

Ergänzungsskriptum

zur Lehrveranstaltung

Analysis für PhysikerInnen I

WS 2014/15

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik | Fakultät für Physik der Universität Wien

E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

WWW: <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>

Die nummerierten Kapitel- und Abschnittsbezeichnungen (1, 1.1,...) beziehen sich auf das Lehrbuch *Walter Strampp: Höhere Mathematik 2 – Analysis* (Kapiteln 1 – 7), das unter <http://ubdata.univie.ac.at/AC08983560> als eBook der Universitätsbibliothek zur Verfügung steht. Seitenzahlen beziehen sich auf die (derzeit letzte) 3. Auflage. Die mit Buchstaben bezeichneten Abschnitte (A, B,...) betreffen allgemeine Vorbemerkungen oder Themen, die im Lehrbuch nicht enthalten sind.

Vorbemerkung

Was sollen Sie in dieser Lehrveranstaltung lernen?

- In dieser Vorlesung (und den zugehörigen Übungen) sollen Sie die wichtigsten Grundbegriffe und allgemeinen Theoreme („Sätze“) der Analysis von Funktionen in einer reellen Variable kennen lernen.
- Weiters sollen Sie Funktionen und Funktionentypen, die in der Physik benötigt werden, kennen lernen und in der Lage sein, ihre Eigenschaften (auch unter Ausnutzung der im vorigen Punkt genannten allgemeinen Theoreme) zu erschließen.
- Insgesamt (und auch im Zusammenhang mit den den zuvor genannten Punkten) sollen Sie die wichtigsten Methoden und Argumentationstechniken der Analysis kennen und einigermaßen beherrschen.

Wie aus diesen Formulierungen hervorgeht, handelt es sich um ein ganzes Bündel vernetzter Kenntnisse und Kompetenzen, die Sie hier erwerben sollen. Sollten Sie zu jenen Menschen zählen, die sich nicht besonders für die Mathematik „an sich“ interessieren, so werden Sie spätestens dann belohnt werden, wenn Sie später im Studium bemerken, wie günstig sich eine solide mathematische Grundausbildung auf das Verständnis der Arbeitsweise und der Inhalte der Physik auswirkt.

Zum verwendeten Lehrbuch

Das Lehrbuch eignet sich im Großen und Ganzen gut für die Vorlesung und die im Bachelor-Curriculum beschriebenen Lernziele. Es ist knapp und flüssig geschrieben, vermeidet allzu dichte Symbol-Ansammlungen und enthält die wichtigsten mathematischen Sätze (Theoreme), in vielen Fällen mit Beweis oder Beweisidee. Es schürft nicht tiefer als für das Bachelorstudium Physik nötig, und zudem wird eine große Zahl von Beispielen und Übungsaufgaben ausführlich vorgeführt und gelöst.

An manchen Stellen sind Ergänzungen und vertiefende Bemerkungen (wie der Verweis auf alternative Definitionen, Bezeichnungen und Schreibweisen) angebracht. Alle derartigen Ergänzungen sind in diesem, die Vorlesung und die Verwendung des Buches begleitenden Skriptum aufgelistet.

Das Buch sollte sich also gut zum Vorlesen (empfohlen!), zum Nachlesen und zum Lernen für die Prüfung eignen. Nutzen Sie es auch beim Bearbeiten der Übungsaufgaben!

Beachten sie weiters:

- Nach jeder vorgeführten Übungsaufgabe wird im Buch ein dicker Punkt gemacht.
- Nach vollendeten Beweisen der Sätze fehlt leider eine eigene Kennzeichnung – fassen sie das als Herausforderung auf, selbst herauszufinden, wann genau ein Beweis endet!
- Die Sprache des Buchs ist in mathematischer Hinsicht an manchen Stellen etwas zu salopp (etwa wenn zwischen Funktionen und ihren Graphen nicht unterschieden wird). Auf manche dieser Nachlässigkeiten wird hier eigens hingewiesen, anderes wird in der Vorlesung zurechtgerückt.
- Die knappe Sprache des Buchs ist einerseits ein Vorteil, da es weniger Text zu lesen gibt als in den meisten anderen Lehrbüchern zum Thema Analysis. Dieser Umstand macht es aber andererseits nötig, den Text *genau* zu lesen!

Einige der in der Vorlesung behandelten Themen (wie die Grundbegriffe der Mengenlehre und die komplexen Zahlen) sind nicht im Buch enthalten. Im Folgenden finden Sie auch zu diesen Themen einige Hinweise.

A Logik

Am Beginn der Vorlesung werden einige immer wieder benötigte Sprech- und Schreibweisen, die die Formen mathematischer Argumentation betreffen, kurz zusammengestellt.

- Mathematik macht **Aussagen** und stellt Verbindungen zwischen Aussagen her. Oft beziehen sich mathematische Aussagen auf eine Vielzahl von Objekten, beispielsweise diese: „Ist eine natürliche Zahl durch 6 teilbar, so ist sie durch 2 teilbar“. Hier haben wir es mit einer **Implikation** zu tun, die noch dazu für unendlich viele Zahlen gilt. Wir formulieren sie auch gern so: Für jede natürliche Zahl n gilt

$$n \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar} \implies n \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar.}$$

Das Symbol \implies wird ausgesprochen als „daraus folgt“ oder „impliziert“.

- Wollen wir wissen, wann eine natürliche Zahl durch 6 teilbar ist, so hilft die soeben formulierte Aussage nur teilweise: Die betreffende Zahl muss auf jeden Fall durch 2 teilbar sein. Teilbarkeit durch 2 ist eine **notwendige** Bedingung für die Teilbarkeit durch 6.
- Teilbarkeit durch 2 ist aber nicht **hinreichend** für die Teilbarkeit durch 6, denn es gibt natürliche Zahlen, die durch 2, nicht aber durch 6 teilbar sind. Ein Beispiel einer für die Teilbarkeit durch 6 hinreichenden Bedingung wäre die Teilbarkeit durch 12: Für jede natürliche Zahl n gilt

$$n \text{ ist durch 12 teilbar} \implies n \text{ ist durch 6 teilbar.}$$

Teilbarkeit durch 12 ist aber nicht notwendig für die Teilbarkeit durch 6, denn es gibt natürliche Zahlen, die durch 6, nicht aber durch 12 teilbar sind.

- Ein notwendiges *und* hinreichendes Kriterium für die Teilbarkeit durch 6 ist die Teilbarkeit durch 2 und 3: Für jede natürliche Zahl n gilt

$$n \text{ ist durch 6 teilbar} \iff n \text{ ist durch 2 und durch 3 teilbar.}$$

Das Symbol \iff wird ausgesprochen als „genau dann, wenn“, „gleichbedeutend mit“ oder (etwas holpriger) „daraus folgt und umgekehrt“. Es stellt die **Äquivalenz** zweier Aussagen dar. Generell drückt eine Aussage der Form „ $A \iff B$ “ dasselbe aus wie „ $A \implies B$ und $B \implies A$ “.

