Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 10

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$$e^x = \frac{1}{2}\,, \qquad 3^x = 8\,, \qquad 5^{x-1} - 2 \cdot 3^x = 0\,, \qquad 2^{x^2-1} = 3^x.$$

(Geben Sie die Lösungen in exakter Form und näherungsweise in Dezimaldarstellung an!)

2. Beweisen Sie: Die Eulersche Zahl e ist die (einzige) Maximumstelle der Funktion

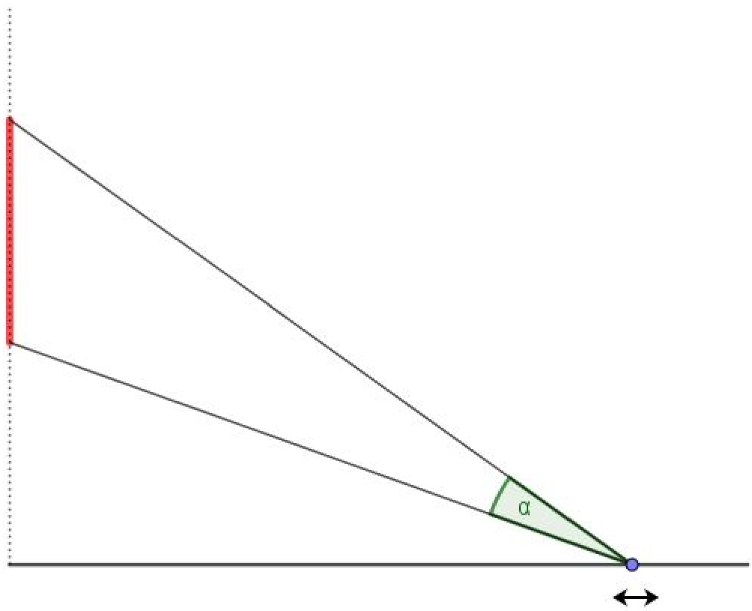
$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto x^{1/x}. \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie:

   (i) $\dot{s}(t)$ und $\ddot{s}(t)$ mit $s(t) = A\,\sin(\omega\,t + \delta)$, wobei $A > 0$, $\omega > 0$ und $\delta \in \mathbb{R}$ beliebig (tritt bei der Untersuchung von Schwingungen auf)

   (ii) $\dfrac{d}{dx}\,\sin(\cos(x))\,, \qquad \dfrac{d}{dx}\,\sin(\ln|x|)$ (für $x \neq 0$)$\,, \qquad \dfrac{d}{dx}\,\cos(e^{x^2}).$

4. In welcher Entfernung von einem Gebäude sieht man ein Fenster unter dem größten Winkel (siehe Abbildung)? Das Problem wurde im 15. Jahrhundert von Regiomontanus



mit Mitteln der elementaren Geometrie gelöst. Lösen Sie es unter Zuhilfenahme von Winkelfunktionen mit Methoden der Analysis!

5. Die Polarkoordinaten (r, φ) eines durch kartesische Koordinaten $(x, y) \neq (0, 0)$ angegebenen Punktes sind durch

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos(\varphi) \\ y &= r\,\sin(\varphi) \end{aligned}$$

definiert, wobei $r \geq 0$ eindeutig bestimmt ist und φ bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt ist. Geben Sie Formeln an, mit deren Hilfe man r und φ berechnen kann!

6. Berechnen Sie, sofern als eigentlicher oder uneigentlicher Grenzwert existent:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} x \, \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to \pi/2} \operatorname{tg}(x).$$

7. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z) &= -\frac{i}{2}\left(e^{i\,z} - e^{-i\,z}\right) \\ \cos(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{i\,z} + e^{-i\,z}\right) \end{aligned}$$

8. Beweisen Sie das Additionstheorem

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\,\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{C}$$

   (i) mit Hilfe der in Aufgabe 7 gezeigten Beziehungen.
   (ii) indem Sie $x = 2u$ und $y = 2v$ setzen und die aus der Vorlesung bereits bekannten Eigenschaften der Winkelfunktionen (Satz 4.3.2, Beispiel 4.3.4 und die Beziehung Hilfssatz 4.3.6 (2), die auch für $x \in \mathbb{C}$ gilt) verwenden, um die linke und die rechte Seite durch Sinus von Cosinus von u und v auszudrücken und zu vergleichen.

9. Plotten Sie den Graphen der Funktion $x \mapsto \sin(9\,x) + \sin(10\,x)$ und erklären Sie sein Aussehen

   (i) mit Hilfe des in Aufgabe 8 gezeigten Additionstheorems.
   (ii) elementar, indem Sie verfolgen, wie die Werte der Summe der Funktionen $x \mapsto \sin(9\,x)$ und $x \mapsto \sin(10\,x)$ (deren Graphen Sie ebenfalls plotten) zustande kommen, wenn x, ausgehend von 0, bis 2π wächst.

   Wenn x die Zeit bedeutet: Wie nennt man ein solches Phänomen in der Akustik?

10. Zeigen Sie:

   (i) $\sinh' = \cosh$
   (ii) $\cosh' = \sinh$
   (iii) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

11. Seien $b, c \in \mathbb{R}$ und $b > 0$. Der Graph einer Funktion vom Typ

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(x) = b \cosh\left(\frac{x}{b}\right) + c$$

heißt „Kettenlinie“, da er (auf ein geeignetes Invervall eingeschränkt) die Form eines dünnen, durchhängenden Seils beschreibt. Zeigen Sie, dass y die Differentialgleichung

$$(y - c)\, y'' - y'^{\,2} = 1$$

erfüllt!