Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 6

1. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ und die Stelle $x_0 = 1$ geben Sie an

   (i) die Funktion q („Differenzenquotientenfunktion“), die in Satz 3.1.2 auftritt,
   (ii) die Zahl c und die Funktion φ, die im Hilfssatz 3.1.3 auftreten
   (iii) und die Zahl c und die Funktion ψ, die im Hilfssatz 3.1.4 auftreten.

2. Untersuchen Sie, ob die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$u(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < 1 \\ -x^2 + 4\,x - 2 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

   (i) stetig
   (ii) differenzierbar
   (iii) stetig differenzierbar
   (iv) zweimal differenzierbar
   (v) zweimal stetig differenzierbar

   ist!

3. Untersuchen Sie, ob die Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2|x|$

   (i) stetig
   (ii) differenzierbar
   (iii) stetig differenzierbar
   (iv) zweimal differenzierbar
   (v) zweimal stetig differenzierbar

   ist!

4. Zeigen Sie $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (für $x > 0$) direkt mit Hilfe der Definition 3.1.1!

   Diese Kurzschreibweise ist natürlich so zu verstehen: Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ an einer beliebigen Stelle $x_0 > 0$ gleich $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ist!

   Tipp: Erinnern Sie sich an einen „Trick“ im Zusammenhang mit Wurzeln, der schon beim Übungstermin 3 geholfen hat!

5. An welchen Stellen ist die Funktion $v : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ differenzierbar, an welchen nicht? Skizzieren Sie ihren Graphen (um welche Art von Kurve handelt es sich dabei?), um die Situation besser zu verstehen!

6. Ist f eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion, so ist ihre *Tangentenfunktion* an der Stelle x_0 jene Funktion $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist. Ermitteln Sie die Tangentenfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - 2x$ an der Stelle $x_0 = 1$! Machen Sie eine Skizze der Situation!

7. Ermitteln Sie die Tangente an die Parabel $y = x^2$ im Punkt $(3, 9)$

   (i) durch Berechnung der Tangentenfunktion (siehe Aufgabe 6).

   (ii) *ohne* Differentialrechnung, indem Sie unter allen nicht zur y-Achse parallelen Geraden durch den Punkt $(3, 9)$ jene bestimmen, die nur einen einzigen Punkt mit der Parabel gemeinsam hat.

8. Der Differenzenquotient einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[x_0, x]$, oft geschrieben in der Form $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ mit $\Delta x = x - x_0$ und $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, kann, sofern $|\Delta x|$ klein ist, als Näherungswert der Ableitung $f'(x_0)$ verstanden werden. Daraus folgt umgekehrt, dass kleine Änderungen des Funktionswerts bei kleinen Änderungen des Arguments durch $\Delta f \approx f'(x_0)\,\Delta x$ approximiert werden können.

   Benutzen Sie diese Methode:

   (i) Wie ändert sich $f(x) = x^2$ näherungsweise, wenn x von 1 auf $1 + z$ (für $|z| \ll 1$) geändert wird? Vergleichen Sie mit der exakten Änderung!

   (ii) Geben Sie eine Formel an, die $\sqrt{1+z}$ für $|z| \ll 1$ approximiert!

   (ii) Geben Sie eine Formel an, die $\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}$ für $|z| \ll 1$ approximiert!

9. Geben Sie eine Formel an, die $E(v) = \dfrac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ für $|v| \ll c$ approximiert! (m und c sind positive Konstanten.)

   Diese Näherung wird in der Speziellen Relativitätstheorie benötigt.

10. Die Operation des Ableitens ist *linear*, d.h. die Ableitung einer Linearkombination, $(c_1 f_1 + c_2 f_2)'$, ist gleich der Linearkombination der Ableitungen, $c_1 f_1{}' + c_2 f_2{}'$. Das stiftet eine Beziehung zur linearen Algebra: Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}_2$ aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Ein solches Polynom p ist durch seine Koeffizienten eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen den aus seinen Koeffizienten gebildeten Vektor im $\mathbb{R}^3$ mit dem Symbol $[p]$ und identifizieren

$$p(X) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 \qquad \longleftrightarrow \qquad [p] = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

   Das Differenzieren in $\mathcal{P}_2$ kann in diesem Sinn als lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $[p] \mapsto [p']$ verstanden werden. Beschreiben Sie sie mit den Mitteln der linearen Algebra!