Universität Wien, WS 2018/19

Analysis für PhysikerInnen I

Einige Multiple-Choice-Fragen zur Orientierung

1. [Typ 1 aus 4] Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe. Welche der folgenden Aussagen impliziert, dass auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert?
   (a) [false] Es gilt $\lim_{n\to}(b_n - a_n) = 0$.
   (b) [false] Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n < b_n$.
   (c) [true] Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq |b_n|$.
   (d) [false] Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| \geq |b_n|$ für alle $n \geq N$.

2. [Typ 2 aus 4] Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$
   (a) [false] besitzt in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle.
   (b) [true] besitzt in $[a, b]$ einen Fixpunkt.
   (c) [false] ist bijektiv.
   (d) [true] ist gleichmäßig stetig.

3. [Typ 2 aus 4] Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar,
   (a) [true] wenn die Funktion $\psi : \mathbb{R}\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ an der Stelle x_0 stetig fortsetzbar ist.
   (b) [false] wenn $\lim_{x\to x_0} f(x_0)$ existiert.
   (c) [false] wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$ und $f(x) = f(x_0) + c\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   (d) [true] wenn $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

4. [Typ 2 aus 4] Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

   (a) [false] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + 1}{x} = +\infty$

   (b) [true] $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\,\sin(x)}{(x+1)^2} = 0$

   (c) [true] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}}{x^4} = +\infty$

   (d) [false] $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - 3\,e^{-x}}{1+x} = 0$

5. [Typ 2 aus 4] Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

   (a) [false] $\sin(x+\pi) = \cos(x)$

   (b) [true] $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

   (c) [false] $\cos(x-\pi) = -\sin(x)$

   (d) [true] $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$

6. [Typ 2 aus 4] Für jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wird $\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ definiert. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

   (a) [false] $\overline{f}$ ist ein Funktionswert von f.

   (b) [true] Ist f stetig, so ist $\overline{f}$ ein Funktionswert von f.

   (c) [true] Ist f stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $\overline{f} = f(\xi)$.

   (d) [false] Es existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit $\overline{f} = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$.

7. [Typ 1 aus 4] Die Taylorreihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x^2)$ um 0

   (a) [false] konvergiert nur für alle $x \in [0,\infty[$.

   (b) [false] konvergiert nur für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

   (c) [true] konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (d) [false] konvergiert nur für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < (2\pi)^2$.