Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 3

1. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n = \dfrac{3n}{n+1}$ auf Beschränktheit und Monotonie!

   (Tipp: Wenn Sie a_n geschickt umformen, müssen Sie überhaupt nichts rechnen!)

2. Beweisen Sie: Ist (a_n) eine beschränkte Folge und (b_n) eine Nullfolge, so ist (c_n) mit $c_n = a_n\, b_n$ eine Nullfolge.

3. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz! Für die konvergenten Folgen berechnen Sie den Genzwert!

   (i) $$\left(\frac{\sin(n) + \cos(n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

   (ii) $$\left(\frac{4n^2 - 1}{3n^2 + 2n + 1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

   (iii) $$\left(\frac{2n^2 + 3n\,(-1)^n + \sin(n)}{5n^2 - 7n + 1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

   (iv) $$\left(\frac{3n\,(-1)^n + \sin(n)}{5n - 7}\right)_{n=1}^{\infty}$$

   (v) $$\left(n + \frac{i}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

   (vi) $$\left(\frac{1}{4 + i\,n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

   (vii) $$\left(\frac{1}{n}\, e^{i\,n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

4. Gegeben ist die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $b_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$.

   Zeigen Sie, dass sie beschränkt ist, indem Sie eine untere und eine obere Schranke angeben!

   Visualisieren Sie die Folge mittels einer Skizze, indem Sie die b_n für $1 \le n \le 10$ als Markierungen auf der Zahlengeraden einzeichnen!

   Visualisieren Sie die Folge mittels einer Skizze, die für $1 \le n \le 10$ die Paare (n, b_n) als Punkte in der Zeichenebene zeigt!

   Geben Sie zwei konvergente Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten an!

5. Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$, wenn es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $N(M) \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n > M$ für alle $n \geq N(M)$. Man schreibt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. (Im Buch kommt das erst später, in Abschnitt 3.4.)

   Formulieren Sie diese Definition in Worten!

   Zeigen Sie: Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

6. Untersuchen Sie die Folge $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,\right)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz! Falls sie konvergent ist, berechnen Sie ihren Grenzwert!

   Tipp: Multiplizieren Sie $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\,\right)$ aus und merken Sie sich diesen „Trick"!

   Freiwillige Zusatzaufgabe: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$, markieren Sie die ersten paar Stellen $n \in \mathbb{N}$ auf der x-Achse, die zugehörigen Funktionswerte $\sqrt{n}$ und die Differenzen $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$! Was erkennt man ganz ohne Rechnung?

7. Machen Sie sich mit dem Computeralgebra-System *Mathematica* vertraut! (Sie können eine Studierendenlizenz um einen geringen Preis beziehen, und es ist auf allen vom ZID gewarteten PCs der Universität installiert.)

   Geben Sie folgende Befehle (direkt hintereinander innerhalb einer Zelle) in *Mathematica* ein und führen Sie sie aus:

   ```
   x[0] = 1;
   x[n_] := N[ (1/2) (x[n-1] + 2/x[n-1]) ,20]
   Table[x[n],{n,0,6}]//TableForm
   ```

   Was wird damit berechnet?