}\hat{f}(x)=y_0$

   analog definiert man den linksssseitigen Grenzwert $\lim_{x\nearrow x_0}\hat{f}(x)=y_0$

2. *(uneigentlichen) Grenzwert y_0 in ∞, wenn D nicht nach oben beschränkt ist und für jede bestimmt divergente Folge $a:\mathbb{N}\to D$ mit $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=y_0$.*

Man schreibt dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$.

Analog für $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

<u>Beispiele:</u>

1. für die Funktion $sgn: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{x\searrow 0} sgn(x) = 1, \qquad \lim_{x\nearrow 0} sgn(x) = -1$$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$.

3. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \tag{10.8}$$

<u>Beweis:</u> Für alle $x > 0$ ist

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

also ist

$$\frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!}$$

Daraus folgt die Behauptung.

4. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \infty \tag{10.9}$$

<u>Beweis:</u> Die erste Aussage folgt aus dem obigem Resultat, da $x^k e^{-x} = \left(\frac{e^x}{x^k}\right)^{-1}$.

Die zweite Aussage folgt analog, weil

$$\lim_{x\searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^k} e^y = \infty$$

5.

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\searrow 0} \ln x = -\infty \tag{10.10}$$

<u>Beweis:</u> Sei $k \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Da die Funktion ln streng monoton wachsend ist, gilt $\ln x > k$ für alle $x > e^k$. Also ist $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Daraus folgt auch die zweite Behauptung, weil

$$\lim_{x\searrow 0} \ln x = \lim_{y\to\infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y\to\infty} \ln y = -\infty$$

mit $y = \frac{1}{x}$.

6. Für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow 0} x^{-\alpha} = \infty \tag{10.11}$$

   Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $x_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Mit (10.10) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \ \ln x_n = -\infty$$

   Da $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (aus (10.9)), folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha = \lim_{n\to\infty} e^{\alpha \ln x_n} = 0,$$

   also $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha = 0$. Die zweite Beziehung folgt wegen $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$.

   Bemerkung: dies rechtfertigt die Definition $0^\alpha = 0$ für alle $\alpha > 0$ in Definition 8.3. Dann ist die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ auf ganz $[0, \infty)$ stetig.

7. Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\searrow 0} x^\alpha \ \ln x = 0 \tag{10.12}$$

   das heißt, dass der Logarithmus für $x \to \infty$ langsamer gegen ∞ geht wie jede positive Potenz von x.

   Beweis: Übung

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Existenz des Grenzwertes einer Funktion:

Satz 10.4. *(Grenzwerte & Stetigkeit)*

Sei $f: \ D \to \mathbb{R}, \ D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Dann gilt:

f ist stetig in $x_0 \in D \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(Bemerkung: Ein Punkt $x_0 \in D$, der nicht Häufungspunkt von D ist, heißt isolierter Punkt von D . In isolierten Punkten ist jede Funktion stetig.)

Proof. Übung □

Definition 10.6. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \notin D$ Häufungspunkt von D, und $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Dann heißt*

$$\widehat{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in D \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$$

stetige Fortsetzung von f in x_0, und $\widehat{f}$ ist stetig in x_0.

solche Lücken x_0 im Definitionsbereich, für die man eine stetige Fortsetzung definieren kann, nennt man "hebbare Singularitäten" (in der komplexen Funktionentheorie sind dazu noch viel stärkere Aussagen möglich).

Beispiel:

$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ ist stetig mit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Dann ist $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Bemerkung:

Alle Defiitionen und Aussagen dieser Sektion 10.3 (mit Ausnahme von Def. 10.5 über rechts- und linksseitige Grenzwerte) kann man sofort auf Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verallgemeinern, da nur der Begriff des Abstandes verwendet wird.

10.4 Die Landau Symbole $o(.)$ und $\mathcal{O}(.)$

...dienen zum Vergleich der Wachstums- bzw. Abfall-Eigenschaften von Funktionen.

Beispiele:

- Für $\alpha > 0$ strebt jede Potenz $\frac{1}{x^\alpha}$ für $x \searrow 0$ schneller nach ∞ als $|\ln x|$.
- Für $\alpha > 0$ strebt jede Potenz x^α für $x \to \infty$ schneller nach ∞ als $|\ln x|$.

Definition 10.7. *Sei $g :\ D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$, und a Häufungspunkt von D.*

1. *Eine Funktion $f :\ D \to \mathbb{R}$ heißt bei a von der Ordnung groß $\mathcal{O}$ von g, falls*

$$\limsup_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty$$

Schreibweise: $\quad f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \quad x \to a$

2. *Eine Funktion $f :\ D \to \mathbb{R}$ heißt bei a von der Ordnung klein o von g, falls*

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

Schreibweise: $\quad f(x) = o(g(x)), \quad x \to a$

analog für D unbeschränkt und $a = \pm\infty$.

explizit:

1. Gross $\mathcal{O}$: bedeutet für $a \neq \infty$:
$$\exists \delta > 0,\ C > 0: \quad \forall x \in U_\delta(a): \qquad |f(x)| \leq C|g(x)|$$
für $a = \infty$:
$$\exists \delta > 0,\ C > 0: \quad \forall x \in [\delta, \infty]: \qquad |f(x)| \leq C|g(x)|$$
("$|f|$ ist vergleichbar oder kleiner als $|g|$ bei a")

2. klein o: bedeutet für $a \neq \infty$
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \quad \forall x \in U_\delta(a): \qquad |f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$$
für $a = \infty$:
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \quad \forall x \in [\delta, \infty]: \qquad |f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$$
("$|f|$ ist verschwindend klein im Vergleich zu $|g|$ bei a")

Beispiele:

- $\ln x = o(\frac{1}{x^\alpha}), \quad x \searrow 0$ für beliebiges $\alpha > 0$
- $\ln x = o(x^\alpha), \quad x \to \infty$ für beliebiges $\alpha > 0$
- $\sin(x) = \mathcal{O}(x), \quad x \to 0$
- $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \mathcal{O}(\frac{1}{x}), \quad x \to 0$
- $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \mathcal{O}(1), \quad x \to \infty$
- $\sinh(x) = \mathcal{O}(e^x), \quad x \to \infty$
- $\ln(1 + e^x) = \mathcal{O}(x), \quad x \to \infty$

10.5 Eigenschaften stetiger Funktionen: Zwischenwertsatz, Maximum und Minimum, inverse Funktionen

Satz 10.5. *(Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b]$ stetig und y eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.*

Achtung: Die Aussage ist falsch wenn f nicht stetig ist oder der Definitionsbereich kein abgeschlossenes Intervall ist!

Proof. oBdA $f(a) \leq y = 0 \leq f(b)$.

Definiere rekursiv 2 Folgen (a_n) und (b_n) in $[a, b]$ mit $a_1 := a,\ b_1 := b$ und

$$\begin{cases} a_{n+1} := a_n,\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1} := b_n, & \text{falls} f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \end{cases}$$

Dann ist per Konstruktion $a = a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq .. \leq b_1 = b$, und $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ für alle n.

Da (a_n) und (b_n) monoton und beschränkt sind, existiert

$$x := \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n$$

wegen $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}$ gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} b_n$$

und wegen der Stetigkeit von f folgt

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$$

also $f(x) = 0$.

□

als Anwendung:

Satz 10.6. *Jedes Polynom mit ungeradem Grad hat mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{R}$.

Proof. (Skizze)

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $p(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n$ mit n ungerade und $a_n \neq 0$. Sei oBdA $a_n > 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$

(exakter Beweis dafür weggelassen, ist nicht schwer).

Also gibt es ein x_0 mit $p(x_0) > 0$ und ein x_1 mit $p(x_1) < 0$, und der Zwischenwertsatz liefert die Behauptung.

□

Ein Polynom geraden Grades braucht keine reelle Nullstelle zu besitzen, wie das Beispiel $f(x) = x^{2n} + 1$ zeigt.

Die folgenden Begriffe sind fundamental in der Topologie (siehe auch Analysis II)

Definition 10.8. *$D \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, falls $\overline{D} = D$.*

$D \subset \mathbb{R}$ heißt offen, falls das Komplement $\mathbb{R} \setminus D$ abgeschlossen ist.

$D \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt ist

(der Abschluss $\overline{D}$ ist in Definition 10.3 definiert).

(alternativ: $D \subset \mathbb{R}$ heißt offen, falls es eine Vereinigung von offenen Intervallen ist.)

Beispiele:

$[a, b]$ kompakt, $\cup_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$ kompakt

$(a, b]$ nicht kompakt, $\mathbb{R}$ nicht kompakt

Satz 10.7. *(Satz vom Maximum und Minimum)*

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann nimmt f sein Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $x_\pm \in D$ mit

$$f(x_+) = \sup f(D) \qquad \text{und} \quad f(x_-) = \inf f(D)$$

Proof. (nur für Max; analog für Min)

Sei $x_n \in D$ Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(D)$.

Da D beschränkt ist, folgt aus dem Satz von Bolzano-Weiserstraß, dass es eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) gibt.

Für $x_+ := \lim x_{n_k}$ gilt dann $x_+ \in D$, weil D abgeschlossen. Da f stetig ist, folgt

$$f(x_+) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \sup f(D)$$

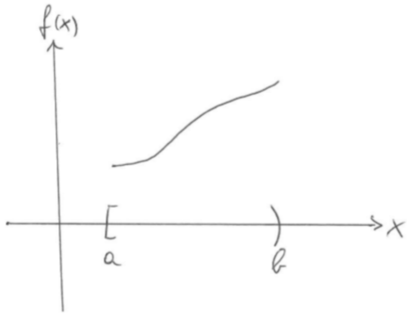
□

Bemerkung

1) es kann mehrere $x_n \in D$ geben, an denen das Minimum bzw. das Maximum angenommen wird.

2) Die Aussage stimmt nicht, wenn f nicht stetig ist oder D nicht kompakt.

Bsp: die Funktion $f : (0, 1]$, $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ hat kein Maximum.



Folgerung 10.1. *Eine stetige Funktion auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall ist beschränkt.*

Satz 10.8. *(Umkehrfunktion)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monotone wachsende (bzw. fallende) stetige Funktion, und $A := f(a)$, $B := f(b)$. Dann bildet f das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf das Intervall $[A, B]$ (bzw. $[B, A]$) ab, und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [A, B] \to \mathbb{R} \qquad (\textit{bzw.}\ \ [B, A] \to \mathbb{R})$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

(Achtung: f^{-1} darf nicht mit $\frac{1}{f}$ verwechselt werden!)

Proof. weggelassen; siehe [Forster] § 12 Satz 1 oder [Griesser] Satz 10.3.6 . Surjektivität folgt aus dem Zwischenwertsatz. □

10.5.1 Gleichmäßige Stetigkeit

Erinnerung: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x \in D$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ sodass } |f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad \forall y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta$$

hierbei hängt δ i.a. von x ab. Eine stärkere Version von Stetigkeit ist die folgende:

Definition 10.9. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ heißt in D gleichmäßig stetig, wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \textit{ sodass } |f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad \forall x, y \in D \textit{ mit } |x - y| < \delta$$

(analog für $f : D \to \mathbb{C}$ auf $D \subset \mathbb{C}$)

Bemerkung: f gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f stetig in jedem Punkt.

Die Umkehrung gilt aber i. a. nicht! z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig (Übung).

Satz 10.9. *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig*

(allgemeiner gilt dies für Funktionen auf kompakten Teilmengen)

Proof. Angenommen, f sei nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so, dass zu jedem $n \geq 1$ Punkte $x_n, x'_n \in [a, b]$ existieren mit

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| > \epsilon$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die beschränkte Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Für ihren Grenzwert gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: p \in [a, b]$$

wegen $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = p$. Da f stetig ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})) = f(p) - f(p) = 0$$

Dies ist ein Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| > \epsilon$. Also ist die Annahme falsch und f gleichmäßig stetig.

