Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 7

1. Berechnen Sie

   (i) $\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{1}{(x^3-1)^2}$

   (ii) $\dfrac{d^2}{dt^2}\,\dfrac{t}{2\,t+1}$

   (iii) $\dfrac{d^3}{du^3}\,\dfrac{u^2+1}{u}$

2. Stellen Sie eine Formel für die n-te Ableitung der Funktion $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ auf!

3. Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

   (i) Falls f gerade ist, ist f' ungerade. Was folgt daraus für $f'(0)$?
   (ii) Falls f ungerade ist, ist f' gerade.

   Geben Sie für beide Fälle ein Beispiel an und überprüfen Sie!

4. Zeigen Sie, dass eine reelle Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 3 durch $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ und $f'''(0)$ (zusammengefasst in der Form $f^{(n)}(0)$ für $n = 0, 1, 2, 3$) eindeutig bestimmt ist! Setzen Sie dazu

   $$f(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 \qquad \text{mit } a_n \in \mathbb{R} \tag{1}$$

   an und drücken Sie die Koeffizienten a_n durch die $f^{(n)}(0)$ aus! Setzen Sie die Ergebnisse in (1) ein, um auch den Funktionsterm $f(x)$ durch die $f^{(n)}(0)$ auszudrücken!

   Anmerkung: Analoges funktioniert für Polynomfunktionen beliebigen Grades.

5. Besitzt die Betragsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

   (i) lokale Extrema?
   (ii) isolierte lokale Extrema?

   Wenn ja, ermitteln Sie sie! Wenn nein, begründen Sie!

6. Die Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - 5\,x^3 + 9x^2 - 7x + 3$ an der Stelle 1 ist gleich 0. (Rechnen Sie nach!) Was schließen Sie daraus hinsichtlich der Frage, ob h an der Stelle 1 ein lokales Extremum besitzt?

7. Für die Funktion $g : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x$ geben Sie eine Stelle ξ gemäß dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 3.2.4) an!

8. *Section control!* Die Bewegung eines Fahrzeugs auf einer Straße wird durch eine differenzierbare Funktion $t \mapsto s(t)$ modelliert (t = Zeit, s = Ort, ausgedrückt durch den Kilometerstand). Bei Kilometerstand 123.75 beginn ein Tunnel, bei Kilometerstand 126.75 endet er. Das Fahrzeug fährt um $14\!:\!25\!:\!18$ Uhr in den Tunnel und kommt um $14\!:\!27\!:\!18$ wieder heraus. Was besagt der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung für diese Situation?

9. Eines der einfachsten Modelle der klassischen Mechanik zur Beschreibung der Bewegung eines Punktteilchens mit Masse m in einer Dimension sieht so aus: Es sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $x(t)$ der Ort des Teilchens zum Zeitpunkt t. Die Ableitung nach der Zeit wird in der Regel durch einen Punkt gekennzeichnet, d.h. statt $x'(t)$ und $x''(t)$ schreiben wir $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$. Weiters sei eine differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben (die potentielle Energie, kurz auch „Potential" genannt). Die auf das Teilchen wirkende Kraft, wenn es sich am Ort $\xi \in \mathbb{R}$ befindet, ist durch $F(\xi) = -V'(\xi)$ gegeben. Die Funktion x genüge der Differentialgleichung (zweites Newtonsches Axiom)
$$m\,\ddot{x}(t) = F(x(t)).$$
Zeigen Sie, dass die Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$E(t) = \frac{m}{2}\,\dot{x}(t)^2 + V(x(t))$$
konstant ist! Wie interpretieren Sie diesen Sachverhalt?

10. Die Bewegung eines Teilchens im Raum werde durch
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\,t + 2 \\ 4\,t - 7 \\ -5t^2 + 2\,t - 1 \end{pmatrix}$$
beschrieben, d.h. zum Zeitpunkt t befindet sich das Teilchen am Punkt $\vec{x}(t)$. Berechnen Sie die komponentenweisen Ableitungen $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\ddot{\vec{x}}(t)$! Wie interpretieren Sie sie physikalisch?