- Machen Sie sich den Unterschied zwischen „notwendig“, „hinreichend“ und „notwendig und hinreichend“ klar!
- Eine Aussage der Art „für jede natürliche Zahl n gilt ...“ wird oft auch in der Form „für alle natürlichen Zahlen n gilt ...“ oder, in umgekehrter Reihenfolge, „... für alle natürlichen Zahlen n “ formuliert. Anstelle von „für alle“ kann das Symbol \forall verwendet werden. Es heißt dann etwa knapp: „... $\forall n \in \mathbb{N}$ “ (wobei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet). Hier ein konkretes Beispiel:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } (n + 1)^2 - n^2 \text{ ist ungerade.}$$

Auch damit wird eine Aussage für unendlich viele Objekte gemacht. Sie lässt sich zwar für einige konkrete Zahlen n durch direkte Berechnung überprüfen, aber um sich zu vergewissern, dass sie tatsächlich für *alle* natürlichen Zahlen gilt, muss man sie in ihrer allgemeinen Form **beweisen**. Einige wichtige Beweistechniken werden Sie in dieser Vorlesung kennen lernen.

- Manchmal will man ausdrücken, dass eine bestimmte, für viele Objekte formulierte Aussage *nicht* gilt. So gilt beispielsweise die Behauptung, dass jede ungerade Zahl eine Primzahl ist, nicht. Die **Negation** der Aussage „jede ungerade Zahl ist eine Primzahl“ lautet: „Es gibt eine ungerade Zahl, die keine Primzahl ist“. Es genügt, *eine* solche Zahl

(ein **Gegenbeispiel**) anzugeben, um die ganze Behauptung zu Fall zu bringen. Bei der Formulierung der Existenz von Objekten hilft das Symbol \exists („es existiert“ oder kurz „existiert“). Das Symbol $\exists!$ bedeutet „es existiert genau ein“. Falls man sagen möchte, dass es kein Objekt mit einer gewissen Eigenschaft gibt, kann man das Symbol \nexists („es existiert kein“) verwenden.

- Die Art und Weise, wie mathematische Sachverhalte formuliert werden, wird Ihnen vielleicht zu Beginn ungewohnt und rätselhaft vorkommen. Lassen Sie sich bitte trotzdem darauf ein! Oft tritt bei näherer Betrachtung eine sprachlich (durchaus auch alltags-sprachlich) nachvollziehbare Struktur zutage. Hier ein Beispiel:

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $(n + 1)^3 - n^3 = 2k + 1$.

(Das Symbol \mathbb{Z} steht für die Menge der ganzen Zahlen). Wenn Ihnen in einer Aussage wie dieser zu viele Symbole vorkommen, können Sie sie entsprechend ihrem persönlichen Sprachempfinden „aufdröseln“, etwa so:

Für jede natürliche Zahl n gibt es eine ganze Zahl k , so dass $(n + 1)^3 - n^3 = 2k + 1$.

Erkennen Sie, was damit gesagt wird? Die Differenz der dritten Potenzen zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets ungerade. Überprüfen Sie diese Aussage durch Kopfrechnen für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$! Versuchen Sie, sie ganz allgemein zu beweisen!

- Zur Ergänzung noch zwei weitere nützliche Symbole: Das Zeichen $:=$ kennzeichnet eine Definition. Das Zeichen $\stackrel{!}{=}$ wird oft in der Bedeutung „soll sein“ verwendet, drückt also in diesem Sinn keinen Sachverhalt, sondern eher einen Wunsch oder eine Bedingung aus.

B Mengen

Zentral für die gesamte Mathematik ist der Begriff der **Menge**. Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung wohldefinierter, untereinander verschiedener Objekte, wobei es auf die Reihenfolge, in der sie angegeben werden, nicht ankommt. Um die Zahlen 1, 2 und 3 in einer Menge A zusammenzufassen, schreiben wir

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Wir könnten genauso gut $A = \{3, 1, 2\}$ schreiben, um die gleiche Menge zu definieren. Um eine Menge von Objekten zu bilden, die eine bestimmte Eigenschaft gemeinsam haben, schreiben wir (hier anhand des Beispiels der Menge aller reellen Zahlen, die größer-gleich 5 sind):

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\},$$

wobei \mathbb{R} die Menge aller reellen Zahlen bezeichnet. Die öffnende Mengenklammer $\{$ wird gelesen als „Menge aller“, der senkrechte Strich als „für die gilt“. In manchen Texten finden Sie statt des senkrechten Strichs einen Doppelpunkt: $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$. Ist von vornherein

klar, dass es sich um reelle Zahlen handeln soll, kann die obige Definition der Menge B zu $B = \{x \mid x \geq 5\}$ verkürzt werden.

Folgende Bezeichnungen und Operationen werden oft benötigt:

- Die Objekte, die in einer Menge zusammengefasst werden, heißen ihre **Elemente**. Um auszudrücken, dass a Element der Menge M ist, schreiben wir $a \in M$ (ausgesprochen „ a Element von M “ oder einfach „ a in M “). Um auszudrücken, dass a kein Element der Menge M ist, schreiben wir $a \notin M$ („ a kein Element von M “).
- Zwei Menge A und B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente besitzen, d.h. wenn jedes Element von A auch Element von B und jedes Element von B auch Element von A ist. Wir schreiben dann $A = B$.
- Die Menge A heißt **Teilmenge** (oder **Untermenge**) der Menge B , wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Wir schreiben dann $A \subseteq B$. A heißt **echte Teilmenge** von B , wenn A Teilmenge von B ist und $A \neq B$ gilt. Um auszudrücken, dass A eine echte Teilmenge von B ist, wird im Buch die Schreibweise $A \subset B$ verwendet. (Die Symbole \subseteq und \subset verhalten sich dann analog zu \leq und $<$). Um Missverständnisse zu vermeiden, ist aber für diesen Fall die eindeutigere Schreibweise $A \subsetneq B$ anzuraten.

- Die **Durchschnittsmenge** (kurz: der Durchschnitt) zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\},$$

d.h. als Menge aller Objekte, die sowohl Element von A als auch Element von B sind.

- Die **Vereinigungsmenge** (kurz: die Vereinigung) zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\},$$

d.h. als Menge aller Objekte, die Element von A oder Element von B sind. Achtung: Das in der Mathematik verwendete „Oder“ ist *nicht-ausschließend* gemeint! „ $x \in A$ oder $x \in B$ “ ist zu verstehen als: „ $x \in A$ oder $x \in B$ oder beides“. Wir können diese Bedingung auch in der Form „ x ist Element *zumindest* einer der beiden Mengen A und B “ formulieren.

- Die **Differenzmenge** zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

(ausgesprochen: „ A ohne B “), d.h. als Menge all jener Elemente von A , die nicht Element von B sind. Sie wird auch als **Komplement(ärmenge)** von B in Bezug auf A bezeichnet. Differenzmengen sind insbesondere nützlich, um einzelne Elemente aus einer gegebenen Menge auszuschließen. So bezeichnet beispielsweise

$$\mathbb{R} \setminus \{3\}$$

die Menge aller reellen Zahlen, die ungleich 3 sind.

- Das **kartesische Produkt** zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\},$$

d.h. als Menge aller **geordneten Paare** (a, b) , für die die erste Komponente Element von A ist und die zweite Komponente Element von B . Anstelle von $A \times A$ schreibt man auch A^2 (ausgesprochen „A zwei“). Die häufigste Anwendung dieser Konstruktion ist \mathbb{R}^2 , „der R-zwei“, der mit den Punkten der (Zeichen-)Ebene identifiziert wird. In analoger Weise können auch höhere kartesische Produkte gebildet werden, wie etwa $A \times B \times C$ als Menge aller geordneten **Tripel** von Elementen der drei angegebenen Mengen oder allgemein $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ als entsprechende Menge aller geordneten **n-Tupel**. Insbesondere ergibt sich daraus, was mit \mathbb{R}^3 und, allgemein, mit \mathbb{R}^n gemeint ist.