□

Beispiel: die Funktion $\sqrt{x}$ ist auf $[0, 1]$ gleichmässig stetig

(obwohl der Graph bei $x = 0$ unendliche Steigung hat!).

10.6 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

10.6.1 Funktionenfolgen

Bisher haben wir nicht gezeigt, dass die Exponentialfunktion stetig ist. Da sie durch eine Potenzreihe, also als Grenzwert von Polynomen definiert ist, liegt es nahe, erst die folgende Frage zu beantworten:

Falls eine Folge stetiger Funktionen $f_n(x)$ gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert, ist dann $f(x)$ notwendigerweise stetig?

Die Antwort lautet: Je nachdem, was man genau mit "f_n konvergiert gegen f" meint.

Definition 10.10. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Dann*

1. *Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))$ gegen $f(x)$ konvergiert, d. h.*

$$\forall x \in D: \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

2. *Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls*

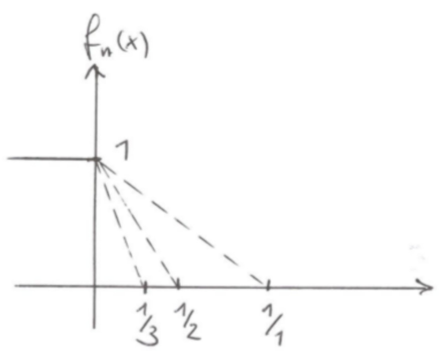
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

(analog für $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$)

Beachte: gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt.

Beispiel:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - nx, & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$



Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,0]} = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

Also $f_n \to f$ punktweise, aber nicht gleichmäßig. $f(x)$ ist nicht stetig (und klarerweise ist f_n stetig), also impliziert punktweise Konvergenz von stetigen Folgen **nicht** die Stetigkeit der Grenzfunktion.

Aber:

Satz 10.10. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$: eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiere. Dann ist auch f stetig.*

Anders ausgedrückt: Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Eine analoge Aussage gilt für $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$

Proof. (Skizze)

Sei $x \in D$ und $\epsilon > 0$. Für $y \in D$ gilt wegen der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)|\end{aligned}$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ sodass $\sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Wähle dann $\delta > 0$ sodass $\forall y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt dass $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$ (möglich weil f_n stetig). Also ist f stetig in x.

□

Ein nützliches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz ist das folgende:

Satz 10.11. *(Konvergenzkriterium von Weierstraß)*

Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es gelte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x)| < \infty.$$

Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$

(analog für komplex-wertige Funktionen).

Proof. (Skizze):

Nach dem Majoranten-Kriterium konvergiert die Reihe absolut (weil $|f_n(x)| \leq \sup_{x \in D} |f_n(x)|$).

Definiere $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Man kann leicht zeigen, dass die Konvergenz gleichmäßig ist (siehe [Forster] § 21 Satz 2)

□

Beispiel: Sei

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in D} |\frac{\cos(nx)}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

10.6.2 Stetigkeit von Potenzreihen

Satz 10.12. *Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius R, und $r < R$. Dann gilt:*

1. *die Funktionenfolge $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ konvergiert gleichmäßig auf $D_r = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq r\}$*
2. *die Funktion $f(x)$ ist auf $D := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\}$ stetig*

(analog für komplexe Potenzreihen).

Proof. Wir verwenden das obige Kriterium von Weierstraß :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in D_r} |a_k(x-a)|^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty, \tag{10.13}$$

weil r kleiner als der Konvergenzradius R der Potenzreihe ist (siehe Satz 7.15). Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ auf D_r gleichmäßig konvergent, und mit Satz 10.10 auch stetig. Weil dies für jedes $r < R$ gilt, ist $f(x)$ auf ganz D stetig.

□

11 Differenzialrechnung in $\mathbb{R}$

Die Differentialrechnung spielt eine zentrale Rolle in der Mathematik und insbesondere in der Physik.

11.1 Ableitung reeller Funktionen

Definition 11.1. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, falls der folgende Grenzwert existiert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

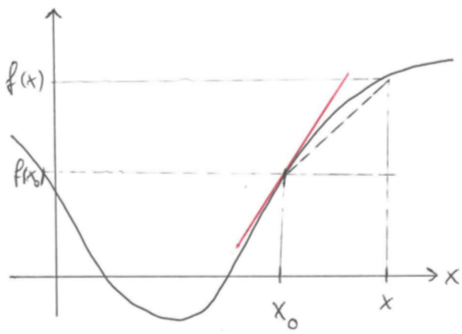
Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt Differentialquotient oder Ableitung von f in x_0.

(Insbesondere wird vorausgesetzt, dass x_0 Häufungspunkt von D ist, d.h. es gibt mindestens eine Folge x_n in $D \backslash \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert).

Die Funktion f heißt differenzierbar in D, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Alternative Schreibweise für f' : $\dot{f}$ oder f_x oder $\frac{df}{dx}$. Letztere Schreibweise ist etwas problematisch; um die Ableitung am Punkt x_0 zu bezeichnen, schreibt man $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$.

Geometrische Interpretation:



Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = Steigung der Sekante zwischen $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$

Differentialquotient $f'(x_0)$= Steigung der Tangente an den Graphen bei x_0.

Beispiele:

1. Definition der **Geschwindigkeit**:

Befindet sich ein Objekt zur Zeit t am Ort $x(t)$ für $t \in \mathbb{R}$, so ist seine Geschwindigkeit zur Zeit t_0 definiert durch $v(t_0) := \lim\limits_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} = x'(t_0)$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$ (konstante Funktion) Dann ist

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = cx$. Dann ist

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c(x+h) - cx}{h} = c$$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \lim_{h \to 0} h^{k-1} = \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1} \end{aligned} \tag{11.1}$$

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = -\lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned} \tag{11.2}$$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \exp(x)$. Dann ist

$$\frac{d\exp}{dx}\Big|_x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \exp(x) \tag{11.3}$$

unter Verwendung von (10.3).

Die Exponentialfunktion besitzt also die bemerkenswerte Eigenschaft, sich bei Differentiation zu reproduzieren.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(\frac{2x+h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} \\ &= \left(\lim_{h \to 0} \cos(x + \frac{h}{2})\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\right) \end{aligned} \tag{11.4}$$

unter Verwendung des Additionstheorems. Da cos stetig ist, gilt $\lim\limits_{h \to 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos(x)$. Wegen (10.7) gilt $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = 1$, also

$$\sin'(x) = \cos(x) \tag{11.5}$$

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x)$. Dann ist

$$\cos'(x) = -\sin(x) \tag{11.6}$$

(Beweis: Übung, analog wie oben)

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$.
Für $x \neq 0$ gilt:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Für $x = 0$ existiert die Ableitung nicht, da z.B für $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ gilt: $\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n} = (-1)^n$ obwohl $a_n \to 0$.

im letzten Beispiel kann man aber rechts- und linksseitige Ableitungen definieren:

Definition 11.2. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in \mathbb{R}$*

1. *rechtsseitig differenzierbar, falls $\lim\limits_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)_+$ existiert*

2. *linksseitig differenzierbar, falls $\lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)_-$ existiert*

Dann gilt für $f(x) = |x|$: $f'(0)_+ = 1, f'(0)_- = -1$.

Offensichtlich ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ genau dann in $x \in D$ differenzierbar, wenn f rechts- und linksseitig in $x \in D$ differentierbar ist und $f'(x)_+ = f'(x)_-$ $(=: f'(x))$ ist.

Satz 11.1. *(Lineare Approximation)*

Sei $f : D \to R,\ D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \quad h \to 0$$

Proof.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

□

Dieser Satz drückt aus, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion gleichbedeutend mit der Approximierbarkeit durch eine affin-lineare Funktion ist. Diese affin-lineare Funktion ist

$$L(x) = f(x_0) + c(x - x_0).$$

wobei $c = f'(x_0)$.

Folgerung 11.1. *Ist $f : D \to R,\ D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, dann ist f stetig in x_0.*

Proof. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)] = f(x_0)$ □

11.2 Rechenregeln

fürs Differenzieren gelten einfache Rechenregeln:

Satz 11.2. *(Summen-, Produkt- und Quotientenregel)*

Seien $f, g : D \to R,\ D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann gilt:

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. *falls* $g(x_0) \neq 0$:
   $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Proof. 1. und 2. Übung

3.: Wegen 2 können wir oBdA $f = 1$ setzen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
&\overset{\text{Grenzwertarithmetik}}{=} -\frac{1}{g(x_0)} \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\
&= -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad (11.7)
\end{aligned}$$

unter Verwendung der Stetigkeit von g im letzten Schritt.

□

Beispiele:

- nochmals $f(x) = x^n$.
  Beweis von $f'(x) = nx^{n-1}$ durch vollständige Induktion:
  $n = 0$ und $n = 1$: schon erledigt

$n \to n+1$: Verwende Produktregel

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1}) = x'x^{n-1} + x(x^{n-1})' \overset{\text{Ind.Annahme}}{=} x^{n-1} + (n-1)xx^{n-1} = nx^{n-1}$$

- Ableitung von Polynomfunktionen $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$:
  $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k k x^{k-1}$ (Der Term mit $k = 0$ verschwindet!)
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$:
  $$f'(x) = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$$
  (Übung)
  Also gilt
  $$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$
-
  $$\tan'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

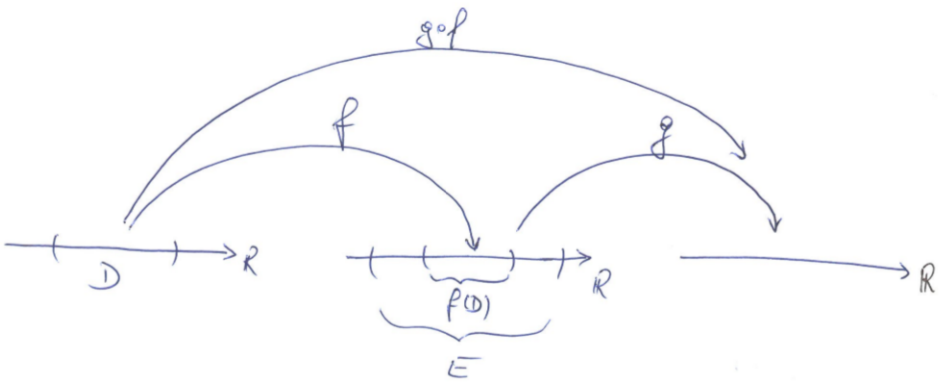
Der folgende Satz ist sehr weitreichend:

Satz 11.3. *(Kettenregel)*

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Die Funktion f sei in $x_0 \in D$ differenzierbar und g sei in $y_0 := f(x_0) \in E$ differenzierbar. Dann gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Am besten macht man ein Bild:



Proof. Wegen der linearen Approximierbarkeit von f und g können wir schreiben

- $$f(x) = f(x_0) + \big(f'(x_0) + R(x)\big)(x - x_0) \quad \text{mit} \lim_{x \to x_0} R(x) = 0$$
- $$g(y) = g(y_0) + \big(g'(y_0) + S(y)\big)(y - y_0) \quad \text{mit} \lim_{y \to y_0} S(y) = 0$$

daraus folgt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \Big(g'(f(x_0) + S(f(x)))\Big)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{11.8}$$

nun gilt $S(f(x)) \to 0$ für $x \to x_0$ (weil f in x_0 stetig ist), und $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$ für $x \to x_0$ (weil f in x_0 differenzierbar). Mit der Grenzwertarithmetik folgt die Behauptung.

