Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 4

1. Ein mit dem Quotientenkriterium verwandtes, in manchen Fällen sehr praktisches Konvergenzkriterium für Reihen lautet:

   Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle n ab einem Index m. (Mit anderen Worten: Es existiere ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq m$.) Wenn der Grenzwert
   $$c := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$
   existiert und $c < 1$ ist, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

   Beweisen Sie es! Benutzen Sie dazu die Form des Quotientenkriteriums, wie es im Buch nach Satz 1.5.13 (Seite 21, letzter Absatz) formuliert wird.

2. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

   (i) mit dem Quotientenkriterium, wie es im Buch formuliert ist.
   (ii) mit dem Kriterium von Aufgabe 1.

3. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche nicht? Begründen Sie!

   (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$

   (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$

   (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

   (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

   (v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-3n+2}{3n^2+5n-7}$

   (vi) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

4. Das Quotientenkriterium besitzt einen zweiten Teil, der im Buch nicht angegeben ist. Beweisen Sie:

   Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

5. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ mit Hilfe des folgenden Kriteriums:

   Wurzelkriterium (ohne Beweis): Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Wenn ein $q \in \mathbb{R}$ existiert mit $0 < q < 1$ und $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \in N$, $n \geq 2$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

6. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

7. Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$ und $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

8. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Beziehung

   $$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } z \neq 1.$$

   (Im Buch wurde sie im Zuge des Beweises von Satz 1.5.6 auf andere Weise hergeleitet.)

9. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die *Bernoullische Ungleichung*:

   $$(1+x)^n \;\geq\; 1 + nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x > -1.$$

10. Faktorisieren Sie das Polynom $p(X) = X^2 - 6\,X + 13$ über $\mathbb{C}$!

11. Man möchte das Polynom $q(X) = X^3 - 6\,X^2 + 11\,X - 6$ faktorisieren und bemerkt durch Probieren, dass $q(1) = 0$ gilt. Daher lässt sich ein Linearfaktor $X - 1$ „abspalten“, d.h. q ist von der Form

    $$q(X) = (X-1)\,h(X),$$

    wobei h ein Polynom vom Grad 2 ist. Bestimmen Sie h, indem Sie den Ansatz $h(X) = a_2\,X^2 + a_1\,X + a_0$ machen und Koeffizienten vergleichen! Faktorisieren Sie danach auch h und schreiben Sie q als Produkt von Linearfaktoren an!