Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 5

1. Gegeben sind einige Abbildungsvorschriften „Funktion $\varphi \mapsto$ Zahl“, die zunächst einfach so hingeschrieben werden. Welche dieser Vorschriften definieren tatsächlich Abbildungen $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, welche davon sind Distributionen?

   (i) $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \varphi(x)\, dx$ (iv) $\varphi \mapsto \varphi(0)^2$

   (ii) $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{x}\, \varphi(x)\, dx$ (v) $\varphi \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\,\pi\, n)$

   (iii) $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$ (vi) $\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$

2. Zeigen Sie, dass „im Sinne von Distributionen“ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\,\xi\,x} = \delta(x)$$

   (eine Formel, die Sie sich merken sollten!), womit gemeint ist, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i\,\xi\,x}\, \varphi(x) = \varphi(0) \qquad \text{für jede Testfunktion } \varphi.$$

   Tipp: Verwenden Sie die Umkehrformel der Fouriertransformation!

3. Nun drehen Sie den Spieß um, nehmen die Darstellung der Delta-Distribution von Aufgabe 2 als gegeben an und verifizieren mit ihrer Hilfe die Gültigkeit der Umkehrformel der Fouriertransformation in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\,\xi\,x} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, e^{-i\,\eta\,\xi}\, f(\eta)}_{\widehat{f}(\xi)} = f(x)$$

   für Testfunktionen f, indem sie die Integrationen auf der linken Seite vertauschen und die „physikalische Schreibweise“ für die Wirkung der Delta-Distribution in der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \delta(y-a) f(y) = f(a)$$

   benutzen! (Derartige Rechnungen treten in der Feldtheorie und der Teilchenphysik oft auf. Die mit ihnen erzielten Ergebnisse gelten in der Regel dann auch für größere Klassen von Funktionen, die keine Testfunktionen sind.)

4. Zeigen Sie, dass „im Sinne von Distributionen“ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\,n\,x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\,\pi\,k),$$

womit gemeint ist, dass

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\, e^{i\,n\,x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\,\pi\,k) \qquad \text{für jede Testfunktion } \varphi.$$

Gehen Sie dabei so vor:

(i) Betrachten Sie die Einschränkung von φ auf die Intervalle

$$J_k =](2k-1)\pi, (2k+1)\pi] \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

und bezeichnen Sie die 2π-periodische Fortsetzung jeder dieser Einschränkungen mit f_k. Es gilt dann $\varphi(2\,\pi\,k) = f_k(0)$. (Warum?)

(ii) Entwickeln Sie f_k in eine Fourierreihe $f_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,k}\, e^{i\,n\,x}$.

(Sie konvergiert punktweise überall außer möglicherweise an den Stellen $(2k+1)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. (Warum?) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $c_{n,k}$ und drücken Sie sie als Integrale über φ aus!

(iii) Berechnen Sie $f_k(0)$ mit der Fourierreihe von (ii).

(iv) Berechnen Sie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(0)$, was ja dasselbe ist wie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\,\pi\,k)$. Da es sich bei dieser Reihe in Wahrheit nur um eine endliche Summe handelt (warum?), können Sie $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ vertauschen.

Anmerkung: Die so erhaltene Distribution heißt „Dirac-Kamm“. Wie erklären Sie sich ihren Namen? Ist sie auf diesem Übungsblatt schon früher vorgekommen?

5. Da $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$ nicht für jede Testfunktion existiert (ist das auf diesem Übungsblatt nicht schon vorgekommen?), kann man $\frac{1}{x}$ nicht als Distribution auffassen. Es gibt aber einen Ersatz dafür, den *(Cauchyschen) Hauptwert*, definiert als

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right).$$

$T(\varphi)$ wird meist in der Form

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

angeschrieben ($\mathcal{P}$ für *principal value*). Zeigen Sie, dass der Hauptwert für jede Testfunktion existiert!

6. Distributionen können auch komplexe Werte annehmen, indem man Real- und Imaginärteil getrennt betrachtet. Zwei in der Teilchenphysik wichtige komplexwertige Distributionen sind:
$$T_\pm : \mathcal{D} \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\,\varepsilon}\, dx.$$
(Sie sind ebenfalls ein Ersatz für $\frac{1}{x}$.) Zeigen Sie, dass
$$T_\pm(\varphi) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \mp i\,\pi\,\delta(x).$$

7. Manche Distributionen besitzen eine (inverse) Fouriertransformierte[1]. Um die (inverse) Fouriertransformierte einer Distribution zu berechnen, verwendet man oft die intuitive „physikalische Schreibweise“ und rechnet mit Distributionen so, als ob sie Funktionen wären. Mit der Zeit bekommt man ein Gefühl dafür, was man in diesem Zusammenhang tun darf und was nicht. Ergänzen Sie:

T	$\widehat{T}$
$\delta(x)$	....
$\delta(x-a)$	....
$\delta'(x)$	....
$\delta''(x)$	....
1	....
....	$\delta'(\xi)$
....	ξ
....	ξ^2

[1] Ein Beispiel einer Distribution, die keine Fouriertransformierte besitzt, ist T_f mit $f(x) = e^x$. Um das Thema systematischer anzugehen, kann man zu *temperierten Distributionen* übergehen. Sie sind ähnlich definiert wie die Distributionen, mit dem Unterschied, dass die Testfunktionen nicht unbedingt kompakten Träger besitzen müssen – es reicht, wenn sie und ihre Ableitungen im Unendlichen schneller abfallen als jede Potenz $|x|^{-p}$. Dann setzt man $\widehat{T}(\varphi) := T(\widehat{\varphi})$ für jede temperierte Distribution T.