$\square$

Beispiele

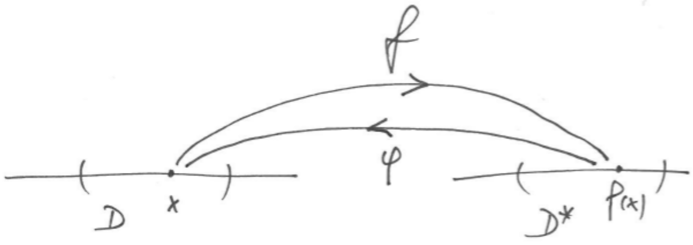
- Ableitung von $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = e^{-x^2}$.
  Es gilt: $h = g \circ f$ mit $f(x) = -x^2,\ g(y) = e^y$.
  Laut Kettenregel gilt: $h' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$
- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
  $$F(x) = f(ax + b) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$
  Dann ist
  $$F'(x) = af'(ax + b).$$

Satz 11.4. *(Ableitung der Umkehrfunktion)*

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $\varphi = f^{-1} : D^* \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f, wobei $D^* = f(D)$.

Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, dann ist φ im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$



Bemerkung: Laut Satz 10.8 folgt aus den Voraussetzungen, dass $f : D \to D^*$ invertierbar ist, und die Umkehrabbildung $\varphi = f^{-1}$ automatisch stetig (und monoton) ist.

Proof. Sei $y_n \in D^* \backslash \{y\}$ irgendeine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Wir setzen $x_n := \varphi(y_n)$. Da φ stetig ist (siehe obige Bemerkung), folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Außerdem ist $x_n \neq x$ für alle n, weil $\varphi : D^* \to D$ bijektiv ist. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(y_n) - \varphi(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

Beispiele:

- Ableitung des Logarithmus:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

- Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha$.
  Da $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ liefert die Kettenregel

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = e^{\alpha \ln x} \frac{d}{dx}(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

- $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$. Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

  Sei nun $y := \arcsin(x)$. Dann ist $\sin(y) = x$ und $\cos(y) = +\sqrt{1 - x^2}$, da $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Also gilt

$$\frac{d \arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

- $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Also gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \cos^2(\arctan(x)).$$

  Setzten wir $y := \arctan x$, dann folgt

$$x^2 = \tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1,$$

  also

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$

  und daher

$$\frac{d \arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

11.3 Höhere Ableitungen, Glattheit

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Falls die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} := f''(x) := (f')'(x)$$

die zweite Ableitung von f in x. Man schreibt auch

$$f^{(2)} := \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Die höheren Ableitungen definiert man induktiv:

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar im Punkt $x \in D$, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$f : D \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) \to \mathbb{R}$$

$(k-1)$- mal differenzierbar ist, und $f^{(k-1)}$ wiederum in x differenzierbar ist.

Schreibweise:

$$f^{(k)}(x) := \frac{d^k f(x)}{dx^k} := \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x) := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}}\right)$$

oder

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'', \quad \text{etc.}$$

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar in D, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ k-mal differenzierbar ist.

Sie heißt k-mal stetig differenzierbar in D, wenn überdies die k-te Ableitung $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ in D stetig ist.

Notation:

Die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D bezeichnet man mit $\mathcal{C}^k(D)$.

Die Menge aller stetigen Funktionen auf D bezeichnet man mit $\mathcal{C}^0(D) = \mathcal{C}(D)$.

Die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf D bezeichnet man mit $\mathcal{C}^\infty(D)$. Diese werden auch als “glatte” Funktionen bezeichnet.

Beispiele:

1. Die Funktion $f(x) = x^2\theta(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases} \tag{11.9}$$

(Übung)

2. Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{11.10}$$

   ist in $x = 0$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{11.11}$$

   (Übung)

   Aber: f' ist in 0 nicht stetig.

3. Pfade der Brown'schen Bewegung sind stetig (als Funktionen der Zeit t), aber nicht differenzierbar ("Irrfahrt", Richtungsänderung wegen Stößen), also sind sie in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

4. Wichtige Anwendung in der Physik:

   Die Bewegung eines Objektes entlang der x-Achse sei gegeben durch die Funktion $x(t)$, wobei t die Zeit ist. Dann ist die **Geschwindigkeit** definiert als Ableitung von $x(t)$ nach der Zeit:

$$v(t) = \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}$$

   und die **Beschleunigung** ist

$$a(t) = \ddot{x} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

   Das Newton'sche Kraftgesetz besagt, dass

$$ma(t) = F(t)$$

   wobei F die Kraft ist, die auf das Objekt wirkt.

Die folgende Definition ist sehr wichtig:

Definition 11.3. *(Taylor-Polynom) Für $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in $x_0 \in D$ heißt*

$$(T_n f)(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylor-Polynom der Ordnung n von f bei x_0.

Beispiel: $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{(2)}(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}, f^{(3)}(x) = -6\frac{1}{(1+x)^4}, \ldots$

also

$$(T_3 f)(x; 0) = 1 - x + x^2 - x^3$$

Mehr dazu später!

11.4 Regel von de l'Hospital

... erlaubt die Berechnung von Limiten vom Typ $\frac{0}{0}$.

Sei $f, g \in \mathcal{C}^1((a,b))$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{lin.approx.}}{=} \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)}{g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)} = \frac{f'(x_0) + \frac{o(h)}{h}}{g'(x_0) + \frac{o(h)}{h}}$$

wobei $h = x - x_0$. Daraus folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wenn $g'(0) \neq 0$. Allgemeiner kann man zeigen:

Satz 11.5. *Die Funktionen $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ seien in (a,b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ und $\lim_{x \nearrow b} f(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} g(x)$. Wenn*

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \ \in [-\infty, \infty],$$

dann gilt auch

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Eine analoge Aussage gilt für $x \searrow a$.

(Beweis: siehe z.B. [Königshofer] oder [Taylor].)

Bemerkung: Die Aussagen gilt auch für $a = -\infty$ bzw $b = \infty$, d.h.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiele:

- $f = \sin x, g = x$. Dann ist $f' = \cos x,\ g' = 1$ und daher

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

- $f = 1 - e^{-x^2}, g = x^2$. Dann ist $f' = 2xe^{-x^2},\ g' = 2x$, also

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{-x^2}}{2x} = 1$$

  Bemerkung: manchmal muss man die Regel iterieren, also zu höheren Ableitungen gehen (siehe Übungen).

11.5 Differentiation von Funktionenfolgen (Potenzreihen)

Man möchte gern Funktionen, die durch Folgen definiert sind, differenzieren. Dies ist nicht immer ganz trivial, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n}$. Dann gilt:

1. $f_n \to 0$ gleichmäßig, da $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$.
2. f_n differenzierbar mit $f_n'(x) = \cos(nx)$. Aber: Für $x \neq 2\pi\mathbb{Z}$ ist $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent!

Es gilt:

Satz 11.6. *Sein f_n stetig differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$ mit*

i) f_n *konvergiert punktweise gegen eine Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

ii) $f_n' : [a, b] \to \mathbb{R}$ *konvergiert gleichmäßig .*

Dann ist f differenzierbar und es gilt

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \text{für alle } \; x \in [a, b].$$

Beweis: Kapitel 15.

Dies kann man insbes. auf (reelle) Potenzreihen $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ anwenden. Hierbei ist der folgende Hilfssatz nützlich:

Satz 11.7. *Die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ habe Konvergenzradius R. Dann hat die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ auch den Konvergenzradius R.*

Proof. (Skizze) Verwende Formel von Cauchy-Hadamard:

Der Konvergenzradius von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k k z^{k-1}$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

weil $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (Übung) □

Satz 11.8. *Die Potenzreihe* $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ *mit* $a_k, a \in \mathbb{R}$ *habe Konvergenzradius* $R \in (0, \infty]$ *um* a*. Dann ist* $P : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, mit*

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(x-a)^{k-1}.$$

Man drückt dies auch so aus: Eine Potenzreihe darf gliedweise differenziert werden.

Proof. klarerweise ist $P_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ stetig differenzierbar. Es erfüllt

i) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$ für $x \in (a-R, a+R)$

ii) Aus Satz 10.12 zur gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen zusammen mit obigem Hilfssatz folgt, dass $P_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k k(x-a)^{k-1} \to P'$ gleichmäßig auf $[a-\rho, a+\rho]$ für $\rho < R$.

Die Behauptung folgt somit aus dem obigen Satz 11.6.

□

Beispiele:

- Neue Herleitung von $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ sowie $\sin'(x) = \cos(x)$ etc. aus den jeweiligen Potenzreihen. (Übung)
- Überprüfe $\sin'(x) = \cos(x),\ \cos'(x) = \sin(x)$ anhand der Potenzreihen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{11.12}$$

- finde die Potenzreihe zu $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$.

  Wissen: geometrische Reihe $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, Konvergenzradius $R = 1$.

  Für $|x| < 1$ kann man somit gliedweise differenzieren, und erhält

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x)$$

daraus folgt:

Satz 11.9. *Die Potenzreihe* $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ *konvergiere im Intervall* $I = (a - R, a+R)$. *Dann ist* $P : I \to \mathbb{R}$ *beliebig oft differenzierbar, und es gilt*

$$a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Proof. $P(x)$ ist als Potenzreihe beliebig oft differenzierbar für alle $x \in (a-R, a+R)$ (Satz 11.8). Durch gliedweises differenzieren findet man

$$P^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k}$$

Daraus folgt

$$P^{(k)}(a) = k!\, a_k$$

□

11.6 Taylorreihen

Definition 11.4. *Für* $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ *und* $a \in I$ *heißt die Potenzreihe*

$$(Tf)(x; a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Taylorreihe von f *um* a.

Der Konvergenzradius von $(Tf)(x; a)$ ist wie üblich

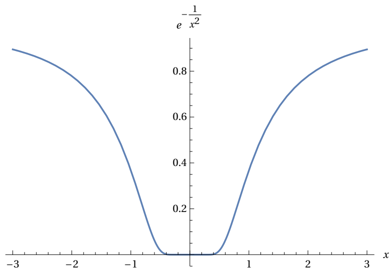
$$R = \sup\{r \in [0, \infty];\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} r^k \text{ absolut konvergent}\}$$

Beachte:

- Der Konvergenzradius der Taylor-Reihe ist nicht notwendig > 0.
- Falls die Taylor-Reihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendig gegen f.
- Die Taylor-Reihe konvergiert genau dann gegen $f(x)$, wenn das Restglied aus Satz 13.1 bzw. 13.2 gegen 0 konvergiert (siehe später).

Beispiel: für Punkt 2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



f ist beliebig oft differenzierbar, und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in N$. (Übung). Daher ist

$$Tf(x;0) = 0$$

$Tf(x;0)$ konvergiert also, aber nicht gegen $f(x)$. Dies ist ein typisches "nichtperturbatives" Phänomen.

(Es gibt einen tieferen Grund dafür, den man in der komplexen Funktionentheorie versteht).

Es gilt aber immer:

Satz 11.10. *(Eindeutigkeitssatz)*

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Dann ist die Taylor-Reihe von f um a gleich dieser Potenzreihe, und sie konvergiert gegen f:

$$Tf(x;a) = f(x) \qquad \forall x \in (a-R, a+R)$$

Proof. Dies ist genau die Aussage von Satz 11.9. □

Beispiele:

- für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

  Die Reihe ist absolut konvergent für $|x| < 1$ (d.h. $R = 1$). Für $x = 1$ gilt auch

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \pm \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

  aber die Konvergenz ist nicht mehr absolut (Abel'scher Grenzwertsatz, siehe [Forster] §22 Satz 5). Insbesondere darf man diese Reihe nicht umordnen!

