Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 13

1. Finden Sie ein möglichst elegantes Argument, um
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$$
zu begründen! (Nutzen Sie dabei aus, dass $\sin$ und $\cos$ nur „verschobene" Varianten voneinander sind!)

2. Betrachten Sie die Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto C\,\sin^2(\omega\,t)$, wobei C und ω positive Konstanten sind. Weiters sei T die kleinste Periode von P. Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{P}$ der Funktion P im Intervall $[0,T]$!

   Wo tritt diese Berechnung in der Physik bzw. in der Technik auf?

3. Berechnen Sie: $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx$.

4. Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$ durch Substitution $x = \sqrt{1-t^2}$!

   (Sie können $0 < x < 1$ und $0 < t < 1$ voraussetzen.)

5. Berechnen Sie: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

6. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ für $n \in \mathbb{N}$!

   Tipps: Ein nützlicher Trick besteht darin, zuerst $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\,dx$ zu berechnen, dann n mal nach k zu differenzieren und zuletzt $k = 1$ zu setzen. Eine andere Methode besteht darin, n mal partiell zu integrieren.

7. Zeigen sie, dass das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1}\,d\nu$ konvergiert!

   Tipp: Zerlegen Sie das Integral in eine Summe $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ und argumentieren Sie für beide Anteile getrennt! Zeigen und benutzen Sie: Für genügend kleine ν ist der Integrand ≤ 1, für genügend große ν ist er $\leq 2\nu^3 e^{-\nu}$.

   Anmerkung: Dieses Integral tritt bei der Berechnung der gesamten Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers mit Hilfe des Planckschen Strahlungsgesetzes auf. Es kann übrigens exakt berechnet werden: Sein Wert ist $\dfrac{\pi^4}{15}$.

8. Wird der Graph einer im Intervall D definierten Funktion f um die x-Achse gedreht, so entsteht die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Dessen Volumen ist durch

$$V = \pi \int_D f(x)^2 \, dx$$

gegeben, der Flächeninhalt der Mantelfläche beträgt

$$A = 2\pi \int_D f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx \, .$$

Nun betrachten Sie den vom Graphen der Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ erzeugten (unendlich langen) Rotationskörper!

   (i) Ist sein Volumen endlich oder unendlich? Falls es endlich ist, berechnen Sie es!

   (ii) Ist der Inhalt seiner Mantelfläche endlich oder unendlich? Falls er endlich ist, berechnen Sie ihn!

   Die beiden Fragen könnte man in humoristisch angehauchter Form auch so stellen: (i) Wieviel Flüssigkeit passt in ihn hinein? (ii) Wieviel Farbe braucht man, um ihn anzustreichen?

9. Untersuchen Sie, ob die Folge der Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n\,x)}{n\,x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

   (i) punktweise konvergiert (und wenn, wogegen).

   (ii) gleichmäßig konvergiert.

Hier noch einige (freiwillige) Aufgaben zu Themen der Vorlesung, für die am Ende des Semesters keine Übungstermine mehr zur Verfügung stehen:

- Aufgabe 6.1 im Buch.

- Drücken Sie mit Hilfe des Landau-Symbols O das Verhalten von $\cos^2(x) - e^{-x}$ für $|x| \ll 1$ bis zur dritten Ordnung in x aus!

  Lösung:

$$\cos^2(x) - e^{-x} = x - \frac{3\,x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

- Drücken Sie mit Hilfe des Landau-Symbols O das Verhalten von $\dfrac{x}{x^2+1}$ für $x \to \infty$ bis zur dritten Ordnung in $\dfrac{1}{x}$ aus!

  Lösung:

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

- Berechnen Sie mit *Mathematica* die Ableitung des zwanzigsten Tayorpolynom um 0 der Tangensfunktion und vergleichen Sie mit dem neunzehnten Taylorpolynom von $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$!

  Eingabe:

```
pol = Series[Tan[x],{x,0,20}]
D[pol,x]
Series[1/Cos[x]^2,{x,0,19}]
```

- Zeichnen Sie den Graphen der periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} t & \text{falls } 0 \le t < \pi \\[2ex] 0 & \text{falls } \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

  und entwickeln Sie sie in eine Fourierreihe!

  Lösung:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi\, n^2} \cos(n\,x) - \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\,x) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi\,(2k+1)^2} \cos((2k+1)\,x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\,x)$$

(außer an den Sprungstellen).

- Entwickeln Sie die im Intervall $(-\pi, \pi]$ durch $x \mapsto x^2$ definierte und auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzte Funktion in eine Fourierreihe! Werten Sie sie an der Stelle π aus, um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

  zu beweisen!

  Lösung:

Wird die gegebene Funktion mit f bezeichnet, so ist

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\,x),$$

daher $\pi^2 = f(\pi) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und somit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.