C Bezeichnungen der wichtigsten Zahlenmengen

Folgende Bezeichnungen werden immer wieder verwendet:

\mathbb{R} = Menge aller reellen Zahlen.

\mathbb{Q} = Menge aller rationalen Zahlen, d.h. aller Bruchzahlen $\frac{a}{b}$, wobei a und b ganze Zahlen sind und $b \neq 0$ ist. Es sind dies genau jene reellen Zahlen, deren Dezimaldarstellung entweder abbricht oder (ab irgendeiner Stelle) periodisch ist.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ = Menge aller ganzen Zahlen.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ = Menge aller natürlichen Zahlen. Achtung: Die Null ist im verwendeten Lehrbuch keine natürliche Zahl! In diesem Punkt ist die mathematische Literatur nicht einheitlich.

$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Das ist die Menge, die Sie im Mathematikunterricht die „natürlichen Zahlen“ genannt haben.

Klarerweise ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Einige Teilmengen von \mathbb{R} werden oft benötigt:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_{\neq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ = Menge aller von 0 verschiedenen reellen Zahlen.

$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ = Menge aller positiven reellen Zahlen.

$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ = Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.

D Schreibweise von Zahlen

- Da in der wissenschaftlichen Literatur Dezimalzahlen meist mit Dezimalpunkt geschrieben werden, nicht mit Komma, ist es sinnvoll, wenn Sie sich damit anfreunden!

- Schreiben Sie rationale Zahlen, die leicht als Brüche ganzer Zahlen geschrieben werden, bevorzugt auch so an, also etwa $-\frac{7}{2}$ eher als in der Form -3.5 ! Die beiden Darstellungen haben zwar die gleiche Bedeutung, aber die erste Form eignet sich oft besser zum Weiterrechnen, während die zweite dazu verleitet, auf den Taschenrechner zu vertrauen und sich Näherungen für Dinge einzuhandeln, die man auch exakt haben könnte. Schreiben Sie anstelle von $\frac{1}{3}$ nicht ohne triftigen Grund 0.33 (denn das wäre ja falsch)! Verwandeln Sie auch $\sqrt{2}$ oder π nicht ohne Grund in 1.4142 oder 3.14 !
- Vermeiden Sie die Schreibweise $3\frac{1}{2}$ für „dreieinhalb“ gänzlich, denn Sie könnte – aufgrund der Regel, dass der „Malpunkt“ weggelassen werden kann – auch als 3 mal $\frac{1}{2}$ missverstanden werden! Schreiben Sie statt dessen $\frac{7}{2}$ oder, wenn es aus irgend einem Grund besser passt, 3.5 oder $3 + \frac{1}{2}$.

E Funktionen (Abbildungen)

Eine **Funktion (Abbildung)** f von einer Menge D (**Definitionsmenge**) in eine Menge W (**Zielmenge**) ist eine Vorschrift, die jedem Element von D ein eindeutig bestimmtes Element von W zuordnet. Wir schreiben dann $f : D \rightarrow W$. Um auszudrücken, dass dem Element $x \in D$ das Element $y \in W$ zugeordnet wird, schreiben wir $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ oder einfach $x \mapsto y$. Die Menge aller Elemente von W , die von f „getroffen“ werden, d.h. die Menge aller $y \in W$, für die es ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$, ist das **Bild** (oder die **Bildmenge**) von D und wird in der Form $f(D)$ angeschrieben.

Achtung:

- Statt des Begriffs „Definitionsmenge“ wird im Buch (im Hinblick auf die Verwendung des Funktionsbegriffs im Rahmen der reellen Zahlen) das Wort „Definitionsbereich“ verwendet.
- Die im Buch verwendeten Bezeichnungen „Wertemenge“ (für die Zielmenge W) und „Wertebereich“ (für das Bild $f(D)$) sind einander leider zum Verwechseln ähnlich. Halten Sie sich den begrifflichen Unterschied zwischen Zielmenge und Bild vor Augen!
- Anstelle von $f : x \mapsto y$ wird im Buch $f : x \rightarrow y$ geschrieben.

Wir nennen eine Funktion f **bijektiv**, wenn *jedes* Element von W *genau einmal* getroffen wird, d.h. wenn die Zuordnungsvorschrift zu einer Umkehrfunktion $W \rightarrow D$ „umgedreht“ werden kann. Bijektive Funktionen (kurz: „Bijektionen“) werden unter anderem dazu benutzt, um Aussagen über die „Größen“ von Mengen zu machen: Wir nennen zwei Mengen A und B **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Funktion $f : A \rightarrow B$ gibt. Sind A und B Mengen mit nur endlich vielen Elementen, so sind sie genau dann gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente besitzen. Im Fall unendlicher Mengen kann man nicht von der „Anzahl der Elemente“ sprechen – dann entscheidet die Existenz (oder Nichtexistenz) bijektiver Funktionen über ihre „Mächtigkeit“.

So ergibt sich, dass die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{N}_0 gleichmächtig sind, denn die durch $f(n) = n - 1$ definierte Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist bijektiv. In diesem Sinn kann man also nicht sagen, dass \mathbb{N}_0 „mehr“ Elemente besitzt als \mathbb{N} . Interessantweise sind auch die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{Q} gleichmächtig,

obwohl man doch gefühlsmäßig sagen würde, dass es wesentlich mehr rationale als natürliche Zahlen gibt! Überlegen Sie, wie eine Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ konstruiert werden könnte! (Übungen!)

1 Reelle Zahlen

Das einleitende Kapitel des Lehrbuchs fasst nicht nur zusammen, wie wir mit reellen Zahlen in praktischer Hinsicht „rechnen“, sondern es legt auch grundlegende Eigenschaften dieser Zahlen fest, die in den darauffolgenden Kapiteln benötigt werden. Es tut dies durch Angabe einiger „Grundgesetze“ (zu denen auch das Distributivgesetz auf S. 2 zählt). Vielleicht wird Ihnen beim Lesen auffallen, dass diese „Grundgesetze“ (auch „Axiome“ genannt) nicht bewiesen werden. Sie stellen ein Ensemble von Aussagen dar, die man als „gegeben“ betrachten und im Fortgang des Stoffes benutzen kann, um aus ihnen durch logisches Schließen weitere Aussagen (Sätze, Theoreme) zu beweisen. Hinter dieser – im Buch sehr schonend präsentierten – Vorgangsweise steckt eines der fundamentalen Merkmale der modernen Mathematik, nämlich dass sie auf derartige axiomatische „Setzungen“ angewiesen ist. Für unsere Zwecke bedeutet das, dass die für die Analysis relevanten mathematischen Sachverhalte aus diesen (und einigen noch folgenden) „Grundgesetzen“ erschlossen werden (oder zumindest erschlossen werden können).

Allerdings wird in einer mathematischen Lehrveranstaltung „für PhysikerInnen“ nicht so heiß gegessen wie gekocht. So wird genau genommen nicht gesagt, was die reellen Zahlen denn nun eigentlich sind. Die „Konstruktion der reellen Zahlen“, die in den meisten Lehrbüchern der Analysis vorgenommen wird, ist für PhysikerInnen in der Regel nicht so wichtig und wird hier unter den Teppich gekehrt. Daher müssen wir einige Dinge einfach hinnehmen, ohne eine Begründung dafür zu erfahren, wie beispielsweise die Existenz der Quadratwurzeln positiver reeller Zahlen. Wie Sie wahrscheinlich wissen, gibt es keine *rationale* Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.¹ Aber woher nehmen wir die Sicherheit, dass es eine *reelle* Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist? Über derart grundlegende Themen wird im Buch nicht groß geredet, und wir werden das auch in der Vorlesung nicht tun.

