Universität Wien, WS 2018/19

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 2

1. Führen Sie die Division $22:7$ aus, um die Dezimaldarstellung von $\frac{22}{7}$ zu ermitteln! Argumentieren Sie anhand des Musters, das dabei auftritt, dass die Dezimaldarstellung jeder rationalen Zahl entweder abbricht oder periodisch ist!

2. Beweisen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \max(\{a,b\}) &= \frac{a+b+|b-a|}{2} \\ \min(\{a,b\}) &= \frac{a+b-|b-a|}{2}. \end{aligned}$$

3. Beweisen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung: Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a+b|.$$

4. Beweisen Sie, dass für beliebige nichtnegative reelle Zahlen x, y stets die Ungleichung

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

(geometrisches Mittel $\leq$ arithmetisches Mittel) erfüllt ist! Wann gilt die Gleichheit?

5. Lösen Sie die Ungleichung $(x-1)(x-2)^2 > 0$ über $\mathbb{R}$!

6. Untersuchen Sie die Menge

$$\left\{-\frac{1}{n^2}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

auf Existenz von Minimum, Infimum, Maximum und Supremum und geben Sie diese (sofern existent) an! Begründen Sie!

Anmerkung: Bei dieser Menge handelt es sich (bis auf einen konstanten positiven Faktor) um das Energiespektrum des Wasserstoffatoms in der nichtrelativistischen Näherung.

7. Für $z_1 = 1-2\,i$ und $z_2 = 3+5\,i$ berechnen Sie $\dfrac{z_1}{z_2}$!

8. Für $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ berechnen Sie $|z|$, $\overline{z}$, z^2, z^3 und $\dfrac{1}{z}$!
Skizzieren Sie alle diese Zahlen als Punkte oder Pfeile in der komplexen Ebene!

9. Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl der Form $e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ den Betrag 1 hat!

10. Schreiben Sie $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ in Polardarstellung $z = r\,e^{i\varphi}$ an!

    (Um φ zu ermitteln, erinnern Sie sich an die Winkelfunktionen! Eine Skizze ist hilfreich.)

    Berechnen Sie nun $|z|$, $\overline{z}$, z^2, z^3 und $\dfrac{1}{z}$ direkt mit Hilfe der Polardarstellung (und geben Sie die Ergebnisse in Polardarstellung an)! Zeichnen Sie in die Skizze, die Sie in Aufgabe 8 gemacht haben, die Polarwinkel aller dieser Zahlen ein!

11. Ein Punkt bewegt sich in der komplexen Zahlenebene. Zur Zeit t ist er durch

    $$z(t) = R\,e^{i\omega t}$$

    gegeben, wobei R und ω positive Konstanten sind. Beschreiben Sie seine Bewegung!

    Was ist die Bedeutung der Konstante ω?

    Welche Bedeutung hat die Konstante $\dfrac{2\pi}{\omega}$?

    (Tipp: Denken Sie *physikalisch*: Welche Dimensionen haben ω und $\dfrac{2\pi}{\omega}$, d.h. in welchen Einheiten gibt man sie an?)