Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 3

1. Sei $\mathcal{P}_m$ die Menge aller Polynomfunktionen $[-1,1] \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq m$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$. Die Polynome $(u_0, u_1, \ldots u_m)$ mit $u_n(x) = x^n$ (für $n = 0, 1, \ldots, m$) bilden eine Basis von $\mathcal{P}_m$. Wendet man auf diese Basis das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren an, so erhält man eine ON-Basis $(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ von $\mathcal{P}_m$. Für $m \geq 2$ berechnen Sie p_0, p_1 und p_2.

   Anmerkung: Die Polynome $P_n(x) := \sqrt{\frac{2}{2\,n+1}}\, p_n(x)$ heißen *Legendre-Polynome* und spielen in viele Bereichen der Physik eine wichtige Rolle. Sie bilden eine Hilbert-Basis von $L_2([-1,1])$.

2. Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-|x|}$.

3. Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $g(x) = e^{-x^2}$. Sie können die Formel $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+a\,x}\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{a^2/4}$ verwenden, die auch für komplexe a gilt.

4. Die wichtigsten Rechenregeln für die Fouriertransformation und ihre Inverse werden am übersichtlichsten in Form einer Tabelle zusammengefasst. Ergänzen Sie:

Funktion	Fouriertransformierte	gilt für
$f(a\,x)$	....	$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
....	$\widehat{f}(a\,\xi)$	$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$f(x-a)$	....	$a \in \mathbb{R}$
....	$\widehat{f}(\xi - a)$	$a \in \mathbb{R}$
$\overline{f(x)}$	....	
$f'(x)$	....	
....	$\widehat{f}'(\xi)$	
$f(x)\, g(x)$	....	
....	$\widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi)$	

Einige der fehlenden Funktionen können Sie direkt dem Buch entnehmen.

5. Auch Tabellen der (inversen) Fouriertransformierten konkreter Funktionen sind nützlich. Ergänzen Sie (mit Hilfe der Ergebnisse der vorangegangenen Aufgaben):

Funktion	Fouriertransformierte	für
$e^{-\lvert x\rvert/a}$	....	$a \in \mathbb{R}, a > 0$
$e^{-\lvert x-b\rvert/a}$	....	$a > 0,\ b \in \mathbb{R}$
....	$e^{-(\xi-b)^2/a^2}$	$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

6. Untersuchen Sie, wie sich die Funktion $f(x) = e^{-|x|/a}$ und ihre Fouriertransformierte ändern, wenn die Konstante $a > 0$ variiert wird! Erläutern Sie anhand einer geeigneten Skizze der Graphen!

7. Dasselbe wie in Aufgabe 6 mit der charakteristischen Funktion[1] des Intervalls $[-a, a]$ (für $a > 0$). Erläutern Sie anhand einer geeigneten Skizze der Graphen!

8. Weichzeichner: Eine (integrierbare) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph viele Sprungstellen und Zacken aufweist, soll auf Skalen der Größenordnung ε (> 0) „geglättet“ werden. Eine Methode, das zu bewerkstelligen, besteht darin, für jedes $x \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $f(x)$ durch das Mittel über f im Intervall $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ zu ersetzen. Die auf diese Weise weichgezeichnete Funktion ist daher durch

$$w(x) = \frac{1}{2\,\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(x')\,dx'$$

gegeben. Zeigen Sie, dass w die Faltung von f mit der Funktion $\dfrac{1}{2\,\varepsilon}\,\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ ist!

9. Fouriertransformation in drei Dimensionen: Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f(\vec{x}) = e^{-|\vec{x}|^2}.$$

[1]Die charakteristische Funktion einer Menge M, allgemein bezeichnet mit χ_M, nimmt an der Stelle x den Wert 1 an, wenn $x \in M$ ist, ansonsten den Wert 0.