Intuitive Vorstellungen (etwa von den reellen Zahlen als Punkte der Zahlengeraden oder von den Größer-kleiner-Beziehungen der reellen Zahlen) sind bei der Aneignung des Stoffes ebenso hilfreich wie die mathematischen Techniken, die Sie in der Schule gelernt haben (etwa das praktische Lösen von Gleichungen), aber wenn gefühlsmäßig verankerte „innere Bilder“ ein von den erwähnten „Grundgesetzen“ unabhängiges Eigenleben entwickeln, können sie leicht in die Irre führen, denn sie tendieren dazu, anstelle von Beweisen eine Art von Glauben auszubilden. Versuchen Sie daher, das Ganze jetzt ein bisschen mehr von einem „axiomatischen“ oder „deduktiven“ Standpunkt zu betrachten! Wir werden nicht alle mathematischen Theoreme, die Sie kennen lernen werden, im Detail beweisen, aber Sie sollten ein Gefühl dafür bekommen, was ein Beweis ist. Um – etwa im Rahmen einer Übungsaufgabe – einen Sachverhalt zu beweisen, versuchen Sie, dabei lediglich die „Grundgesetze“ sowie Aussagen, die auf der Basis dieser Grundgesetze bereits bewiesen worden sind, zu verwenden! Die zahlreichen im Detail gelösten Übungsaufgaben des Lehrbuchs (von denen einige auch in der Vorlesung vorgeführt

¹ Beweis: Angenommen, es wäre $(m/n)^2 = 2$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, und m und n teilerfremd. Dann folgt mit $m^2 = 2n^2$, dass m^2 gerade ist, daher auch m , folglich $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich aber $4k^2 = 2n^2$, also $n^2 = 2k^2$, woraus folgt, dass n^2 und somit auch n gerade ist. Dass m und n gerade sind, also nicht teilerfremd, ist aber ein Widerspruch zur Annahme!

werden) zeigen Ihnen, wie das in der Praxis funktioniert. Wenn Sie das eine Zeitlang erfolgreich durchhalten, werden Sie mit einer neuen Sicherheit belohnt, die Ihnen sagt, in welchem Sinn ihre intuitiven Vorstellungen tragfähig sind und wo ihre Grenzen liegen.

1.1 Körpereigenschaften

Der gesamte Abschnitt bezieht sich auf einen *beliebigen* Körper \mathbb{K} . Beispiele konkreter Körper sind die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen, die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen und die (später zu besprechende) Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen, jeweils bezüglich der üblicherweise für sie definierten Operationen der Addition und Multiplikation.

- **S. 1, Kasten „Grundgesetze der Addition“:**

- Eine Menge mit einer Operation $+$, die den Gesetzen 2) bis 4) genügt, heißt **Gruppe**. Gilt zudem noch das Gesetz 1), so spricht man von einer **abelschen** (oder **kommutativen**) Gruppe. Die Grundgesetze 1) bis 4) besagen daher, dass die Menge \mathbb{K} bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe ist.
- Das inverse Element bezüglich der Addition hat keinen wirklich guten Namen! Manchmal wird $-a$ als „Gegenzahl“ von a bezeichnet. Die Bezeichnung „das Negative von a “ (wiewohl umgangssprachlich manchmal verwendet) ist nicht ideal, weil a ja selbst negativ sein könnte und das „Negative von a “ dann positiv wäre!

- **S. 2, Kasten „Grundgesetze der Multiplikation“:**

- Die Grundgesetze 1) bis 4) implizieren, dass die Menge $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe ist.
- Das inverse Element bezüglich der Multiplikation hat (im Unterschied zum Inversen bezüglich der Addition) einen schönen Namen: a^{-1} heißt **Kehrwert** von a .

- **S. 2, Kasten „Distributivgesetz“:** Dieser Kasten sollte eigentlich auch die Bezeichnung „Grundgesetz“ in der Überschrift tragen. Das Distributivgesetz regelt das Zusammenspiel von Addition und Multiplikation. Es wird (je nach der Richtung, in der es angewandt wird) „Herausheben“ oder „Klammer ausmultiplizieren“ genannt.

- **S. 3, Punkt 3.):** Es handelt sich hier um zwei Eigenschaften. Besonders die zweite, und hier insbesondere die Implikation

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ oder } b = 0,$$

ist besonders wichtig! Sie wird „Nullteilerfreiheit“ genannt.

- **S. 4, Übung 1.1:** Hier tritt mit $\sqrt{7}$ zum ersten Mal im Buch eine Quadratwurzel auf. Wir nehmen das zum Anlass, um zu klären: $\sqrt{7}$ ist jene (eindeutig bestimmte) *positive* reelle Zahl, deren Quadrat gleich 7 ist. Nehmen wir zur Verdeutlichung eine Zahl, deren Quadratwurzel sich innerhalb der natürlichen Zahlen ziehen lässt: $\sqrt{9} = 3$. Die Quadratwurzel aus 9 hat nichts mit -3 , also auch nichts mit ± 3 zu tun!

- **S. 4, Übung 1.2:** Beachten Sie, dass die hier vorgeführte Art der Umformung einer Gleichung mit Hilfe des Äquivalenz-Symbols \iff genau das ausdrückt, was Sie in der Schule als „Äquivalenzumformung“ kennen gelernt und wahrscheinlich unzählige Male durchgeführt haben! Rein logisch können Sie natürlich Ihre bisherige Schreibweise, die verschiedenen Varianten einer Gleichung untereinander zu schreiben, weiterhin benutzen, *sofern* sie dabei irgendwie zum Ausdruck bringen, dass es sich um äquivalente Aussagen handelt! (Ohne einen solchen Zusatz wäre Ihre Argumentation unvollständig!) Es sei Ihnen aber sehr ans Herz gelegt, sich mit der neuen, im Buch vorgeführten Schreibweise anzufreunden!

1.2 Das Summenzeichen

Um keine Verwechslung mit der komplexen Zahl i zu riskieren, empfehle ich (wie es auch im Lehrbuch getan wird), den Buchstaben i als Summationsindex zu vermeiden!

1.3 Anordnungseigenschaften

Ab diesem Abschnitt bezieht sich das Buch nur mehr auf den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen. Mit den angeführten Anordnungseigenschaften bilden die reellen Zahlen einen *geordneten Körper*. Nicht jeder Körper ist mit einer derartigen Struktur verträglich.

- **S. 12, Kasten „Schreibweise“:** Das (allseits bekannte) Zeichen \geq gehört natürlich ebenfalls dazu.
- **S. 15, Kasten „Definition: Intervalle“:** Für offene und halboffene Intervalle ist auch die Schreibweise mit einer nach außen gerichteten Klammer üblich: $]a, b[$ anstelle von (a, b) , $[a, b[$ anstelle von $[a, b)$, $]a, b]$ anstelle von $(a, b]$, $]a, \infty[$ anstelle von (a, ∞) , $] - \infty, b[$ anstelle von $(-\infty, b)$ und $] - \infty, \infty[$ anstelle von $(-\infty, \infty)$. Zu den im Buch aufgezählten Intervalltypen kommen natürlich noch $[a, \infty)$ (oder $[a, \infty[$) und $(-\infty, b]$ (oder $] - \infty, b]$) hinzu. Auch die Schreibweise mit Strichpunkt statt des Beistrichs (etwa $[a; b]$ statt $[a, b]$) ist üblich, vor allem dann, wenn Dezimalzahlen mit Komma geschrieben werden. Aufgrund dieser verbleibenden Freiheiten der mathematischen Notation müssen Sie manchmal aus dem Zusammenhang erschließen, was gemeint ist. Wenn Sie beispielsweise in einem Lehrbuch auf etwas wie $(2, 3)$ stoßen, könnte es sich um ein offenes Intervall oder um ein geordnetes Paar handeln.

