Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 7

1. Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind holomorph, welche nicht? Begründen Sie!

(i) $z \mapsto \lvert z \rvert$	(iv) $z \mapsto \overline{z}$
(ii) $z \mapsto \lvert z \rvert^2$	(v) $z \mapsto e^{-z^2}$
(iii) $z \mapsto z\,(z-1)$	(vi) $z \mapsto \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$

2. Geben Sie eine holomorphe Funktion an, deren Realteil $u(x,y) = x\,(2y+1)$ ist! (Dabei wurde die Schreibweise $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ verwendet.)

3. Geben Sie eine holomorphe Funktion an, deren Imaginärteil $v(x,y) = \sin(x)\,e^{-y}$ ist! (Dabei wurde die Schreibweise $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ verwendet.)

4. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet $f : G \to \mathbb{C}$ eine nirgends verschwindende Funktion, angeschrieben in Polarform als $f(z) = r(z)\,e^{i\,\varphi(z)}$ mit $r(z) \geq 0$ und $\varphi(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in G$. Die Funktionen r und φ seien im reellen Sinn (d.h. interpretiert als $(x,y) \mapsto r(x,y)$ und $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$, wobei $z = x + i\,y$) differenzierbar. Drücken Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen durch die Funktionen r und φ aus!

5. Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt genau zwei „Wurzeln“, d.h. es gibt genau zwei komplexe Zahlen, deren Quadrat z ist.

   (i) Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, für jedes $z \neq 0$ eine der beiden „Wurzeln“ so auszuwählen, dass die daraus entstehende „Wurzelfunktion“ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig wäre!

   (ii) Das Wurzelziehen in $\mathbb{C}$ kann eindeutig und stetig gemacht werden[1], indem man auf 0 und die negative reelle Achse verzichtet und sich auf das Gebiet

   $$G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$$

   beschränkt. Ist $z = r\,e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$, so wird definiert $w(z) := \sqrt{r}\,e^{i\,\varphi/2}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $w : G \to \mathbb{C}$ holomorph ist!

6. Wiederholen Sie, was Sie in der Analysis I über den Konvergenzbereich von komplexen Potenzreihen gelernt haben! Klären Sie damit und mit Ihrem bisherigen Wissen über die komplexe Analysis folgendes Problem auf, das sich in der reellen Analysis stellt: Die Taylorreihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ um 0 (schreiben Sie sie an!) konvergiert nur für $-1 < x < 1$. Warum? Weder dem Funktionsterm noch dem Graphen von f sieht man an, dass an den Stellen ± 1 irgendetwas passiert, das man als Grund dafür erkennen könnte.

[1] Es gibt noch andere Möglichkeiten, das Wurzelziehen eindeutig und stetig zu machen.

7. Sinus und Cosinus als Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ können, wenn man sie nicht durch ihre Potenzreihendarstellung einführen möchte, in der Form

$$\begin{aligned}\sin(z) &:= \frac{1}{2\,i}\left(e^{i\,z} - e^{-i\,z}\right) \\ \cos(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^{i\,z} + e^{-i\,z}\right)\end{aligned}$$

definiert werden. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Definition ihre Ableitungen!

8. Sei $f(z, \overline{z})$ ein Ausdruck, der aus z und $\overline{z}$ (zunächst als unabhängige komplexe Variable aufgefasst) durch die Anwendung von Grundrechnungsarten, Exponential- und Winkelfunktionen gewonnen wird[2]. Man kann dann einerseits partiell nach z und $\overline{z}$ ableiten und danach für $\overline{z}$ die zu z komplex konjuierte Zahl einsetzen. Andererseits kann man $z = x + iy$ und $\overline{z} = x - iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) setzen und partiell nach x und y ableiten. Zeigen Sie:

   (i) $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ und $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

   (ii) Die Funktion $z \mapsto f(z, \overline{z})$ ist genau dann (in ihrem Definitionsbereich) holomorph, wenn $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\, f(z, \overline{z}) = 0$ ist, d.h. wenn $f(z, \overline{z})$ nicht von $\overline{z}$ abhängt.

9. Eine der wichtigsten und folgenreichsten Erkenntnissen der komplexen Analysis ist diese: Mit $r > 0$ gilt

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z^n} = 0$$

   für alle natürlichen Zahlen n außer einer einzigen: Für $n = 1$ ergibt sich

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z} = 2\,\pi\,i.$$

   Rechnen Sie diese Beziehungen mit Hilfe einer Parametrisierung der Kurve $|z| = r$ nach!

10. Für $r > 0$ berechnen Sie

   (i) $\displaystyle\oint_{|z|=r} \overline{z}\,dz.$

   (ii) $\displaystyle\oint_{|z|=r} \frac{dz}{\overline{z}}.$

   (iii) $\displaystyle\oint_{|z|=r} \mathrm{Re}(z)\,dz.$

---

[2] Ein Beispiel für einen solchen Ausdruck wäre

$$f(z, \overline{z}) = \frac{z + 5\,\sin^3(\overline{z}\,z^2)\,e^z - i\,e^{2\,\overline{z}}}{4\,z^2 - 3\,\overline{z}}\,.$$