- $f(x) = \sin(x)$: Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = Tf(x;0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

- $f(x) = \sin(x^2)$: Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2} = Tf(x;0)$$

11.7 Ableitung und Funktionseigenschaften (Extrema, Mittelwert, Konvexität)

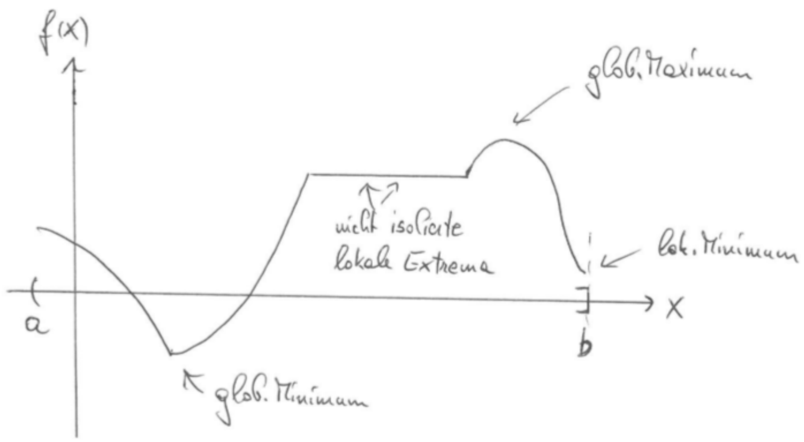
viele Eigenschaften einer Funktion spiegeln sich in ihrer Ableitung wieder. z.B. kann das Auftreten von lokalen Extrema, die Monotonie und die Konvexität mit Hilfe der Ableitung untersucht werden.

Definition 11.5. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ Funktion. Man sagt, f habe in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Maximum (Minimum), wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (bzw. f(x_0) \leq f(x)\ ) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\epsilon(x_0)$$

Trifft das Gleichheitszeichen nur für $x = x_0$ zu, nennt man x_0 ein isoliertes lokales Maximum (Minimum)

Übergreifende Bezeichnungen für Minimum & Maximum: *Extremum*



Satz 11.11. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Extremum in $x_0 \in (a,b)$. Dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Proof. oBdA Maximum in x_0. Dann ist

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

und

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

daher ist $f'(x_0) = 0$. $\square$

Bemerkungen:

1. Umkehrung gilt nicht: z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ erfüllt $f'(0) = 0$ aber hat kein Extremum.

2. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{11.13}$$

   ist differenzierbar, und hat ∞ viele Extrema bei $x = 0$.

3. Nach Satz 10.7 nimmt jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ihr absolutes Maximum und ihr absolutes Minimum an. Liegt ein Extremum jedoch am Rand, so ist dort nicht notwendig $f'(x) = 0$, wie man z. B. an der Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x$$

   sieht.

Satz 11.12. *(Satz von Rolle)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion f sei in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

insbesondere: zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion liegt eine Nullstelle der Ableitung.

Proof. falls $f = const$: trivial

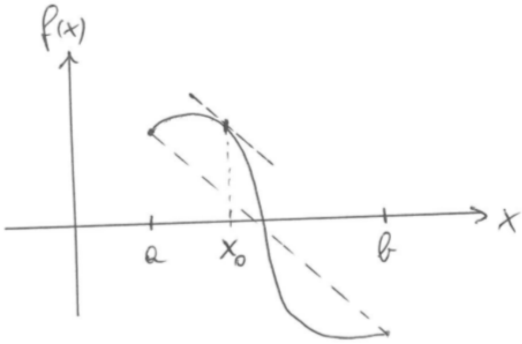
falls f nicht konstant, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$. Dann wird das absolute Maximum (bzw. Minimum) der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $\xi \in (a, b)$ angenommen, mit $f'(\xi) = 0$. $\square$

Daraus folgt der

Satz 11.13. *(vom Mittelwert)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

geometrische Bedeutung: die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer gewissen Zwischenstelle $(x_0, f(x_0))$ ist



Proof. definiere eine Hilfsfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

F ist stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Da $F(a) = f(a) = F(b)$, folgt aus dem Satz von Rolle:

$$\exists x_0 \in (a, b) : \; 0 = F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Daraus folgt die folgende wichtige Anwendung:

Satz 11.14. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist f konstant.*

Proof. Für $x > a$ gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\exists x_0 \in (a, x) : \; f(x) = f(a) + f'(x_0)(x - a) = f(a)$$

□

Als Anwendung: Charakterisierung der Exponentialfunktion durch ihre Differentialgleichung:

Satz 11.15. *Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit*

$$f'(x) = cf(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $A := f(0)$. Dann gilt

$$f(x) = Ae^{cx} \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Proof. betrachten die Funktion $F(x) = f(x)e^{-cx}$. Nach der Produktregel gilt

$$F'(x) = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = (f'(x) - cf(x))e^{-cx} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, also F konstant. Da $F(0) = f(0) = A$, ist $F(x) = A$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also

$$f(x) = Ae^{cx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

□

Bemerkung: Solche (und andere) sogenannte Differenzialgleichungen spielen eine zentrale Rolle in der Physik

wichtige Charakterisierung von Monotonie:

Satz 11.16. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:*

1. $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ *monoton steigend, d.h.* $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
2. $f' > 0 \Rightarrow f$ *streng monoton steigend, d.h.* $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
3. $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ *monoton fallend, d.h.* $x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
4. $f' < 0 \Rightarrow f$ *streng monoton fallend, d.h.* $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Proof. (nur für 2.)

Annahme: $\exists x > y : \; f(x) \leq f(y)$

Mittelwertsatz $\Rightarrow$ $\exists x_0 \in (x,y) :$ $\quad \underbrace{f(y) - f(x)}_{\geq 0} = \underbrace{(y-x)}_{<0} f'(x_0)$ $\lightning$ □

Satz 11.17. *Sei $f \in \mathcal{C}^2((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann:*

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ *hat ein isoliertes lokales Minimum in* x_0
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ *hat ein isoliertes lokales Maximum in* x_0

Proof. (nur für 1.)

$f'' : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig.

$\Rightarrow \exists \epsilon > 0: \quad f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}_\epsilon(x_0)$

$\Rightarrow$ f' ist streng monoton steigend auf $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

Aus dem Mittelwertsatz folgt:

- $\forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0): \ \exists \xi_1 \in (x, x_0): \qquad f(x_0) - f(x) = \underbrace{f'(\xi_1)}_{<0}(x_0 - x) < 0$
- $\forall x \in (x_0, x_0 + \epsilon): \ \exists \xi_2 \in (x_0, x): \qquad f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(\xi_2)}_{>0}(x - x_0) > 0$

Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Bemerkungen:

- Der Satz gibt nur eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für ein isoliertes lokales Extremum. Die Funktion $f(x) = x^4$ besitzt z. B. für $x = 0$ ein isoliertes lokales Minimum. Es gilt jedoch $f''(0) = 0$.
- um das globales Minimum/Maximum einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu finden, geht man wie folgt vor:
  1. Finde alle Lösungen von $f'(x_0) = 0$ in $[a, b]$
  2. Teste, ob x_0 lokales Min/Max ist
  3. untersuche Randpunkte a, b
  4. Bestimme das globale Min/Max unter den obigen Kandidaten

Definition 11.6.

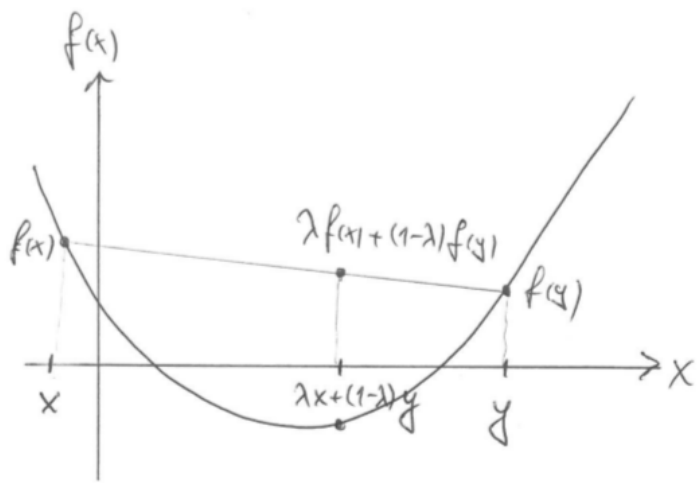
1. *Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u>, falls*

$$\forall x, y \in (a, b),\ \lambda \in [0, 1]: \qquad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

   Gilt $<$ statt $\leq$ für alle $\lambda \in (0, 1)$ und alle $x \neq y \in (a, b)$, dann heißt f <u>strikt konvex</u>.

2. *Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt <u>(strikt) konkav</u>, falls $(-f)$ (strikt) konvex ist*

geom. Interpretation: Konvexitäts-Bedingung bedeutet, dass der Graph von f im Intervall $[x_1, x_2]$ unterhalb der Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ liegt.



Beispiele:

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist strikt konvex
   $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist strikt konkav
2. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^a$ ist für $a \geq 1$ konvex, und für $0 \leq a \leq 1$ konkav.

Satz 11.18. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:*

$$f'' \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f \ \ \textit{konvex}$$

(und analog $f'' \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ konkav)

Proof. $\Rightarrow$:

$f'' \geq 0 \ \Rightarrow \ f'$ monoton wachsend.

Für $a < x_0 < x_1 < b$ und $x_\lambda := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0,\ \lambda \in [0, 1]$ folgt aus Mittelwertsatz:

$\exists \xi_1 \in (x_0, x_\lambda)$ und $\xi_2 \in (x_\lambda, x_1)$ mit

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{x_\lambda - x_0} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{x_1 - x_\lambda}$$
$$\Rightarrow \ \frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{\lambda(x_1 - x_0)} \leq \frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{(1 - \lambda)(x_1 - x_0)}$$
$$\Rightarrow \ f(x_\lambda) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_0)$$

also ist f konvex.

$\Leftarrow$: (Skizze)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex. Annahme: $f''(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$. Sei $c = f'(x_0)$, und definiere

$$\varphi(x) := f(x) - c(x - x_0) \quad \text{für } x \in (a,b)$$

Dann ist $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Daher besitzt φ in x_0 ein isoliertes Maximum. Dies ist klarerweise im Widerspruch zur Konvexität von f (Details siehe [Forster] §16 Satz 6)

□

11.7.1 Legendre-Transformation (nicht Prüfungsstoff):

Definition 11.7. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit*

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xp - f(x))$$

Legendre-Transformierte von f.

wichtige Anwendungen in der Physik:

1. analytische Mechanik:

$$H(p,q) = \sup_{\dot{q}} (p\dot{q} - L(\dot{q}, q))$$

Hamilton Funktion $H(p,q) \;\leftrightarrow\;$ Lagrange Funktion $L(\dot{q}, q)$

2. Thermodynamik:

$$F(T) = -\sup_{S} (TS - U(S))$$

3. etc.

wichtige Eigenschaften der Legendre-Transformierten :

Satz 11.19. *1. (Konvexität) Die Legendre-Transformierte*

$f^* : D^* \to \mathbb{R},\ D^* = \{p \in \mathbb{R} : \ f^*(p) < \infty\}$ ist konvex

2. Falls $f'' > 0$, dann besitzt die Gleichung $p = f'(x)$ höchstens eine Lösung $x = x(p)$. Dann gilt:

$$f^*(p) = x(p)p - f(x(p))$$

3. f konvex $\Rightarrow$ $(f^*)^* = f$

Die Gleichung $p = f'(x)$ folgt aus $\frac{d}{dx}(px - f(x)) = 0$, wodurch das Supremum (=Maximum) der Funktion $px - f(x)$ bestimmt ist.