Mit den Körperaxiomen und den Grundgesetzen der Anordnung stehen bereits fast alle „Argumentationswerkzeuge“, die in der Analysis und ihren Anwendungen benötigt werden, zur Verfügung. Auf ein letztes Axiom, das die „Vollständigkeit“ (im Sinne von „Lückenlosigkeit“) der reellen Zahlen ausdrückt, werden wir noch zu sprechen kommen.

1.4 Der Betrag

Keine Ergänzung zu diesem Abschnitt.

1.5 Vollständige Induktion

Keine Ergänzung zu diesem Abschnitt.

1.6 Der Binomische Satz

- **S. 30, Kasten „Definition: Fakultät“:** Fakultät wird auch **Faktorielle** genannt.
- **S. 33, 4. Zeile von unten“:** Die Festlegung $0^0 = 1$ ist im hier betrachteten Kontext sinnvoll, wird aber *nicht* allgemein so verwendet. Meist wird 0^0 als „unbestimmt“ offen gelassen. (Überlegen Sie, warum!)

F Überabzählbarkeit von \mathbb{R}

Wir nennen eine Menge **abzählbar**, wenn sie gleichmächtig mit \mathbb{N} ist, d.h. wenn ihre Elemente „aufgelistet“ werden können. (Die Anführungszeichen beziehen sich darauf, dass es sich um eine unendliche Liste handelt).

In einem wahrhaft genial einfachen Beweis hat Georg Cantor gezeigt, dass die Menge \mathbb{R} nicht abzählbar ist. Kurzform: Ist eine Liste reeller Zahlen gegeben, so konstruiert man eine reelle Zahl, die sich in der ersten Nachkommastelle von der ersten angegebenen Zahl unterscheidet, in der zweiten Nachkommastelle von der zweiten angegebenen Zahl, in der dritten Nachkommastelle von der dritten angegebenen Zahl, usw. Die so konstruierte Zahl ist dann nicht in der Liste enthalten – weshalb diese nicht alle reellen Zahlen umfassen kann!

G Komplexe Zahlen

Für dieses – im Buch nicht enthaltene – Kapitel wird das Lehrbuch *Franz Embacher: Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik* (Kapitel 2), <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/grundlagen/>, das auch als eBook der Universitätsbibliothek zur Verfügung steht, zugrunde gelegt.

2 Folgen

2.1 Begriff der Folge

- **S. 37, Kasten „Definition: Folge“:**
 - Da der Funktionsbegriff im Buch erst später eingeführt wird, ist die Definition umständlicher, als sie sein müsste: Eine Folge (genauer: eine reelle Folge) a ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ oder, in einer leichten Verallgemeinerung, wie im Buch etwas weiter unten angeführt, eine Abbildung $a : M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $M = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ (oder $n \in M$) wird der Funktionswert $a(n)$ auch in der Form a_n geschrieben.

- Als Kurzschreibweisen für Folgen sind neben der im Buch angegebenen Form $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auch andere gebräuchlich: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kurz (a_n) , etwas schlampiger a_n (wie in der Folge auch im Buch) oder einfach a .
- **S. 41, Kasten „Definition: Monotone Folgen“:** Statt *monoton wachsend* kann man auch *monoton steigend* sagen.
- **S. 45, 1. Zeile:** Dieser Satz ist etwas missverständlich. Auch nicht-monotone Folgen können über alle Schranke wachsen oder unter alle Schranken fallen.

2.2 Konvergenz

- **S. 48, Kasten „Definition: Konvergente Folge“:** Vielleicht ist es günstig, mit einer zu der im Buch angegebenen äquivalenten, aber einfacher zu verstehenden Definition der Konvergenz zu beginnen: Ein Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen den **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder a_n gibt, für die

$$|a_n - a| \geq \varepsilon$$

gilt, d.h. wenn für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen. Ein solches Intervall wird als „ ε -Umgebung“ von a bezeichnet. Wird die Wendung „**fast alle**“ für „bis auf endlich viele“ verwendet, so geht es noch kürzer: Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.

- **S. 48:** Eine wichtige Folgerung der Definition der Konvergenz einer Folge wird im Buch nicht erwähnt: Eine konvergente Folge besitzt **genau einen Grenzwert**, d.h. der Grenzwert ist eindeutig.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, und sei b eine von a verschiedene reelle Zahl. Kann b ebenfalls Grenzwert der Folge sein? Um einzusehen, dass das nicht der Fall ist, wählen wir ε zwar positiv, aber so klein, dass die beiden Intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ und $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ leeren Durchschnitt haben. Da a Grenzwert ist, liegen fast alle Folgenglieder innerhalb des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Daher liegen unendlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Somit kann b kein Grenzwert der Folge sein.

- **S. 50, oberhalb des Kastens „Definition: Divergente Folge“:** Die Formulierung „Wenn die Grenzwerteigenschaft für keine reelle Zahl verifiziert werden kann“ ist vielleicht ein bisschen missverständlich, denn es geht nicht um unsere Fähigkeit, Dinge zu verifizieren, sondern darum, ob es einen Grenzwert gibt oder nicht. Die Formulierung im darauffolgenden Kasten ist hingegen ganz korrekt.
- **S. 51, Kasten „Definition: Konvergenz gegen Unendlich“:** Die im Buch verwendete Bezeichnung „konvergent gegen den Grenzwert $+\infty$ “ oder „ $-\infty$ “ (eine Folge „konvergiert gegen ∞ “ oder „gegen $-\infty$ “) ist **äußerst unglücklich gewählt**, da eine solche Folge *keinen Grenzwert besitzt*, also *nicht konvergent* ist! Eine bessere Bezeichnung wäre

„divergiert gegen ∞ “ oder „gegen $-\infty$ “. Man spricht auch, wie im Kasten vermerkt, von *bestimmter Divergenz*.

Zur Formulierung dieser Definition: Das Symbol ε für eine reelle Zahl wird oft dann verwendet, wenn betont werden soll, dass sie *beliebig klein* gewählt werden kann. Hier allerdings geht es darum, dass ε *beliebig groß* gewählt werden kann!

- **S. 52, letzte Zeile:** Tippfehler! Es muss heißen $1^2 = 1$.
- Eine wichtige begriffliche Ergänzung zu diesem Abschnitt: Eine **Nullfolge** ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Der Begriff wird im Buch nicht definiert, aber später verwendet.

