Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 11

1. Untersuchen Sie die Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2\,(\ln(x) - 1)$ nach allen Regeln der Kunst! (Grenzwert am Rand, Nullstellen, Extrema, Wendestellen, Monotonie- und Krümmungseigenschaften)

2. Die Nullstellen der Sinusfunktion sind alle Zahlen der Form πn mit $n \in \mathbb{Z}$. Geben Sie in analoger Weise an:

   (i) die Nullstellen der Cosinusfunktion.
   (ii) die lokalen Maximumstellen der Sinusfunktion.
   (iii) die lokalen Minimumstellen der Sinusfunktion.
   (iv) die lokalen Extremstellen der Sinusfunktion.

3. Für $a < b$ berechnen Sie $\int\limits_a^b x\,dx$ als Grenzwert einer Folge Riemannscher Summen!

   Tipp: Zerlegen Sie das Intervall $[a, b]$ in r gleich große Teilintervalle mit Zerlegungsstellen $a = x_0, x_1, \ldots, x_r = b$, wählen Sie $\xi_k = x_k$, berechnen Sie den Wert der entsprechenden Riemannschen Summe (wobei Sie das Ergebnis einer Aufgabe vom Übungstermin 4 verwenden können) und führen Sie den Grenzübergang $r \to \infty$ durch!

4. Für die Fälle

   (i) $0 < a < b$
   (ii) $a < 0 < b$
   (iii) $a < b < 0$

   berechnen Sie $\int\limits_a^b x\,dx$ als „orientierter Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse“ auf elementare Weise, d.h. *ohne* die Methoden der Analysis zu benutzen!

5. Stellen Sie eine Formel für π als Grenzwert einer Folge Riemannscher Summen auf!

   Tipp: Wählen Sie eine Funktion, deren Graph ein Halb- oder Viertelkreis ist, drücken Sie den Flächeninhalt unter diesem Graphen durch ein Integral aus und geben Sie für dieses eine Riemannsche Summe mit r Teilintervallen an! Testen Sie Ihre Formel mit einem geeigneten Computerwerkzeug! Wie groß müssen Sie r wählen, um π mit einer Genauigkeit von 1% zu erhalten?

6. Für eine im Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion f definiert man den *Mittelwert*

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(Den Überstrich bitte nicht mit dem Komplex-konjugieren verwechseln!) Da jede Riemann-integrierbare Funktion beschränkt ist, existieren $\inf(f) = \inf(\{f(x)\,|\,x \in [a,b]\})$ und $\sup(f) = \sup(\{f(x)\,|\,x \in [a,b]\})$. Zeigen Sie:

$$\inf(f) \leq \overline{f} \leq \sup(f).$$

7. Geben Sie eine im Intervall $[0,1]$ Riemann-integrierbare Funktion f an, für die $\overline{f}$ kein Funktionswert ist!

   Ist die Existenz einer solchen Funktion ein Widerspruch zu Satz 5.2.1? Fehler im Buch?

8. Zeigen Sie, dass für jede im Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion f die *Dreiecksungleichung für Integrale* gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx.$$

   Tipp: Benutzen Sie den Umstand, dass mit f auch die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ integrierbar ist und den Hilfssatz 5.1.5!

9. Bestimmen Sie, *ohne* etwas zu rechnen, nur auf Basis des Integrals als „orientierter Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse" und der Eigenschaften der Graphen der Integranden:

   (i) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x}{2+\cos^2(x)}\,dx$

   (ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$

   (iii) $\displaystyle\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\int_0^L \big(2+\sin(x)\big)\,dx$

   (iv) das Vorzeichen von $\displaystyle\int_{-4}^{5} \big(e^x - x - 1\big)\,dx$

   (v) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$

   (vi) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$