Diese Transformation ist wichtig in der Thermodynamik. Eigenschaft 3. bedeutet, dass dabei "keine Information verlorengeht".

Proof. Konvexität:

Sei $p, p' \in D^*$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist

$$\begin{aligned} f^*(\lambda p + (1-\lambda)p') &= \sup_{x\in\mathbb{R}}(x(\lambda p + (1-\lambda)p') - f(x)) \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}}(\lambda xp - \lambda f(x) + (1-\lambda)xp' - (1-\lambda)f(x)) \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}(\lambda(xp - f(x)) + \sup_{x\in\mathbb{R}}((1-\lambda)(xp' - f(x)) \\ &= \lambda f^*(p) + (1-\lambda)f^*(p') \end{aligned} \tag{11.14}$$

2. und 3. als Übung.

□

11.8 Stammfunktion

Definition 11.8. *Eine differenzierbare Funktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$.*

Beispiele:

1. $f(x) = x^a$, $F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ für $a \neq -1$
2. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x + c$

Satz 11.20. *Sei F Stammfunktion von f. Dann ist G genau dann Stammfunktion von f, wenn $F - G$ konstant ist.*

Proof. $\Rightarrow$: $(F - G)' = f - f = 0 \Rightarrow F - G$ konstant.

$\Leftarrow$: $G' = F' - (G - F)' = f$

□

Notation: Die Menge der Stammfunktion von $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ wird mit $\int f(x)dx$ abgekürzt. Da sich alle Elemente nur durch eine Konstante unterscheiden, schreibt man $\int f(x)dx$ oft auch für einen beliebigen Representanten, oder auch $\int f(x)dx + c$.

Beispiele:

1. $\int e^x dx = e^x + c$

2. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

3. etc.

Die Integralrechnung liefert die allgemeine Methode, Stammfunktionen auszurechnen; mehr darüber im nächsten Kapitel. Es gibt aber keine systematische Methode, Stammfunktionen "in geschlossener Form" (also durch bekannte Funktionen oder Operationen) auszudrücken.

Anwendung (Ergänzung, nicht Prüfungsstoff): Lösen von separablen Differentialgleichungen

Sei $f : (a, b) \to (0, \infty)$ stetig. Dann heißt die Funktion $x : \ I \to (a, b)$ (mit $I \subset \mathbb{R}$ Intervall) Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \tag{11.15}$$

falls $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ ist $\forall x \in I$.

Nun sei $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, also $G = \int \frac{1}{f} dx$. Dann gilt:

1. $G'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0$, also ist G streng monoton steigend und somit injektiv mit $G((a, b)) =:$ I Intervall.

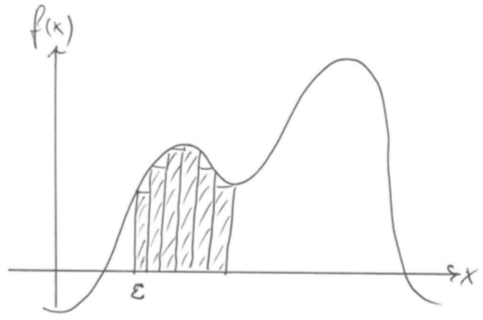
   Da $G : (a, b) \to I$ bijektiv ist, existiert die Umkehrfunktion $G^{-1} : I \to (a, b)$.

2. Die Funktion
$$x : I \to (a, b), \quad x(t) = G^{-1}(t)$$
   löst (11.15):
$$\dot{x}(t) = \frac{1}{g(G^{-1}(t))} = f(x(t))$$
   Allgemeiner gilt: jede Lösung von (11.15) hat die Form
$$x(t) = G^{-1}(t + t_0)$$
   mit $t_0 \in I$.

12 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

12.1 Das Riemann'sche Integral

Motivation: Berechne Flächeninhalt unter Graphen



Strategie: Approximation durch Rechtecke der Breite ϵ,

Grenzwert $\epsilon \to 0$: Summe $\to$ Integral

dazu:

Definition 12.1. *Eine Funktion* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt Treppenfunktion, falls es eine Unterteilung* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ *gibt, sodass* $\varphi(x)$ *auf* (x_{k-1}, x_k) *konstant ist für* $k = 1, 2, ..., n$.

Die Menge aller Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $T(a,b)$.

Bemerkungen:

1. Die Werte bei den $x_n's$ sind beliebig
   Die Unterteilung in x_n ist nicht eindeutig, kann beliebig verfeinert werden
   (Skizze)
2. $T(a,b)$ ist ein reeller Vektorraum, d.h.
   i) $0 \in T(a,b)$
   ii) $\varphi, \psi \in T(a,b) \;\Rightarrow\; \varphi + \lambda\psi \in T(a,b)$ für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition 12.2. *Für* $\varphi \in T(a,b)$ *mit Unterteilung* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ *und* $\varphi(x) = c_k$ *für* $x \in (x_{k-1}, x_k)$ *heißt*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) =: \int_a^b \varphi(x)dx$$

(Riemann) Integral von $\varphi(x)$.

Man kann zeigen, dass $\int_a^b \varphi(x)dx$ ist unabhängig von der Wahl der Unterteilung ist

(siehe zB [Forster]; Beweisidee: 1) Verfeinerung der Unterteilung liefert das gleiche Ergebnis

2) zu zwei Unterteilungen von φ gibt es eine gemeiname Verfeinerung.)

Satz 12.1. *Das Integral ist ein lineares und monotones Funktional auf $T(a,b)$, d.h.*

$$\int_a^b (\varphi(x) + \lambda\psi(x))dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \lambda \int_a^b \psi(x)dx \tag{12.1}$$

und

$$\varphi \leq \psi \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx \tag{12.2}$$

Beweisidee: Benutze gemeinsame Verfeinerung der Unterteilungen von φ und ψ.

Definition 12.3. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beliebige beschränkte Funktion. Dann setzt man*

$$\begin{aligned} \int_a^{b^*} f(x)dx &:= \inf\left\{\int_a^b \varphi(x)dx : \quad \varphi \in T(a,b),\ \varphi \geq f\right\} && \textit{(Oberintegral)} \\ \int_{a\,*}^{b} f(x)dx &:= \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx : \quad \varphi \in T(a,b),\ \varphi \leq f\right\} && \textit{(Unterintegral)} \end{aligned} \tag{12.3}$$

Falls $\int_a^{b^*} f(x)dx = \int_{a\,*}^b f(x)dx$, heißt f Riemann-integrierbar, und

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^{b^*} f(x)dx$$

das (Riemann-) Integral von f.

Wir bezeichnen die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit $\mathcal{R}[a,b]$

Bemerkungen:

- Für jede Treppenfunktion $\varphi \in T[a,b]$ gilt: $\int_a^{b^*} f(x)dx = \int_{a\,*}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
- betrachte die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

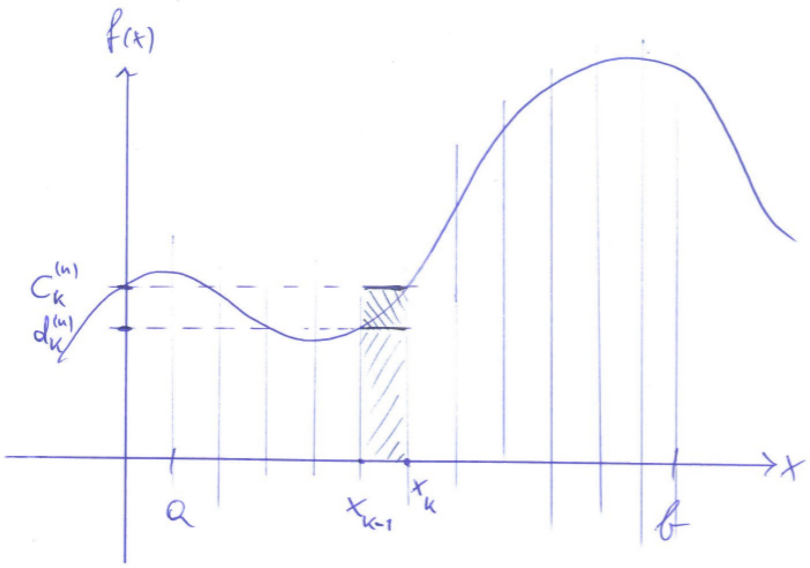
  Dann ist $\int_a^{b^*} f(x)dx = 1$ und $\int_{a\,*}^b f(x)dx = 0$, die Funktion ist also nicht Riemann-integrierbar.

man kann nun zeigen:

Satz 12.2. *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Proof. Sein $n \in \mathbb{N}$. Wähle Unterteilung $x_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$ für $k = 0, 1, 2, ..., n$.



Setze

$$\begin{aligned} c_k^{(n)} &:= \sup\{f(x) : \ x \in (x_{k-1}, x_k)\} \\ d_k^{(n)} &:= \inf\{f(x) : \ x \in (x_{k-1}, x_k)\} \\ \varphi_n(x) &:= c_k^{(n)}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k) \quad \text{bzw. } [x_{n-1}, x_n] \\ \psi_n(x) &:= d_k^{(n)}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k) \quad \text{bzw. } [x_{n-1}, x_n] \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^{b*} f(x)dx - \int_{a\ *}^{b} f(x)dx &\leq \int_a^b \varphi_n(x) - \int_a^b \psi_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (c_k^{(n)} - d_k^{(n)}) \frac{b-a}{n} \\ &=: (*) \end{aligned}$$

Nun:

1. falls f monoton, oBdA steigend:

$$(*) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

(Teleskopsumme!)

2. falls f stetig:

$$(*) \leq (b-a) \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} (c_k^{(n)} - d_k^{(n)})$$

Da f gleichmäßig stetig ist (weil $[a,b]$ kompakt!), gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N,\ k \in \mathbb{N}: \qquad c_k^{(n)} - d_k^{(n)} < \epsilon$$

Somit ist $(*) \leq (b-a)\epsilon \qquad \forall n \geq N$. Daraus folgt $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

□

Satz 12.3. *$\mathcal{R}(a,b)$ ist ein reeller Vektorraum, d.h.*

i) $0 \in \mathcal{R}(a,b)$

ii) $f, g \in \mathcal{R}(a,b) \ \Rightarrow\ f + \lambda g \in \mathcal{R}(a,b)$ *für beliebiges* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Das Integral ist ein lineares und monotones Funktional auf $\mathcal{R}(a,b)$*, d.h.*

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx \tag{12.4}$$

und

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{12.5}$$

Beweisidee: folgt aus den entsprechenden Eigenschaften für Treppenfunktionen.

zusammen mit dem vorigen Satz folgt insbesondere:

alle stückweise stetigen oder stückweise monotonen Funktionen sind integrierbar

Mehr Details findet man man zB in [Forster].

Satz 12.4. *Sei $a < b < c$ und $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn sowohl $f|_{[a,b]}$ als auch $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind und es gilt dann*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Proof. Übung □

Konventionen:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

und

$$\text{für} \quad b < a: \qquad \int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$$

Dann gilt die Formel von Satz 12.4 für beliebige gegenseitige Lagen von a, b, c, falls f in den Teilintervallen integrierbar ist.

Satz 12.5. *Seien $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Dann gilt:*

1. *Positiv- und Negativteil $f_+, f_- \in \mathcal{R}[a, b]$ wobei*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}, \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

2. *$|f|^p \in \mathcal{R}[a, b]$ für $p \geq 1$*
3. *$f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$*

Proof. siehe [Forster] § 18 (beachte: f ist endlich auf $[a, b]$!)

