Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 8

1. Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $h : D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^4 - 3}{x}$ auf ganz D positiv ist!

   Was schließen Sie daraus über das Monotonieverhalten von h?

2. Von einer differenzierbaren Funktion $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ kennt man einige Daten:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	-3	> 0
1	unbekannt	1
2	unbekannt	0
3	unbekannt	< 0
4	-3	0
5	≤ -3	< 0

   Außerdem ist bekannt, dass die Gleichung $f'(x) = 0$ nur die in der Tabelle angegebenen Lösungen besitzt.

   Was lässt sich aus diesen Daten mit Sicherheit über lokale Extremstellen, Randextremstellen und globale Extremstellen von f schließen? Könnte f Nullstellen besitzen? Falls ja – wo und wie viele? Argumentieren Sie mathematisch streng! Geben Sie an, auf Basis welcher grundlegenden Aussagen der Analysis Sie Ihre jeweiligen Schlüsse ziehen!

3. Ein senkrecht nach oben geschossener Körper befindet sich zum Zeitpunkt t in der Höhe $h(t) = z_0 + v_0\, t - \dfrac{g}{2}\, t^2$. ($h_0 =$ Anfangshöhe, $0 < v_0 =$ Anfangsgeschwindigkeit, $0 < g =$ Erdbeschleunigung.) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem er seine maximale Höhe erreicht,

   (i) mit Hilfe der Differentialrechnung
   (ii) *ohne* Differentialrechnung, durch geeignete Umformung des Funktionsterms

   und geben sie die diese maximale Höhe an!

4. Welche Abmessungen (Radius, Höhe, Verhältnis Höhe zu Radius) hat

   (i) eine zylindrische Dose mit gegebener Oberfläche A und maximalem Volumen?
   (ii) eine zylindrische Dose mit gegebenem Volumen V und minimaler Oberfläche?

5. Berechnen Sie unter Anwendung der Regel von de l'Hospital die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{3\,x^2} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,.$$

Gewinnen Sie aus dem Ergebnis der ersten Rechnung eine Näherungsformel für $\sqrt{1+x}$, die für $|x| \ll 1$ anwendbar ist, und für die man keine Wurzel ziehen muss! (Kommt sie Ihnen bekannt vor?)

6. Kann man die Regel von de l'Hospital so anwenden?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{2} = 1.$$

7. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$. Zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und geben Sie einen Funktionsterm für sie an! Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1}

   (i) durch direkte Differenziation des Funktionsterms für f^{-1}.
   (ii) mittels Satz 3.3.5.

   Die Terme, die sie für $(f^{-1})'$ mit den Methoden (i) und (ii) erhalten, werden sich vielleicht unterscheiden. In diesem Fall checken Sie durch plotten der Graphen, dass sie dieselbe Funktion darstellen!

8. Untersuchen Sie, ob die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - \dfrac{1}{x}$ eine Umkehrfunktion besitzt!

   Zusatzfrage: Warum ist bei dieser Aufgabe nicht verlangt, einen geschlossenen Term für die Umkehrfunktion anzugeben?

9. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\,x^2-5\,x+1}{3\,x^2+7}$$

   (i) durch geeignete Umformung des Funktionsterms und Ausnutzen, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ gilt.
   (ii) unter Anwendung der Regel von de l'Hospital.

10. Sei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

   Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbb{R}$ und $c > 0$, so folgt $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x) = +\infty$.

   Wie lauten entsprechende Regeln, wenn $a = \infty$, $a = -\infty$ und/oder $c < 0$?

   Gibt es eine entsprechende Regel für den Fall $c = 0$?

11. Berechnen Sie, sofern als eigentlicher oder uneigentlicher Grenzwert existent:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2-4}\,, \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x+3}{x^2-4}\,, \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x+3}{x^2-4}\,.$$