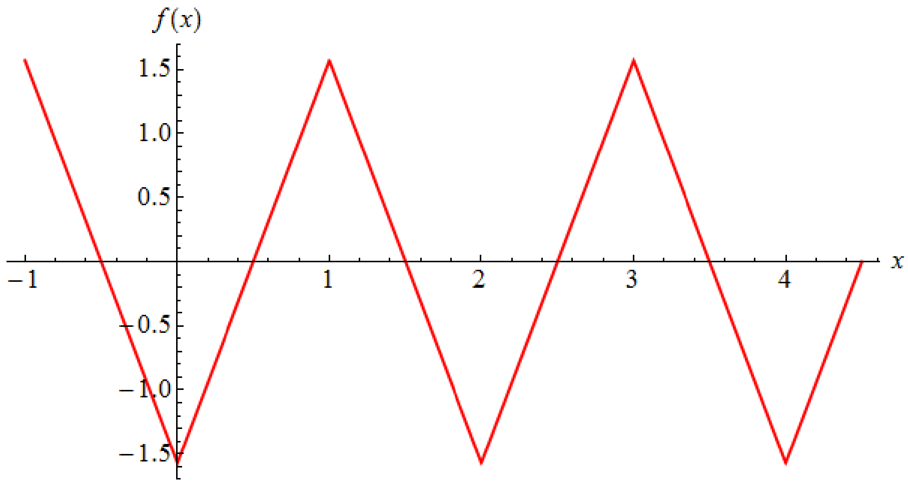
Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

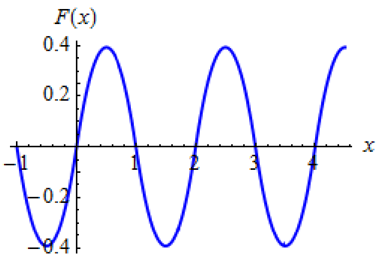
Übungstermin 12

1. Die erste der vier Abbildungen zeigt den Graphen einer Funktion f. Eine der darunter stehenden Abbildungen zeigt den Graphen der durch

$$F(x) := \int_{-1}^{x} f(t)\, dt$$

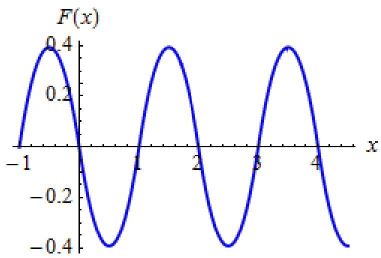
definierten Funktion F. Welche? Begründen Sie!





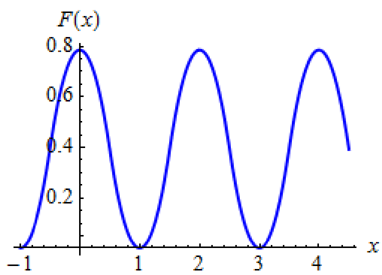
A

☐



B

☐



C

☐

2. Die differenzierbare Funktion s beschreibe eine Bewegung ($s(t)$ = Ort zum Zeitpunkt t). Zeigen Sie, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ gleich dem Mittelwert $\overline{v}$ der Geschwindigkeitsfunktion $v = \dot{s}$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ ist!

3. Eine Situation, die es erlaubt, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung intuitiv zu erfassen, ist die Badewanne, in die Wasser mit einer zeitlich veränderlichen Zuflussrate fließt:

   - Im Rahmen der Differentialrechnung wird festgehalten: Die Zuflussrate (gemessen in Liter pro Sekunde) ist die momentane Änderungsrate der in der Badewanne enthaltenen (in Liter gemessenen) Wassermenge.
   - Im Rahmen der Integralrechnung wird festgestellt: Da die Zuflussrate angibt, wieviel Wasser zu einem gegebenen Zeitpunkt pro Sekunde zufließt, ist das bestimmte Integral über die Zuflussrate in einem Zeitintervall $[a, b]$ gleich der in diesem Zeitintervall insgesamt zugeflossenen Wassermenge.
   - Also:
   $$\text{Zuflussrate}(t) = \frac{d}{dt}\,\text{Wassermenge}(t)$$
   und umgekehrt
   $$\int\limits_a^b \text{Zuflussrate}(t)\,\cdot\,dt = \text{Wassermenge}(t)\,\Big|_a^b\,.$$

   Denken Sie sich eine andere Situation aus, die es in ähnlicher Weise erlaubt, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung intuitiv zu erfassen!

4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

   (i) $\displaystyle\int \big(8\,x^3 - 3\,x^2 - 7\,x + 5\big)\;dx$

   (ii) $\displaystyle\int \big(\cos(x) + 4\,e^x\big)\,dx$

   (iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$

5. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

   (i) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \big(-2\,x^3 + 3\,x^2 - 5\,x + 7\big)\;dx$

   (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(e^x - 3\,\sin(x)\big)\,dx$

   (iii) $\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{\cos^2(x)}$ (für welche t existiert dieses Integral?)

   (iv) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt[3]{x^2}\,dx$

   (v) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

6. Berechnen Sie mittels partieller Integration:

   (i) $\displaystyle\int x\,\sin(x)\,dx$

   (ii) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx$

   (iii) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,dx$ (für eine andere Methode siehe Beispiel 5.4.8.)

7. Berechnen Sie $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx$ mittels partieller Integration!

8. Berechnen Sie $\displaystyle\int e^x\,\sin(x)\,dx$ mittels partieller Integration!

9. Berechnen Sie $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx$ mittels partieller Integration!

10. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse der Aufgaben 4 – 9 mit *Mathematica*!

    Die Syntax für unbestimmte Integrale ist:

    ```
    Integrate[f[x],x]
    ```

    Die Syntax für bestimmte Integrale ist:

    ```
    Integrate[f[x],{x,a,b}]
    ```

    Um ein bestimmtes Integral numerisch näherungsweise zu berechnen, ersetzen Sie `Integrate` durch `NIntegrate`.