□

Satz 12.6. *(Mittelwertsatz der Integralrechnung)*

Sei $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Dann gibt es $z \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b - a)$$

Proof. klarerweise gilt

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt: $\exists z \in [a, b]: \quad f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ □

Man definiert den **Mittelwert** einer Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ als

$$\overline{f} := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(nicht zu verwechseln mit der komplexen Konjugation!). Der Mittelwertsatz besagt dann, dass $\overline{f} = f(z)$ für ein geeignetes $z \in [a, b]$.

12.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir betrachten jetzt eine Integrationsgrenze als variabel und erhalten so eine neue Funktion, das "bestimmte Integral":

Satz 12.7. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Dann ist F Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$.

Proof. (Skizze)

Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(z_h)$$

für ein $z_h \in [x, x+h]$ (laut Mittelwertsatz der Integralrechnung).

Da $\lim\limits_{h \searrow 0} z_h = x$ und f stetig, folgt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

$\square$

Die Benennung der Integrationsvariablen, also $\int_a^x f(t)dt$ oder $\int_a^x f(y)dy$ etc. ist nur symbolisch und eigentlich irrelevant. Man muß aber aufpassen dass man solche Integrationsvariablen nicht mit anderen Variablen verwechselt. Also: für Integrationsvariablen immer andere Buchstaben verwenden!

Beispiel: wir berechnen die Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_{-e^{x^2}}^{3e^{x^2}} \sqrt{1+t^4}dt$$

Wegen

$$F(x) = \int_0^{3e^{x^2}} \sqrt{1+t^4}dt - \int_0^{-e^{x^2}} \sqrt{1+t^4}dt$$

erhalten wir mit dem Hauptsatz und der Kettenregel

$$F'(x) = 6xe^{x^2}\sqrt{1+81e^{x^2}} + 2xe^{x^2}\sqrt{1+e^{4x^2}}$$

Satz 12.8. *(HDI)*

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, mit Stammfunktion F. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Proof. Wissen: $G : [a,b] \to \mathbb{R},\ G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ist Stammfunktion von f mit $G(b) - G(a) = \int\limits_a^b f(t)dt$. Da $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ für jede Stammfunktion, folgt die Behauptung. $\square$

Bezeichnung: Man setzt

$$F(x)|_a^b := F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

dann gilt

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b$$

Hierbei ist auch $a > b$ zulässig!

Dieser Satz liefert eine wichtige Methode zur Berechnung von Integralen, z.B:

1. Für $p \in \mathbb{R},\ p \neq -1$ gilt

$$\int_a^b x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_a^b$$

   mit gewissen Einschränkungen (ist p eine ganze Zahl ≤ -2, so darf 0 nicht im Integrationsintervall liegen; ist p nicht ganz, so ist $a, b > 0$ vorauszusetzen).

   Somit können beliebige Polynome integriert werden.

2. für $a, b > 0$ gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b$$

   für $a, b < 0$ gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln(-x)]_a^b$$

   da $\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{x}$ für $x < 0$.
   Man kann die beiden Fälle so zusammenfassen:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_a^b$$

   solange 0 nicht im Integrationsintervall liegt.

3.
$$\int_a^b \exp x dx = [\exp x]_a^b$$

4.
$$\int_{-1}^1 \sinh(x)dx = \cosh(1) - \cosh(-1) = 0$$

5.
$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_a^b$$

6.
$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_a^b$$

7.
$$\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan x]_a^b$$

solange $\cos x \neq 0$ im Integrationsintervall.

Satz 12.9. *(Substitutionsregel)*

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g([a,b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

Proof. Sei F Stammfunktion von f. Dann ist wegen der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t)$$

Daher ist

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

□

Bezeichnung: Unter Verwendung der symbolischen Schreibweise

$$dg(t) = g'(t)dt$$

lautet die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(t))dg(t) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

... besonders einfach zu merken: einfach $g(t)$ durch x ersetzen (oder umgekehrt). Läuft t von a nach b, so läuft $x = g(t)$ von $g(a)$ nach $g(b)$.

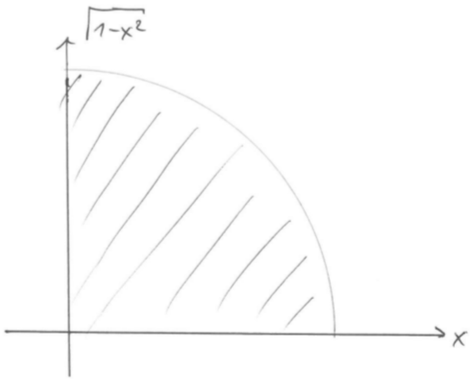
Beispiele:

1. $$\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx \qquad \text{(Substitution } x = t+c\text{)}$$

2. für $c \neq 0$ gilt:
$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx \qquad \text{(Substitution } x = ct\text{)}$$

3. $$\int_0^a xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} e^{-u}du = \frac{1}{2}[-e^{-u}]_0^{a^2} = \frac{1}{2}(1-e^{-a^2}) \tag{12.6}$$
mit der Substitution $u = x^2$ (bzw. äquivalent $x = \sqrt{u}$).

4. Flächeninhalt des Viertel-Kreises:



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt$$
(Substitution $x = \sin(t),\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, mit $dx = \cos(t)dt$, $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1$) Diese Integral kann z.B. mit folgendem Trick berechnet werden:
$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2(\frac{\pi}{2}-s)ds = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2(s)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(s)ds$$
mit Substitution $t = \frac{\pi}{2} - s$ und unter Verwendung von $\cos(\frac{\pi}{2}-s) = \sin(s)$.
Daher ist
$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t)+\sin^2(t))dt = \frac{\pi}{2}$$
also
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

5. zur Berechnung von $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ verwenden wir die Substitution $x = \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Mit

$$
\begin{aligned}
d \sinh t &= \cosh t dt \\
\cosh^2 t - \sinh^2 t &= 1 \\
t &= \operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \text{(Übung)}
\end{aligned}
$$

folgt mit $u := \operatorname{arcsinh}(a),\ v := \operatorname{arcsinh}(b)$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_u^v \frac{d\sinh t}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} = \int_u^v \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = [t]_u^v = [\ln(x + \sqrt{x^2+1})]_a^b$$

6. Funktionen vom Typ

$$\int_0^a f(\sin(t))\cos(t)dt = \int_0^{\sin(a)} f(u)du$$

integriert man durch die Substitution $u = \sin(t),\ du = \cos(t)dt$, z.B

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)dt = \int_0^1 udu = \frac{1}{2}[u^2]_0^1 = \frac{1}{2}$$

wie man auch durch die Identität $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$ sehen kann.

Die Wahl einer zielführenden Substitution ist nicht immer offensichtlich, und erfordert oft eine gewisse Findigkeit oder Übung. Es gibt keine allgemeingültige systematische Methode!

Satz 12.10. *(partielle Integration)*

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Proof. Für $h := fg$ gilt nach der Produktregel

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

also nach dem HDI

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = [h(x)]_a^b = [f(x)g(x)]_a^b$$

$\square$

Kurzschreibweise:

$$\int f dg = fg - \int g df$$

oder auch

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

wobei $G' = g$. Wenn man also von einem Faktor die Stammfunktion kennt, kann man partiell integrieren.

Beispiele:

1. $$\int_a^b x \sin x dx = [x(-\cos x)]_a^b - \int_a^b 1 \cdot (-\cos x) dx = [-x \cos x + \sin x]_a^b$$

2. Seien $a, b > 0$. Dann:

   $$\int_a^b \ln x dx = [x \ln x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x} dx = [x(\ln x - 1)]_a^b$$

   wobei $f(x) = \ln x,\ g(x) = x$ gesetzt wurde.

Wiederum ist die zielführende Vorgangsweise nicht immer offensichtlich, und erfordert ein gewisses Geschick.

Als weitere Anwendung der partiellen Integration beweisen wir folgenden Satz:

Satz 12.11. *(Riemann-Lebesgue Lemma)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $k \in \mathbb{R}$ sei

$$F(k) := \int_a^b f(x) \sin(kx) dx$$

Dann gilt:

$$\lim_{k \to \pm\infty} F(k) = 0$$

(wichtig in der Fourier-Theorie)

Proof. Für $k \neq 0$ ergibt sich durch partielle Integration

$$F(k) = -\left[f(x) \frac{\cos(kx)}{k} \right]_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b f'(x) \cos(kx) dx$$

Da f und f' auf $[a, b]$ stetig sind, gibt es eine Konstante $M \geq 0$ sodass

$$|f(x)| \leq M \quad \text{und} \quad |f'(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$|F(k)| \leq \frac{2M}{|k|} + \frac{M(b-a)}{|k|}$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Als Anwendung für diesen Satz beweisen wir die Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \qquad \text{für } 0 < x < 2\pi \tag{12.7}$$

(Dies ist ein erstes Beispiel für eine Fourier-Reihe, wobei eine Funktion durch eine Reihe von trigonometrischen Fumktionen ausgedrückt wird.)

Proof. Aus $\int\limits_{\pi}^{x} \cos(kt)dt = \frac{\sin(kx)}{k}$ und der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{1}{2}t)} - \frac{1}{2} \tag{12.8}$$

(Übung; folgt aus der Darstellung von $\cos(x)$ durch die komplexe Exponentialfunktion)

folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{1}{2}t)} dt - \frac{x-\pi}{2}$$

Mit Satz 12.11 gilt für

$$F_n(x) := \int_{\pi}^{x} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{1}{2}t)} dt \qquad (0 < x < 2\pi)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

12.2.1 Integration rationaler Funktionen

Wir wollen rationale Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit P, Q Polynome integrieren. Dies kann systematisch durchgeführt werden. Dazu als Vorbereitung:

Partialbruchzerlegung:

Satz 12.12. *(Fundamentalsatz der Algebra im reellen)*

Sei Q Polynom, $grad(Q) = n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Dann:

$$Q(x) = a_n \prod_{i=1}^{r} (x-a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} ((x-b_j)^2 + c_j^2)^{l_j} \tag{12.9}$$

wobei

a_i... *reelle Nullstellen mit Vielfachheit* $k_i \in \mathbb{N}$

$b_j \pm ic_j$ ... *komplexe Nullstellen mit Vielfachheit* $l_j \in N$

$grad(Q) = \sum_i k_i + 2\sum_j l_j$

man kann also jedes (relle) Polynom in Produkt von (reellen) Polynomen 1. und 2. Grades faktorisieren.

Damit:

Satz 12.13. *(Partialbruchzerlegung)*

Seien $P(x)$ *und* $Q(x)$ *(reelle) Polynome vom Grad* $grad(P) < grad(Q)$. $Q(x)$ *sei wie oben faktorisiert. Dann gibt es Konstanten* A_{im}, B_{il}, C_{il} *sodass*

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{m=1}^{k_i} \frac{A_{im}}{(x-a_i)^m} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{l_j} \frac{B_{il}x + C_{il}}{((x-b_i)^2 + c_i^2)^l}$$

(Falls $grad(P) \geq grad(Q)$, führt man zunächst eine Polynomdivision durch und spaltet das ganze Polynom ab.)

Proof. induktiv (siehe z.B. [Königsberger]) □

Beispiel:

$$R(x) = \frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1} = 1 + \frac{x^3+x}{x^4-x^3-x+1}$$

1 ist Nullstelle des Nenners, also

$$x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$$

also

$$R(x) = 1 + \frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

Ansatz:

$$\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

zu bestimmen sind A_1, A_2, B, C

rhs auf gemeinsamen Nenner bringen:

$$\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

Nenner gleichsetzten:

$$x(x^2+1) = A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)^2$$

entweder:

Koeffizientenvergleich liefert lineares Gleichungssystem für A_1, A_2, B, C, systematisch lösen (Gaußsches Eliminationsverfahren)

oder ad-hoc: für $x = 1$ folgt

$$A_2 = \frac{2}{3}$$

einsetzten liefert

$$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = (x-1)(A_1(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1))$$

lhs $= (x-1)(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3})$ also

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = A_1(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

setze $x = 1$:

$$2 = 3A_1$$

also

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x = (Bx+C)(x-1) = Bx^2 + (C-B)x - C$$

also $B = \frac{1}{3}, C = 0$.

