Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 4

1. Auf einem unendlich langen, homogenen Stab (der modellmäßig als unendlich dünn angesehen wird) herrscht zur Zeit t an der Stelle x die Temperatur $T(t,x)$. Die Funktion $T:(t,x)\mapsto T(t,x)$ erfüllt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,,$$

wobei die Konstante $\chi > 0$ die Temperaturleitfähigkeit angibt. Vollziehen Sie folgende Lösungsstrategie dieser partiellen Differentialgleichung nach:

(i) Fassen Sie die Temperatur für gegebenes t als Funktion $T_t : x \mapsto T(t,x)$ auf, setzen Sie diese als Fourierintegral in x (d.h. als inverse Fouriertransformierte einer Funktion $\widehat{T_t}$)

$$T_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{T}_t(\xi)\, e^{i\,\xi\,x}\, d\xi$$

an und setzen Sie diesen Ansatz in die Wärmeleitungsgleichung ein, um (für festgehaltenes ξ) eine Differentialgleichung für die Funktion $t \mapsto \widehat{T}_t(\xi)$ zu erhalten! (Sie dürfen dabei die Reihenfolgen von Ableitungen und Integrationen vertauschen.)

(ii) Lösen Sie die in (i) erhaltene Differentialgleichung und drücken Sie die (allgemeine) Lösung durch den Anfangswert $\widehat{T}_0(\xi)$ aus!

(iii) Schreiben Sie die auf diese Weise erhaltene Integraldarstellung von $T(t,x)$ an!

(iv) Wie könnte man nun die Zeitentwicklung $(t,x) \mapsto T(t,x)$ der Temperaturverteilung für zukünftige Zeiten $t > 0$ erhalten, wenn die Funktion $x \mapsto T(0,x)$, also die Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$, vorgegeben ist? Geben Sie eine allgemeine Lösungsformel an! (In dieser Formel werden zwei Integrationen hintereinander ausgeführt.)

(v) Für eine hinreichend friedliche (und realistische) Funktion $\widehat{T}_0$ kann man die Reihenfolge der zwei in der Lösungsformel von (iv) auftretenden Integrationen vertauschen. Tun Sie das und vereinfachen Sie!

Das (für $t > 0$ gültige) Endergebnis sollte so aussehen:

$$T(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,\chi\,t}} \int_{-\infty}^{\infty} T(0,x') \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\,\chi\,t}\right)\, dx'.$$

2. Das angegebene Endergebnis von Aufgabe 1 kann interpretiert werden als „kontinuierliche Überlagerung“ von Temperaturverteilungen der Form

$$(t > 0, x) \mapsto H(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,\chi\,t}}\,\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\,\chi\,t}\right).$$

   (i) Zeigen Sie, dass jede solche Temperaturverteilung (für vorgebenes x') die Wärmeleitungsgleichung erfüllt!

   (ii) Für jedes $t > 0$ und $x' \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto H(t,x)$ die Dichtefunktion einer Normalverteilung, ihr Graph ist eine „Glockenkurve“. Geben Sie Mittelwert und Standardabweichung an! Was folgt daraus für die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} H(t,x)\,dx$?

   (iii) Diskutieren Sie, wie sich die Funktionen $x \mapsto H(t,x)$ mit wachsendem t ändern! Was passiert, wenn t (ausgehend von positiven Werten) gegen 0 strebt? Setzen Sie $\chi = 1$ und $x' = 0$ und erläutern Sie anhand der Graphen!

3. Die komplexe Form der Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch (punktweise Konvergenz vorausgesetzt[1]):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{i\,n\,x} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\,n\,x}\,f(x)\,dx.$$

   Die Faltung zweier 2π-periodischer Funktionen f und g ist durch

$$(f \star g)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

   definiert. Sei nun $h = f \star g$. Die Funktionen f, g und h werden in Fourierreihen entwickelt (punktweise Konvergenz vorausgesetzt):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{i\,n\,x}, \quad g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\,e^{i\,n\,x}, \quad h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n\,e^{i\,n\,x}.$$

   Zeigen Sie, dass $k_n = 2\,\pi\,c_n\,d_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sie dürfen dabei die Reihenfolgen von Reihenbildungen und Integrationen vertauschen.

4. Mit den Konventionen von Aufgabe 3 werde das Produkt $f(x)\,g(x)$ in eine Fourierreihe entwickelt (punktweise Konvergenz vorausgesetzt):

$$f(x)\,g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n\,e^{i\,n\,x}.$$

   Zeigen Sie, dass $q_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\,d_{n-m}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sie dürfen dabei die Reihenfolgen von Reihenbildungen und Integrationen vertauschen.

[1] Man muss in dieser und in der folgenden Aufgabe die punkteweise Konvergenz nicht voraussetzen. Wir wollen uns hier aber nicht mit Konvergenzfragen herumschlagen, daher diese vereinfachende Annahme.

5. Gegeben ist die lineare Differentialgleichung für die Funktion f

$$f''(x) + 3\,f'(x) - 4\,f(x) = x\,g(x),$$

wobei die rechte Seite ein Störterm ist, der als vorgegeben betrachtet wird. Übersetzen Sie die Differentialgleichung in eine Beziehung der Fouriertransformierten von f und g und geben Sie eine Integraldarstellung von f an!

Nachfrage: Die angegebene Differentialgleichung besitzt *viele* Lösungen. Warum bekommt man mit dieser Methode nur eine?

6. Lösen Sie die Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-|x-t|}\, dt = e^{-x^2},$$

indem Sie von beiden Seiten die Fouriertransformierte bilden, $\widehat{f}$ bestimmen und damit f berechnen!