Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 9

1. Berechnen und vereinfachen Sie:

   (i) $N'(t)$ mit $N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}$, wobei $N_0 > 0$ und $\lambda > 0$
   (tritt bei der Untersuchung des radioaktiven Zerfalls auf)

   (ii) $\dfrac{d}{dr} \left(r^n \, e^{-a\,r} \right)$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$
   (tritt bei der Untersuchung des Wasserstoffatoms auf)

   (iii) $\dfrac{d}{dx} \left(x^n \, e^{-a\,x^2} \right)$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$
   (tritt bei der quantenmechanischen Untersuchung von Schwingungen auf)

2. Berechnen und vereinfachen Sie:

   (i) $\dfrac{d}{dt} \left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} \, e^{-a/t} \right)$ mit $a > 0$, für $t > 0$
   (tritt bei der Untersuchung der Wärmeleitung auf)

   (ii) $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ mit $x(t) = \ln \left(t + \sqrt{t^2 + k} \right)$, wobei $k > 0$
   (tritt bei der relativistischen Teilchenbewegung auf)

3. Berechnen Sie, sofern als eigentlicher oder uneigentlicher Grenzwert existent:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} e^{1/x}, \qquad \lim_{x \to 0} e^{-1/x^2}, \qquad \lim_{x \to \infty} \exp \left(\frac{4\,x^2 + x - 7}{2\,x^2 + 3} \right).$$

4. Berechnen Sie, sofern als eigentlicher oder uneigentlicher Grenzwert existent:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x), \qquad \lim_{x \to 1} \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \, \ln(x), \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}.$$

5. Bestimmen Sie die lokalen Maxima der Funktionen $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n \, e^{-x}$ für $n \in \mathbb{N}$!

   Plotten Sie mit einem Computerwerkzeug Ihrer Wahl die Graphen von f_1, f_2 und f_3 und markieren Sie die Maximumstellen und die zugehörigen Hochpunkte!

6. Zeigen Sie: $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Machen Sie eine Skizze, die diese Eigenschaft illustriert!

   Tipp: Untersuchen Sie die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - 1 - x$ auf lokale Extrema!

7. Zeigen Sie: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   Tipp: Benutzen Sie den in Aufgabe 6 gezeigten Sachverhalt in der Form

   $e^x \geq 1 + x$ für alle $x > 0$
   $e^{-z} \geq 1 - z$ für alle $z > 0$.

   Für $n \in \mathbb{N}$ setzen Sie $x = \dfrac{1}{n}$ und $z = \dfrac{1}{n+1}$, formen die obigen Umgleichungen um zu

   $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

   und erhalten

   $$1 \leq \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1+\frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   Wie geht's weiter?

8. Schreiben Sie als Potenzreihe um 0 in geschlossener Form und durch Angabe der jeweils ersten fünf nichtverschwindenden Glieder an:

   (i) $\exp(z-3)$
   (ii) $\exp(z^2)$
   (iii) $z\,\exp(2\,z)$

9. Schreiben Sie als Potenzreihe um 0 in geschlossener Form und durch Angabe der ersten fünf nichtverschwindenden Glieder an:

   $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\left(\exp\left(\dfrac{z}{2}\right)-1\right) & \text{falls } z \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

   Tipp: Betrachten Sie zuerst nur den Funktionsterm für den Fall $z \neq 0$. Aus dem Ergebnis ergibt sich der Wert für $z = 0$ automatisch so, dass $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist.

10. e^x wächst sehr schnell, e^{-x} fällt sehr schnell ab, $\ln(x)$ wächst sehr langsam:

    (i) Sie wollen den Graphen der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ für $x \geq 0$ zeichnen und haben ein Blatt der Breite $1\,\mathrm{m}$. Als Einheit verwenden Sie $1\,\mathrm{cm}$. Wie hoch muss ihr Blatt sein, damit der Graph darauf Platz hat?

    (ii) Sie wollen den Graphen der Funktion $x \mapsto e^{-x}$ für $x \geq 0$ zeichnen und haben ein Blatt der Breite $1\,\mathrm{m}$ und der Höhe $1\,\mathrm{cm}$. Als Einheit verwenden Sie $1\,\mathrm{cm}$. Wie weit ist der Graph am rechten Ende des Blatts von der x-Achse entfernt?

    (iii) Sie wollen den Graphen des natürlichen Logarithmus $x \mapsto \ln(x)$ für $x \geq 1$ zeichnen und haben ein Blatt der Breite 150 Millionen km ($=$ Entfernung Sonne-Erde). Als Einheit verwenden Sie $1\,\mathrm{cm}$. Wie hoch muss ihr Blatt sein, damit der Graph darauf Platz hat?