Damit kann man **für jede rationale Funktion** $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ **eine Stammfunktion finden**, unter Berücksichtigung der folgenden Integraltabelle:

1. $$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a|, & k=1 \\ \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}, & k \geq 2 \end{cases}$$

2. $$\int \frac{2(x-b)}{(x-b)^2+c^2}dx = \log((x-b)^2+c^2)$$
   $$\int \frac{1}{(x-b)^2+c^2}dx = \frac{1}{c}\arctan(\frac{x-b}{c})$$

3. $$\int \frac{2(x-b)}{\big((x-b)^2+c^2\big)^k}dx = \frac{1}{1-k}\frac{1}{\big((x-b)^2+c^2\big)^{k-1}}, \qquad k \geq 2$$

4. $$I_n := \int \frac{1}{\big((x-b)^2+c^2\big)^n}dx \qquad \text{für } n \geq 2$$
   kann durch partielle Integration rekursiv berechnet werden, mit dem Ergebnis
   $$c^2 I_n(x) = \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}(x) + \frac{x-b}{2(n-1)\big((x-b)^2+c^2\big)^{n-1}}$$

Symbolische Programme wie z.B. Mathematica beherrschen das auch. Man muss aber überprüfen, ob das Ergebnis insbes. bei den Nullstellen von $Q(x)$ sinnvoll ist.

13 Taylorapproximation

Wir kennen bereits die Potenzreihen-Entwicklung von Funktionen wie $\sin, \cos, \exp$, etc., und deren Realisierung als Taylorreihen. Nun können wir explizite Korrektur-Terme und Fehlerabschätzungen herleiten:

Zur Erinnerung: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und $a \in I$. Dann ist das Taylor-Polynom der Ordnung n von f um einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ definiert als

$$(T_n f)(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Für $n = 1$ entspricht dies genau der linearen Näherung von f am Punkt a, siehe Satz 11.1:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \quad h \to 0$$

die höheren Terme $n > 1$ in der Taylor-Entwicklung ergeben die optimale Näherung von $f(x)$ durch Polynome vom Grad n um den Punkt $x \approx a$.

Die präzise Aussage ist wie folgt:

Satz 13.1. *(Taylor'sche Formel) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $a \in I$ und $x \in I$*

$$\begin{aligned} f(x) &= (T_n f)(x; a) + R_{n+1}(x; a) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x; a) \end{aligned} \tag{13.1}$$

mit

$$R_{n+1}(x; a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Insbesondere

$$R_{n+1}(x; a) = \mathcal{O}\big((x-a)^{n+1}\big) \qquad \text{für } \; x \to a$$

(beachte: $(x-a)^{n+1} \ll (x-a)^n$ für $|x-a| \ll 1$!)

Proof. Induktion nach n:

<u>Induktionsanfang $n = 0$:</u>

Es gilt nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Induktionsschritt $n-1 \to n$: Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
f(x) - (T_{n-1}f)(x;a) = R_n(x;a) &\overset{I.A.}{=} \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\
&\overset{part.int.}{=} \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\
&= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x;a) \qquad (13.2)
\end{aligned}
$$

Abschätzung des Restgliedes:

oBdA $a \leq x$. Dann

$$|R_{n+1}(x;a)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t\in[a,x]} \left(|x-t|^n |f^{(n+1)}(t)|\right) \int_a^t dt \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{n!} \sup_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$$

dies bedeutet, dass

$$\limsup_{x\to a} \frac{|R_{n+1}(x;a)|}{|x-a|^{n+1}} < \infty$$

□

Beispiele:

- $$f(x) = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + R_3(x;0)$$

  ist die optimale Näherung von $\exp(x)$ bei 0 durch ein quadratisches Polynom;
  $R_3(x;0) = \frac{1}{3!}\int_0^x t^2 e^t dt = \mathcal{O}(x^3)$. (Skizze)

- $$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

  (siehe Kapitel 11.3).

es gibt eine alternative Form des Restgliedes:

Satz 13.2. *(Lagrange)*

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Taylor gibt es ein ξ zwischen a und x, sodass

$$R_{n+1}(x;a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Proof. verfeinerte Version des MWS der Integralrechnung, siehe [Forster § 22]. □

Beispiele:

- Sei $x > 0$. Dann gilt

$$e^x = T_2 f(x;0) + R_3(x;0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_3(x;0)$$

mit

$$|R_3(x;0)| = \frac{e^\xi}{3!}x^3 \le \frac{x^3}{3!}e^x$$

weil $|\xi| \le x$.

- betrachte

$$\begin{aligned}\cos(x) &= T_{2n+1} f(x;0) + R_{2n+2}(x;0) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n+2}(x;0)\end{aligned}$$

mit

$$|R_{2n+2}(x;0)| = \frac{\cos^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}|x^{2n+2}| = \frac{\cos(\xi)}{(2n+2)!}|x^{2n+2}| \le \frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!}$$

14 Uneigentliche Riemann-Integrale

Wir wollen Integrale vom Typ $\int_a^\infty f(x)dx$ berechnen, sowie Integrale über Funktionen die an einzelnen Punkten nicht definiert sind, wie z.B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Diese werden als Grenzwert von gewöhnlichen Riemann-Integralen definiert.

Definition 14.1. *1. Sei $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und f auf jedem kompakten Intervall $[a, \beta] \subset [a, b)$ integrierbar. Falls $\int_a^b f(t)dt := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(t)dt$ existiert, heißt f auf $[a, b)$ uneigentlich (Riemann-) integrierbar.*

2. analog für $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

3. Sei $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und f auf jedem kompakten Intervall $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ integrierbar. Falls für ein $c \in (a, b)$ sowohl $\int_a^c f(t)dt$ als auch $\int_c^b f(t)dt$ im obigen Sinn existieren, heißt f auf (a, b) uneigentlich (Riemann-) integrierbar und man setzt

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Man sagt kurz, dass $\int_a^b f(t)dt$ ist konvergent ist.

Beispiele:

1. Das Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ konvergiert für $s > 1$. Es gilt nämlich

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^R = \frac{1}{s-1}\Big(1 - \frac{1}{R^{s-1}}\Big)$$

   Da $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^{s-1}} = 0$, folgt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \qquad \text{für } s > 1.$$

   Ähnlich zeigt man, dass $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ für $s \leq 1$ nicht konvergiert.

2. Das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ konvergiert für $s < 1$. Es gilt nämlich

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{x^{s-1}}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{s-1}\Big(1 - \epsilon^{1-s}\Big)$$

   Da $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{1-s} = 0$, folgt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \qquad \text{für } s < 1.$$

   Ähnlich zeigt man, dass $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ für $s \geq 1$ nicht konvergiert.

3. $$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a} \qquad \text{für } a > 0$$

   Proof.

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-ax}dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}) = \frac{1}{a}$$

□

<u>Rechenregeln für uneigentliche Integrale</u>

im Folgenden $I = (a, b) =$ Intervall mit Grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$

1. <u>HDI</u>: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ auf I. Dann gilt

$$\boxed{\int_I f(x)dx = \lim_{x\nearrow b} F(x) - \lim_{x\searrow a} F(x) =: [F(x)]_b^a}$$

2. <u>partielle Integration:</u>

$$\boxed{\int_I f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_b^a - \int_I f'(x)g(x)dx}$$

   (wenn beide Ausdrücke auf der rechten Seite existieren d.h. konvergieren)

3. Substitution: $f : I \to \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}^1(J)$, $g(J) \subset I$ und I, J Intervalle mit Grenzen in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

   Dann gilt:

$$\boxed{\int_J f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(J)} f(x)dx}$$

Satz 14.1. *(Vergleichskriterium)*

Sei $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_{x=1}^{\infty} f(x)dx$ konvergiert.

Proof. Idee: (Skizze)

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_{x=1}^{N} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

□

Beispiel:

die Riemann'sche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.

(Die wahre Bedeutung dieser Funktion wird erst in der sogenannten Funktionentheorie sichtbar, wo diese Funktion ins Komplexe fortgesetzt wird.)

14.1 Die Gamma-Funktion

Definition 14.2. *Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ist definiert durch*

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Das Integral konvergiert für alle $x > 0$, da

1. $|t^{x-1}e^{-t}| \leq t^{x-1}$, $\quad t > 0$ und $\int_0^1 t^{x-1}dt$ konvergent
2. $|t^{x-1}e^{-t}| \leq \frac{n!}{t^{n-x+1}}$, $t > 0$ (wegen $e^t \geq \frac{t^n}{n!}$) und $\int_1^{\infty} t^{-n+x-1}dt$ konvergent für $n > x$.

Satz 14.2. *(Eigenschaften der Gamma-Funktion)*

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0 \qquad$ *(Funktionalgleichung)*
2. $\Gamma(n+1) = n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
4. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s) \qquad$ *für* $s > 1$.

Proof. 1.

$$\begin{aligned}(l.s.) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \overset{\text{part.int.}}{=} [-t^x e^{-t} dt]_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= 0 + x\Gamma(x) = (r.s.) \end{aligned} \tag{14.1}$$

2. $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$

3. Verwende Produktdarstellung

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! x^n}{x(x+1)...(x+n)}$$

(siehe zB. [Forster] § 20 Satz 5)

4. (siehe zB. [Forster] 21.6)

□

Aus 3.) erhalten wir die folgende wichtige Formel:

Satz 14.3. *(Gaußsches Integral)*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Proof. Wir substituieren $x = t^{1/2},\ dx = \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$ und erhalten

$$\int_\epsilon^R e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^{R^2} t^{-1/2} e^{-t} dt$$

Im Grenzfall $\epsilon \searrow 0,\ R \to \infty$ ergibt sich

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2\frac{1}{2} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

□

(Diese Formel kann einfacher mit Methoden der höher-dimensionalen Integration hergeleitet werden, siehe Analysis II).

Noch eine wichtige Formel, die in der Physik oft benötigt wird:

Satz 14.4. *(Stirling'sche Formel) Die Fakultät hat das asymptotische Verhalten*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1$$

Proof. siehe zB. [Forster] § 20 Satz 6 □

15 Integration von Funktionenfolgen

Fragestellung:

Funktionenfolge $f_n : I \to \mathbb{R}$, I Intervall, mit $f_n \to f$ punktweise (also $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in I$).

Wir nehmen an, dass $\int_I f_n(x)dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert (also endlich ist).

Folgt dann automatisch, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx \stackrel{?}{=} \int_I f(x)dx \quad ? \qquad (*)$$

Die Antwort ist: nicht unbedingt (!), aber unter gewissen Voraussetzungen JA.

Es können z.B. die folgenden Probleme auftreten:

1. $f(x)$ nicht integrierbar

   Beispiel:

   $$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x}, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 0, & x \in (0, \frac{1}{n}] \end{array} \right\} \to \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1]$$

   aber: $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ divergent.

2. $\int_I f(x)dx$ konvergent, aber (*) gilt nicht.

   Beispiel:

   $$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2 x, & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{array} \right\} \to f(x) = 0, \quad x \in (0,1]$$

   (Skizze: Zacken-Funktion)

   Es gilt $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ aber $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Wir benötigen stärkere Voraussetzung: gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$

(Erinnerung: $f_n \to f$ gleichmäßig auf $D \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$

schon bekannt:

- Satz 10.10:
  f_n stetig, $f_n \to f$ gleichm. konv $\;\Rightarrow\; f$ stetig
- Satz 11.6:
  $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$, $f_n \to f$ punktweise, f_n' gleichm. konv.
  $\Rightarrow\; f \in \mathcal{C}^1((a,b))$ und $\lim f_n'(x) = f'(x)$

nun gilt:

Satz 15.1. *Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Die Folge konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Proof.