2.3 Konvergenzsätze

- **S. 54, zweiter Satz des Textes zwischen den beiden Kästen:** Tippfehler! Statt „unendlich“ muss hier „endlich“ stehen: Der Grenzwert (also b) kann nur dann von null verschieden sein, wenn alle bis auf *endlich* viele Folgenglieder von null verschieden sind.
- **S. 55, Kasten „Satz: Grenzwert monotoner Folgen“:** Die Aussage dieses Satzes folgt nicht aus den im Buch angegebenen „Grundgesetzen“ (Körperaxiome und Anordnungseigenschaften). Sie stellt eine weitere Eigenschaft der reellen Zahlen dar, die so genannte *Vollständigkeit*, die im Text oberhalb des Kastens angesprochen wird. Eine Möglichkeit, mit dieser Situation umzugehen, besteht darin, die Aussage als weitere (letzte) Grundeigenschaft der reellen Zahlen (als das **Vollständigkeitsaxiom**) anzusehen. Sie muss dann nicht bewiesen werden (und sollte nicht „Satz“ heißen). Die Vollständigkeit der reellen Zahlen lässt sich aber auch auf andere Weise formulieren (im Buch ist oberhalb der Kastens etwa vom „Axiom der größten unteren bzw. der kleinsten oberen Schranke“ die Rede – wir werden weiter unten bei den Stichworten Supremum und Infimum sagen, was damit gemeint ist). Wird dieser Weg eingeschlagen, dann ist die Aussage über den Grenzwert monotoner beschränkter Folgen ein „Satz“, der bewiesen werden muss. Wir werden auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen nach dem Folgen-Kapitel noch etwas genauer eingehen.

2.4 Reihen als Folgen

- **S. 59:** Statt **Teilsummen** kann auch die Bezeichnung **Partialsummen** verwendet werden.
- **S. 64:** In der zweiten Formel fehlt ein Gleichheitszeichen. Überlegen Sie selbst, wo genau es hingehört!

H Vollständigkeit von \mathbb{R}

Anlässlich des Begriffs der Konvergenz sind einige Ergänzungen angebracht, die uns zu einem tieferen Verständnis der reellen Zahlen führen.

- Wir nennen eine reelle Zahlenfolge (a_n) **Cauchyfolge**, wenn ihre Glieder im folgenden Sinn „unbegrenzt zusammenrücken“: Für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_ε , so dass für alle Indizes $m, n > n_\varepsilon$ gilt:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Nun gilt der **Satz**:

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Dass eine konvergente Folge eine Cauchyfolge ist, ist leicht zu zeigen: Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, und ist ein (beliebig kleines) $\varepsilon > 0$ gewählt, so gibt es einen Index n_ε , so dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $m, n > n_\varepsilon$ gilt daher

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wobei die Dreiecksungleichung benutzt wurde. Beweis fertig! Weniger trivial ist die Umkehrung, d.h. die Aussage, dass jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt. Sie ist äquivalent zur Existenz des Grenzwerts monotoner beschränkter Folgen und damit zur Vollständigkeit der reellen Zahlen (vgl. S. 55 im Buch). Sie drückt – intuitiv gesprochen – aus, dass die Menge \mathbb{R} keine „Lücken“ hat.

- Um das soeben Gesagte gebührend würdigen zu können, betrachten wir die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} . Sie bildet einen geordneten Körper, d.h. hinsichtlich der Addition, der Multiplikation und der Anordnungsseigenschaften können wir innerhalb der Menge \mathbb{Q} die gleichen Rechengesetze verwenden wie innerhalb der Menge \mathbb{R} . Aber es gibt dennoch einen wichtigen Unterschied: Die Menge der rationalen Zahlen ist *nicht* vollständig. In ihr gibt es Cauchyfolgen, die keinen Grenzwert besitzen. Sei beispielsweise a_n jene rationale Zahl, die entsteht, indem die Dezimaldarstellung von

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242 \dots$$

ab der n -ten Nachkommastelle abgeschnitten wird, also

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1.4 \\ a_3 &= 1.41 \\ a_4 &= 1.414 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Die a_n bilden eine Cauchyfolge rationaler Zahlen, die innerhalb von \mathbb{Q} keinen Grenzwert besitzt. Natürlich besitzt sie, wenn sie als *reelle* Zahlenfolge aufgefasst wird, einen Grenzwert, nämlich $\sqrt{2}$. Aber $\sqrt{2}$ ist eben keine rationale Zahl. Die Menge \mathbb{Q} hat in diesem Sinn „Lücken“. Die Folge a_n ist übrigens monoton wachsend und nach oben beschränkt, was illustriert, dass auch der Satz von der Existenz des Grenzwerts monotoner beschränkter Folgen (vgl. im Buch S. 55) innerhalb von \mathbb{Q} nicht gilt.

- Wie bereits erwähnt, kann die Vollständigkeit der reellen Zahlen auf unterschiedliche, aber äquivalente Weisen formuliert werden. Wir zählen drei davon auf:²
 - Jede monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge besitzt einen Grenzwert.
 - Jede Cauchyfolge besitzt einen Grenzwert.
 - Jede nach oben (unten) beschränkte Menge besitzt eine kleinste obere (größte untere) Schranke. (Mehr zu dieser Variante etwas weiter unten).

Durch die Körperaxiome, die Anordnungseigenschaften und die Vollständigkeit sind die **reellen Zahlen eindeutig charakterisiert**. Das bedeutet, etwas salopp formuliert: Besitzt eine Menge alle diese Eigenschaften, so handelt es sich dabei um die Menge der reellen Zahlen.

- Von einem formalen Standpunkt betrachtet, ergibt sich durch diese Betrachtungen die Möglichkeit, die Menge \mathbb{R} als „Vervollständigung“ der Menge \mathbb{Q} zu „konstruieren“. Wie das im Einzelnen gemacht wird, gehört nicht zum Stoff dieser Vorlesung (Sie können daher die folgenden zwei Sätze überspringen, wenn sie wollen), aber für Interessierte sei es kurz skizziert: Definieren wir zwei Cauchyfolgen (a_n) und (b_n) von rationalen Zahlen als *äquivalent*, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ gilt, und fassen zueinander äquivalente Cauchyfolgen zu *Äquivalenzklassen* zusammen, so können wir \mathbb{R} als Menge aller dieser Äquivalenzklassen definieren. Ähnliche Verfahrensweisen spielen beispielsweise – auf ganz andere Mengen angewandt – in der Mathematik der Quantentheorie eine Rolle.

I Teilmengen von \mathbb{R}

Die meisten Teilmengen von \mathbb{R} , die im Buch vorkommen, sind Intervalle. Im Zusammenhang mit Intervallen treten auch die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ auf. Diese besitzen ein erhebliches Verallgemeinerungspotential: Sie können auch auf bestimmte andere Mengen übertragen werden³, die Sie später in ihrem Studium – vor allem im Hinblick auf die in der theoretischen Physik benötigten mathematischen Strukturen – kennen lernen werden. Aber auch im Rahmen der reellen Zahlen helfen sie da und dort und unterstützen in gewissem Ausmaß unsere Vorstellung (auch über das Verhalten von Funktionen, das ja gleich im Anschluss auf dem Programm steht). Daneben gehört die Idee der Beschränktheit von Mengen und die Frage nach größten und kleinsten Elementen zu einem etwas tieferen Verständnis der reellen Zahlen. Diese Begriffe und Zusammenhänge werden nun – für die Menge der reellen Zahlen – kurz skizziert.

- Zunächst zwei Grundbegriffe:
 - Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ **offen**, wenn es für jedes $x \in A$ ein offenes Intervall gibt, in dem x liegt, und das ganz in A enthalten ist.

² Daneben gibt es noch weitere zur Vollständigkeit äquivalente Eigenschaften. So werden Sie in manchen Analysis-Büchern das „Schnittaxiom“ oder das „Intervallschachtelungsaxiom“ finden.

³ In voller Allgemeinheit wird dies im mathematischen Gebiet der *Topologie* gemacht.

- Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement, d.h. die Menge $\mathbb{R} \setminus A$, offen ist.
 - Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ eine **Umgebung** von $x \in \mathbb{R}$, wenn $x \in A$ und A offen ist.
- Diese Begriffe können auf Intervalle angewandt werden:
 - Intervalle der Form (a, b) , (a, ∞) und $(-\infty, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ sind offene Mengen. Daher heißen sie auch „offene Intervalle“. (In manchen Lehrbüchern werden als „offene Intervalle“ nur Intervalle der Form (a, b) bezeichnet).
 - Intervalle der Form $[a, b]$, $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$ sind abgeschlossene Mengen. Mit dem Begriff „**abgeschlossene Intervalle**“ werden aber in der Regel nur Intervalle der Form $[a, b]$ bezeichnet – eine Konvention, die auch im Buch und in diesem Skriptum befolgt wird. Es ist übrigens nicht einheitlich geregelt, ob ein einzelner Punkt, also $[a, a]$, als Intervall gilt. Wir werden bei abgeschlossenen Intervallen stets voraussetzen, dass $a < b$ ist.
 - Intervalle der Form $(a, b]$ und $[b, a)$ sind weder offen noch abgeschlossen. Es fallen also nicht alle Teilmengen von \mathbb{R} in eine der beiden Kategorien.⁴
 - Ein offenes Intervall der Form $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ heißt ε -Umgebung von x . Es ist eine (spezielle) Umgebung von x .
 - Ein Intervall ist also genau dann eine abgeschlossene Menge, wenn „die Randpunkte dazugehören“ (eine Vorstellung, die gut zum Wort „abgeschlossen“ passt). Dies lässt sich verallgemeinern: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge, deren Glieder in A liegen, ebenfalls in A liegt. Ist eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen, so wird die Menge \overline{A} aller Grenzwerte konvergenter Folgen von Elementen aus A als **Abschluss** von A bezeichnet (und ist klarerweise abgeschlossen). Gilt $\overline{A} = \mathbb{R}$, so nennen wir die Menge A **dicht**. Ein Beispiel für eine dichte Menge ist \mathbb{Q} .
 - Die Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen. Auch die Vereinigung unendlich vieler offener Mengen ist stets offen. Der Durchschnitt *endlich vieler* offener Mengen ist wieder offen. Der Durchschnitt *unendlich vieler* offener Mengen muss allerdings nicht offen sein, wie das Beispiel $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n}) = (0, 1]$ zeigt.
 - Der Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen. Auch der Durchschnitt unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist stets abgeschlossen. Die Vereinigung *endlich vieler* abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen. Die Vereinigung *unendlich vieler* abgeschlossener Mengen muss allerdings nicht abgeschlossen sein, wie das Beispiel $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, \frac{n}{n+1}] = [0, 1)$ zeigt.

⁴ Jetzt könnten Sie fragen, ob es Mengen gibt, die in *beide* Kategorien fallen. Die Antwort: Es gibt nur zwei Teilmengen von \mathbb{R} , die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind: die leere Menge und \mathbb{R} selbst.

- Für viele Begriffe und Methoden spielen auch **beschränkte** Mengen eine wichtige Rolle:
 - Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, wenn es ein $\bar{s} \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq \bar{s}$ für alle $x \in A$. Beachten Sie, dass \bar{s} nicht Element von A sein muss. Jedes solche \bar{s} heißt **obere Schranke** von A .
 - Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, wenn es ein $\underline{s} \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\underline{s} \leq x$ für alle $x \in A$. Jedes solche \underline{s} heißt **untere Schranke** von A .
 - Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.
- Haben beschränkte Mengen größte bzw. kleinste Elemente? Nicht immer! Wir nennen x ein **größtes Element** (oder **Maximum**) einer nach oben beschränkten Menge, wenn $x \in A$ und $y \leq x$ für alle $y \in A$. Analog definieren wir ein **kleinstes Element** (oder **Minimum**) einer nach unten beschränkten Menge. Besitzt eine Menge ein Maximum (bzw. Minimum), so ist dieses eindeutig. Allerdings existieren solche Elemente nicht immer. So besitzt beispielsweise die Menge $(0, 1)$ weder ein kleinstes noch ein größtes Element.
- Haben wir es mit einer (nicht-leeren) nach oben beschränkten Menge A zu tun, die kein größtes Element besitzt, so gibt es gewissermaßen einen Ersatz dafür: die **kleinste obere Schranke**. Interessanterweise besitzt die Menge aller oberen Schranken von A ein kleinstes Element. Wir bezeichnen es als **Supremum** von A und schreiben es in der Form $\sup(A)$ an. Analog dazu besitzt eine (nicht-leere) nach unten beschränkte Menge A eine **größte untere Schranke**, auch **Infimum** von A genannt, angeschrieben als $\inf(A)$. Diese Begriffe werden im Buch nicht so ausführlich definiert wie hier, aber an einer Stelle (S. 132) erwähnt. Die Existenz einer kleinsten oberen bzw. größten unteren Schranke für beliebige beschränkte Mengen ist äquivalent zur Existenz des Grenzwerts monotoner beschränkter Folgen und damit zur Vollständigkeit der reellen Zahlen. Im Buch wird dieser Zusammenhang auf S. 55 oberhalb des Kastens kurz erwähnt.
- Noch ein letzter Begriff: Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ **kompakt**, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Im Rahmen der reellen Zahlen erscheint eine solche Namensgebung fast überflüssig, aber sie tritt auch in allgemeineren Zusammenhängen (vor allem, wenn es um höherdimensionale oder sogar um unendlichdimensionale „Räume“ geht) auf. Wann immer im Buch oder in diesem Skriptum von einem „abgeschlossenen Intervall“ die Rede ist, können Sie statt dessen auch „**kompaktes Intervall**“ sagen. In manchen Lehrbüchern wird diese Bezeichnung vorgezogen.

3 Funktionen

3.1 Grundbegriffe

- **S. 67:** Wie bereits oben erwähnt, verwendet das Buch hier ungünstige (weil leicht zu verwechselnde) Bezeichnungen: Als **Wertemenge** wird die Menge W bezeichnet (besser

wäre **Zielmenge**), als **Wertebereich** wird die Menge $f(D)$ (in der letzten Zeile von S. 67 definiert) bezeichnet. Die Definition von $f(D)$ kann kürzer in der Form

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

angeschrieben werden.

- **S. 68, oben:** Die „unabhängige Variable“ wird auch als **Argument** bezeichnet. Dieser Begriff wird hier im Buch nicht definiert, aber später verwendet.
- **S. 68, oben:** Hinsichtlich des Begriffs **Urbild** folgt das Buch nicht ganz der üblichen Bezeichnungsweise:
 - Das Urbild einer Teilmenge $A \subseteq W$ ist die Menge aller Elemente von D , deren Funktionswerte in A liegen. Es wird meist als $f^{-1}(A)$ bezeichnet, also $f^{-1}(A) = \{x \in D \mid f(x) \in A\}$. Achtung: Dieses Konzept existiert immer, auch dann, wenn die (ebenfalls mit f^{-1} bezeichnete) Umkehrfunktion nicht existiert!
 - Das Urbild einer ein-elementigen Teilmenge von W , also einer Menge $\{y\}$ für ein $y \in W$, ist gleich der Menge aller Elemente von D , deren Funktionswert gleich y ist, d.h. $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in D \mid f(x) = y\}$. Im Buch werden die Elemente dieser Menge als „Urbilder“ bezeichnet.
- **S. 68, Kasten „Definition: Reelle Funktion“:**
 - Reelle Funktionen werden im Buch auch **reellwertig** genannt. Genau genommen meint dieser Begriff Funktionen mit „reellen Werten“, aber beliebiger Definitionsmenge (die nicht unbedingt aus reellen Zahlen bestehen muss).
 - Wenn im folgenden Text des Buchs allgemeine Aussagen über Funktionen formuliert werden, wird manchmal einfach $f : D \rightarrow W$ geschrieben, ohne D genauer zu spezifizieren. Sie können in diesen Fällen annehmen, dass D ein Intervall oder eine (nicht allzu gekünstelte) Vereinigung von Intervallen ist.
- **S. 69, Kasten „Definition: Graph einer Funktion“:** Die Definition des Graphen kann einfacher in der Form

$$\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

angeschrieben werden. Der Graph $\text{Graph}(f)$ ist von der Funktion f begrifflich zu unterscheiden. Nur dann, wenn man *weiß*, dass es sich hierbei um unterschiedliche Dinge handelt, sollte man sich in diesem Punkt sprachliche Saloppheit erlauben! Der Buchtext ist diesbezüglich an vielen Stellen *allzu* salopp!

