Universität Wien, WS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen III

Übungstermin 1

1. Wiederholen Sie die folgenden Begriffe aus der Linearen Algebra (die Sie auch im Kapitel 7 des verwendeten Buches Kerner + Wahl finden):

   - Vektorraum (über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$), Untervektorraum, Basis, Erzeugnis (*span*)
   - Skalarprodukt, Norm, euklidischer Vektorraum, unitärer Vektorraum
   - Orthogonalität von Vektoren, orthogonales Komplement, Orthonormalbasis (ON-Basis), Kronecker-Symbol δ_{jk}
   - lineare Abbildung (linearer Operator), Kern und Bild
   - selbstadjungiert, hermitesch
   - Projektion, direkte Summe von Untervektorräumen

   Schreiben Sie die Definitionen dieser Begriffe übersichtlich zusammen!

   Beachten Sie, dass Bezeichnungen und Konventionen in unterschiedlichen Lehrbüchern und Skripten minimal voneinander abweichen können. Wir wollen uns diesbezüglich an das Buch halten. Insbesondere ist ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum V nach dieser Konvention linear in der ersten und konjugiert linear in der zweiten Stelle: $\langle \lambda\, u + \mu\, v, w\rangle = \lambda\,\langle u, w\rangle + \mu\,\langle v, w\rangle$ und $\langle u, \lambda\, v + \mu\, w\rangle = \overline{\lambda}\,\langle u, v\rangle + \overline{\mu}\,\langle u, w\rangle$ für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, siehe Seite 180. (In manchen Büchern/Skripten ist das umgekehrt.)

   Alle Übungsaufgaben für diesen ersten Übungstermin handeln von *endlichdimensionalen* Vektorräumen.

2. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum der Dimension n und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine ON-Basis. Zeigen Sie, dass die Entwicklung eines Vektors $v \in V$ in die Basis B so aussieht:
$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j\, b_j\,, \qquad \text{wobei } c_j = \langle v, b_j\rangle \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

3. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum der Dimension n, U ein Untervektorraum der Dimension m und $(u_1, \ldots, u_m)$ eine ON-Basis von U. Nun sei die lineare Abbildung $P : V \to V,\ P\, v = \sum_{j=1}^{m} \langle v, u_j\rangle\, u_j$ gegeben. Zeigen Sie:

   (i) P ist eine Projektion, d.h. $P^2 = P$.
   (ii) $\mathrm{Bild}\, P = U$.
   (iii) $\mathrm{Ker}\, P = U^\perp$, wobei $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U ist.

   Machen Sie eine Skizze, die die Wirkung von P und die Untervektorräume $\mathrm{Bild}\, P$ und $\mathrm{Ker}\, P$ veranschaulicht, für den Fall $V = \mathbb{R}^2$ und $U =$ Gerade durch den Ursprung!

4. Zeigen Sie, dass in einem euklidischen oder unitären Vektorraum V mit ON-Basis $(b_1, \dots, b_n)$ gilt:
$$||v||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, b_j\rangle|^2 \qquad \text{für alle } v \in V.$$

5. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum der Dimension n, und seien $d_1, \dots, d_n \in V$. Zeigen Sie: Falls
$$\sum_{j=1}^{n} \langle v, d_j\rangle\, d_j = v \qquad \text{für alle } v \in V,$$
so ist $(d_1, \dots d_n)$ eine ON-Basis von V.

6. Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge aller Polynomfunktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Weiters sei für beliebige $f, g \in \mathcal{P}_2$ definiert:
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$
   (i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_2$ mit $\langle\, ,\, \rangle$ ein euklidischer Vektorraum ist!
   (ii) Geben Sie eine ON-Basis von $\mathcal{P}_2$ an!

7. Im euklidischen Vektorraum $\mathcal{P}_2$ von Aufgabe 6 sei U der aus der Menge aller reellen Vielfachen der Funktion $p : x \mapsto 1 - 2\,x$ bestehende Untervektorraum. Geben Sie die allgemeine Form eines Elements aus $U^\perp$ an!

8. Sei V der Vektorraum aller reellen Linearkombinationen der Funktionen $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} r_k(x) &= \cos(k\,x) \ \text{ für } k = 0, 1, 2 \\ s_k(x) &= \sin(k\,x) \ \text{ für } k = 1, 2. \end{aligned}$$
   (i) Zeigen Sie, dass diese 5 Funktionen bezüglich des Skalarprodukts
$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$
   paarweise zueinander orthogonal sind! Ein CAS zum Integrieren ist erlaubt!
   (ii) Normieren Sie die 5 Funktionen so, dass daraus eine ON-Basis von V wird!

9. Sei W der Vektorraum aller komplexen Linearkombinationen der Funktionen $[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $u_k(x) := e^{i\,k\,x}$ für $k = -2, -1, 0, 1, 2$.
   (i) Zeigen Sie, dass diese 5 Funktionen bezüglich des Skalarprodukts
$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$
   paarweise zueinander orthogonal sind!
   (ii) Normieren Sie die 5 Funktionen so, dass daraus eine ON-Basis von W wird!

10. Die reellwertigen Funktionen r_k und s_k von Aufgabe 8 können auch als Elemente des unitären Vektorraums W von Aufgabe 9 aufgefasst werden. Schreiben Sie sie als Linearkombinationen der u_k an!