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \to 0$$

□

Nachtrag: Beweis von Satz 11.6:

Proof. Aus Satz 10.10 folgt: $g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ ist stetig.

aus dem HDI folgt für $x, c \in (a,b)$:

$$f_n(x) = \int_c^x f_n'(t)dt + f_n(c)$$

für $n \to \infty$ folgt mit obigem Satz:

$$f(x) = \int_c^x g(t)dt + f(c)$$

also: $f \in \mathcal{C}^1((a,b)$ und $g(x) = f'(x)$

□

Anwendung: Integration (reeller) Potenzreihen:

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, mit Konvergenzradius $R > 0$ um a.

Wir wissen bereits (Satz 10.12), dass die Reihe auf jedem kompakten Intervall $[\alpha, \beta] \subset (a - R, a + R)$ gleichmäßig konvergiert.

Nach dem obigen Satz gilt somit für $[\alpha, \beta] \subset (a - R, a + R)$:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta P(x)dx &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_\alpha^\beta (x-a)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}\right]_\alpha^\beta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\Big((\beta-a)^{k+1} - (\alpha-a)^{k+1}\Big) \qquad (15.1)\end{aligned}$$

Man drückt dies auch so aus: Eine Potenzreihe darf gliedweise integriert werden.

16 Fourierreihen

Wir besprechen gleich den übersichtlicheren Fall von komplexen Fourierreihen, und erhalten daraus leicht den Sezialfall von reell-wertigen Fourier-Reihen.

Definition 16.1. *Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte reell- oder komplexwertige Funktion f heißt periodisch mit der Periode $L > 0$, falls*

$$f(x + L) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt natürlich $f(x + nL) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Durch Variablensubstitution können wir daraus immer eine Funktion F der Periode 2π erhalten:

$$f(x) =: F(\frac{2\pi x}{L}), \qquad F(x) = F(x + 2\pi)$$

Wir können uns daher auf die Periodenlänge 2π beschränken, also $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Die einfachsten solchen Funktionen sind die *trigonometrischen Polynome*

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad c_k \in \mathbb{C} \qquad (16.1)$$

welche offensichtlich $f(x) = f(x + 2\pi)$ erfüllen. Die "Fourierkoeffizienten" c_k von f erhält man durch Integration

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \qquad (16.2)$$

unter Verwendung von

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Insbesondere folgt daraus, dass die Funktionen $\{e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}\}$ auf $[0, 2\pi]$ linear unabhängig sind. Das Integral einer komplex-wertigen Funktion $f(x) + ig(x) :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\int_a^b (f(x) + ig(x))dx := \int_a^b f(x)dx + i \int_a^b g(x)dx$$

Definition 16.2. *Sei $f(x)$ eine beliebige 2π- periodische Funktion. Die* Fourier-Reihe *von f ist definiert durch*

$$\tilde{f} := \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n, \qquad \tilde{f}_n := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad c_k \in \mathbb{C} \tag{16.3}$$

wobei c_k durch (16.2) definiert ist.

Die wesentliche Behauptung ist nun, dass unter geeigneten Voraussetzungen $\tilde{f} = f$ gilt, oder ggf. eine etwas abgeschwächte Version davon gilt. Die präzisen Aussagen werden im folgenden besprochen. Eine Aussage können wir bereits machen:

Falls sich eine Funktion $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$ als gleichmässig konvergente Reihe darstellen lässt, dann gilt immer $\gamma_k = c_k$. Wegen der gleichmässigen Konvergenz kann man nämlich Integration und Limesbildung tauschen, und man erhält

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx} \Big) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx \ = \gamma_k \end{aligned}$$

Trigonometrische bzw. reelle Fourierreihen:

Unter Verwendung von $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$ kann man (16.1) umschreiben als

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \big)$$

und analog für komplexe Fourier-Reihen, wobei

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \qquad k \geq 1 \\ c_0 &= \frac{1}{2} a_0 \ . \end{aligned}$$

bzw.

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}) \ . \tag{16.4}$$

Im allgemeinen sind a_k und b_k komplex. Weiters gilt

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad \forall k \qquad \text{falls } f \text{ ungerade} \\ b_k &= 0 \quad \forall k \qquad \text{falls } f \text{ gerade} \end{aligned}$$

Falls die Funktion $f(x)$ **reell-wertig** ist, folgt aus (16.1) durch komplexe Konjugation $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = f^*(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k^* e^{-ikx}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der e^{ikx} folgt daraus

$$c_k = c_{-k}^*,$$

und daraus folgt mit (16.4) dass a_k und b_k reell sind. Dennoch ist es auch für reelle Funktionen $f(x)$ oft günstiger, die komplexe Form (16.1) zu verwenden.

Skalarprodukt und Approximation im Mittel für periodische Funktionen

Sei V der Vektorraum (über $\mathbb{C}$) aller 2π- periodischen Funktionen, die über das Intervall $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbar sind. Sei weiters $V_n \subset V$ der (Unter)Vektorraum (über $\mathbb{C}$) aller trigonometrischen Polynome der Form (16.1) (also mit "Wellenzahl" $|k| \leq n$).

Wir definieren ein Skalarprodukt auf V bzw. V_n wie folgt:

Definition 16.3.

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx \qquad \textit{für} \ \ f, g \in V$$

Man überprüft leicht dass alle Eigenschaften eines Skalarproduktes auf einem komplexen Vektorraum erfüllt sind, also z.B.

$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \\ \langle \lambda f, g \rangle &= \lambda^* \langle f, g \rangle, \qquad \langle f, \lambda g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \\ \langle f, g \rangle^* &= \langle g, f \rangle \end{aligned}$$

etc. Insbesondere gilt

$$\langle f, f \rangle \geq 0 \ ,$$

und wir können die folgende Norm auf V definieren

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

und es gilt die Dreiecksungleichung

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Für stetige Funktionen $f \in V$ folgt aus $\|f\| = 0$ dass $f = 0$ (also $f(x) = 0$ für alle x). Für allgemeinere Funktionen in V gilt dies aber nicht immer: falls z.B. f nur an einer Stelle von 0 verschieden ist, gilt $\|f\| = 0$ aber $f \neq 0$.

Wir definieren nun die Funktionen $e_k \in V$ durch

$$e_k(x) := e^{ikx}, \qquad k \in \mathbb{Z} \,.$$

Diese bilden ein *Orthonormalsystem*,

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{k,l} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

Die "Fourierkoeffizienten" c_k (16.2) lassen sich daher wie folgt darstellen

$$c_k = \langle e_k, f \rangle$$

und die Fourier-Reihe (16.3) erhält die folgende einfache Gestalt

$$\tilde{f}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k \, \langle e_k, f \rangle, \qquad \tilde{f} = \lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n$$

Die erste Formel besagt, dass $\tilde{f}_n$ die orthogonale Projektion von f auf $V_n \subset V$ ist, d.h. die Differenz

$$g := f - \tilde{f}_n$$

ist orthogonal zu V_n, da $\langle e_k, \tilde{f}_n \rangle = \langle e_k, f \rangle$ und somit

$$\langle e_k, g \rangle = 0 \qquad \forall k \leq n$$

Daraus folgt für $f = \tilde{f}_n + (f - \tilde{f}_n)$ die Identität

$$\|f\|^2 = \|\tilde{f}_n\|^2 + \|g\|^2 \tag{16.5}$$

d.h. $\tilde{f}_n$ ist die optimale Näherung[1] in V_n an f bezüglich der Norm $\|.\|$. Nun ist

$$\|\tilde{f}_n\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \,, \qquad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Wenn wir dies in (16.5) einsetzen erhalten

Satz 16.1. *Es gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \qquad \textit{(Bessel'sche Ungleichung)}$$

[1]Man kann leicht sehen (lineare Algebra), dass die "Diskrepanz" $\|g\|^2$ den kleinstmöglichen Wert annimt für alle möglichen Approximationen von f in V_n.

Insbesondere folgt aus (16.5), dass $\lim_{n\to\infty} \|f - \tilde{f}_n\| = 0$ genau dann, wenn die Besselsche Ungleichung zu einer Gleichung wird, also

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \qquad \text{(Vollständigkeitsrelation)} \tag{16.6}$$

Die folgende Definition ist naheliegend und nützlich:

Definition 16.4. *Seien f und f_n, $n \in \mathbb{N}$ periodische, über das Intervall $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktionen. Man sagt, die Folge (f_n) konvergiere im quadratischen Mittel gegen f, falls*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$$

Konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f, dann konvergiert sie auch im quadratischen Mittel. Die Umkehrung gilt aber nicht. Eine im quadratischen Mittel konvergente Funktionenfolge braucht nicht einmal punktweise zu konvergieren.

Wir zitieren im folgenden einige relevante Resultate:

Satz 16.2. *Sei f eine periodische Funktion, die auf $[0, 2\pi]$ Riemann- integrierbar ist. Dann konvergiert die Fourier-Reihe $\tilde{f}$ im quadratischen Mittel gegen f, und die Vollständigkeitsrelation (16.6) ist erfüllt.*

<u>Beweisskizze:</u> Zunächst zeigt man die Aussage für die (periodisch fortgesetzte) Stufen-Funktion $\chi_{[0,a]}$ durch explizite Berechnung der Fourierreihe und Überprüfen der Vollständigkeitsrelation (Übung!).

Dies kann leicht für allgemeine Treppenfunktionen verallgemeinern werden, und damit durch Grenzübergang für Riemann-integrierbare Funktionen. Für Details siehe [Forster § 23 Satz 2]. Einen anderen Zugang findet man in [Königsberger § 16]. $\square$

Aussagen über punktweise Konvergenz sind schwieriger zu beweisen. Das folgende Resultat ist oft hilfreich:

Satz 16.3. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige periodische Funktion, die stückweise stetig differenzierbar ist, d. h es gebe eine Unterteilung*

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_r = 2\pi$$

von $[0, 2\pi]$, sodass $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ für $j = 1, ..., r$ stetig differenzierbar ist. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.

Für einen Beweis siehe zB [Forster § 23].

<u>Beispiel:</u>

Wir betrachten wieder die Funktion aus (12.7)

$$F(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad \text{für } 0 < x < 2\pi$$

periodisch fortgesetzt mit Periodenlänge 2π. Die Funktion ist stückweise stetig, also Riemann-integrierbar. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)e^{-ikx}dx \tag{16.7}$$

Für $k = 0$ ergibt dies

$$c_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{4\pi}(2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{2}) = 0 \tag{16.8}$$

und für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} xe^{-ikx}dx \\ &= -\frac{1}{4\pi}\Big([\frac{1}{-ik}xe^{-ikx}]_0^{2\pi} - \frac{1}{-ik}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}dx\Big) \\ &= -\frac{i}{2k}, \qquad k \neq 0 \end{aligned} \tag{16.9}$$

Somit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k\neq 0} -\frac{i}{2k}e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(kx) \tag{16.10}$$

mit

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{k} \qquad \text{für } k \neq 0 \tag{16.11}$$

in Übereinstimmung mit (12.7). Aus den obigen Sätzen folgt $f = \tilde{f}$ im quadratischen Mittel, während die punktweise Übereinstimmung nur für $0 < x < 2\pi$ gilt. An den Sprungstellen $2\pi\mathbb{Z}$ stimmt $f(x)$ nicht mit $\tilde{f}(x)$ überein ("Gibbs'sches Phänomen", überschiessendes Verhalten an den Sprungstellen).