Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 5

1. Argumentieren sie (akribisch genau), dass die Funktion $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

   an der Stelle 0 unstetig ist!

2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Ist es korrekt, zu sagen, dass f an der Stelle 0 unstetig ist? Warum bzw. warum nicht?

3. Beweisen Sie mit Hilfe der Definition 2.1.1, dass die Wurzelfunktion

$$w : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \; w(x) = \sqrt{x}$$

   an jeder Stelle $a \geq 0$ stetig ist!

   Tipp: Für den Fall $a > 0$ wählen Sie $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$, für den Fall $a = 0$ wählen Sie $\delta = \varepsilon^2$.

4. Zeigen Sie mit Hilfe des in Satz 2.1.2 formulierten Kriteriums, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist!

5. Zeigen Sie, dass mit zwei stetigen Funktionen f und g (mit gleichem Definitionsbereich D) auch $f + g$, $f \cdot g$ und, sofern $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, auch $\dfrac{f}{g}$ stetig sind! (Im Buch wurde das in Satz 2.1.7 formuliert, aber nicht im Detail bewiesen.)

6. Formulieren Sie Satz 2.1.11 in Worten! Was sagt er unserer *Vorstellung* über den Begriff der Stetigkeit?

7. Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{falls } x \leq 1 \\ (x+1)^2 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

   Untersuchen Sie, ob $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ existiert, und – falls ja – berechnen Sie diesen Grenzwert!

   Skizzieren Sie den Graphen von g!

   Denken Sie sich einen physikalischen Kontext aus, in dem eine solche Funktion auftreten könnte!

8. Gegeben ist die Funktion $\phi : D = \mathbb{R}\backslash\{\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$.

   Gibt es eine stetige Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf D mit ϕ übereinstimmt? Falls ja, geben Sie sie an!

   (Eine solche Funktion ψ – falls es sie gibt – heißt *stetige Fortsetzung* von ϕ.)

9. Gegeben ist die Funktion $\sigma : D = \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

   Gibt es eine stetige Funktion $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf D mit σ übereinstimmt? Falls ja, geben Sie sie an!

10. Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^5 + 4x^3 - 2x + 1 = 0$$

   im Intervall $[-1, 1]$ zumindest eine Lösung besitzt!

   Machen Sie mit *Mathematica* einen numerischen Check, indem Sie

```
NSolve[x^5+4x^3-2x+1=0,x,Reals]
```

   ausführen! Sehen Sie sich den Graphen im Intervall $[-1, 1]$ an, indem Sie

```
Plot[x^5+4x^3-2x+1,{x,-1,1}]
```

   ausführen!

11. Alle im Folgenden angegebenen Funktionen sind stetig. Welche sind gleichmäßig stetig? (Plotten Sie die Graphen und argumentieren Sie auf der Basis eines qualitativen Verständnisses! Komplizierte Rechnungen/Beweise sind nicht nötig!)

   (i) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

   (ii) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   (iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^4$

   (iv) $j : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $j(x) = x^4$

   (v) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x\,\sin(x)$

   (vi) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

   (vii) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = e^{-x}$

   (viii) $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $s(x) = e^{-x}$