- Wir machen noch eine Ergänzung zu diesem Abschnitt: **Terme** spielen eine wichtige Rolle bei der Definition von Funktionen, aber sie können den Funktionsbegriff nicht ersetzen! Einer der vielen Gründe dafür besteht darin, dass ganz klar ist, wann zwei Funktionen gleich sind. Für Terme ist das nicht der Fall. Sind die Terme $x^2 + 2x + 1$ und $(x + 1)^2$ gleich? Zumindest sehen sie verschieden aus. Man könnte sie „äquivalent“ nennen, da sie die gleiche Sache unterschiedlich darstellen. Beim Funktionsbegriff hingegen kommt es auf die Darstellung überhaupt nicht an. Wird etwa eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$f(x) = x^2 + 2x + 1$ und eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die verbale Anweisung "Um den Funktionswert zu erhalten, addiere man 1 zur Variable und quadriere das Ergebnis" definiert, so ist trotz aller Unterschiedlichkeit dieser beiden Definitionsarten völlig klar, dass $f = g$ ist! Worauf es beim Funktionsbegriff ankommt, ist die Zuordnung „als solche“ und nicht die Form, in der sie beschrieben wird.

3.2 Operationen mit Funktionen

- **S. 71, Kasten „Definition: Verkettung zweier Funktionen“:** Die **Verkettung** von Funktionen wird manchmal auch als **Komposition** bezeichnet.
- **S. 73, Kasten „Definition: Injektive Funktion“:** Die Angabe $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kann weggelassen werden – die Definition gilt für Funktionen ganz allgemein, nicht nur für reelle Funktionen. Injektivität lässt sich auch so ausdrücken (bzw. vorstellen): Jeder Funktionswert wird *genau einmal* getroffen. Oder, äquivalent dazu: Jedes Element der Zielmenge W wird *höchstens einmal* getroffen.
- **S. 73, Kasten „Definition: Surjektive Funktion“:**
 - Der Zusatz $W \subseteq \mathbb{R}$ kann weggelassen werden – die Definition gilt für Funktionen ganz allgemein.
 - Eine einfachere Definition ist diese: Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt **surjektiv**, wenn $f(D) = W$ gilt.
- **S. 73, letzter Satz:** Dieser Satz gilt nicht nur für reelle Funktionen, sondern für Funktionen ganz allgemein.
- **S. 74, Kasten „Definition: Bijektive Funktion“:** Die Angabe $f : D \rightarrow W, W \subseteq \mathbb{R}$ kann weggelassen werden. Ganz allgemein heißt eine Funktion **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.
- **S. 73/74:** Machen Sie sich noch einmal die Begriffe *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* klar! Betrachten Sie die folgenden drei Formulierungen und ihre Unterschiede:
 - ★ $f : D \rightarrow W$ heißt injektiv, wenn es für jedes $y \in f(D)$ genau ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$.
 - ★ $f : D \rightarrow W$ heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in W$ ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$.
 - ★ $f : D \rightarrow W$ heißt bijektiv, wenn es für jedes $y \in W$ genau ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$.
- **S. 75, Kasten „Definition: Umkehrfunktion“:**
 - Beachten Sie, dass hier durch die Schreibweise $f : D \rightarrow f(D)$ ausgedrückt wird, dass f surjektiv ist. Mit der vorausgesetzten Injektivität folgt, dass f bijektiv ist, also eine „Eins-zu-eins-Zuordnung“ zwischen Elementen von D und $f(D)$ ausdrückt.
 - Die Umkehrfunktion wird auch **inverse Funktion** genannt.

- **S. 75, unter dem Kasten:** die „1. Winkelhalbierende“ wird auch **1. Mediane** genannt.
- **S. 76, oben:** Die Zeile

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$

bezieht sich auf f_1 . Daher wird vorausgesetzt, dass $x \geq 0$ ist. Die Zeile

$$y = x^2 \iff x = -\sqrt{y}$$

bezieht sich auf f_2 . Daher wird vorausgesetzt, dass $x \leq 0$ ist.

- **S. 78, Kasten „Beschränkte Funktion“:** Die Zahlen \bar{s} bzw. \underline{s} heißen **obere Schranke** bzw. **untere Schranke** der Funktion f .

J Winkelfunktionen

Bitte rufen Sie sich Sie einige Tatsachen über Winkelfunktionen, die im Buch vorausgesetzt werden, und die auch hier nicht im Detail besprochen werden, ins Gedächtnis:

- Periodizität einer Funktion
- Bogenmaß
- Sinus, Cosinus und Tangens im Einheitskreis
- \sin , \cos , \tan und ihre Graphen
- Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.3 Stetigkeit, Grenzwerte

- **S. 81, die beiden Kästen:**
 - Hier wird nichts über D gesagt. Für unsere Zwecke genügt es, anzunehmen, dass D ein Intervall ist.
 - Die Formulierung $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ im ersten Kasten auf S. 81 ist etwas schlampig – gemeint ist eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 - Bei der Formulierung der ε - δ -Definition der Stetigkeit ist natürlich vorausgesetzt, dass nicht nur $x_0 \in D$, sondern auch $x \in D$ ist. (Ansonsten wäre $f(x)$ nicht definiert).
 - Wir verzichten auf den Beweis der Äquivalenz der beiden angegebenen Definitionen der Stetigkeit. Versuchen Sie aber, sich von den beiden Definitionen ein Bild zu machen, um zumindest intuitiv ihre Äquivalenz zu erfassen!
- **S. 82, oben:** Da heißt es: „An der Stelle $x_0 = 0$ hat die Funktion einen Knick“. Ein schönes Beispiel für die – eigentlich nicht erlaubte – Gleichsetzung von Funktion und Funktionsgraph. Tatsächlich hat nicht die Funktion einen Knick, sondern ihr Graph!

- **S. 83, Kasten „Satz: Stetigkeit der Verkettung“:** Achtung Tippfehler! Die letzte Zeile muss lauten: Dann ist die Verkettung $g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ stetig im Punkt x_0 . Im Buch steht fälschlicherweise $f \circ g$.
- **S. 84, Kasten „Definition: Minima und Maxima“ und darunter:**
 - Es können auch die Bezeichnungen **Minimumstelle**, **Maximumstelle** und (beide zusammenfassend) **Extremstelle** verwendet werden. Anstelle von **lokales** Minimum/Maximum/Extremum wird an einigen späteren Stellen des Buchs auch die Bezeichnung **relatives** Minimum/Maximum/Extremum verwendet.
 - Im Kasten wird von einer **Umgebung** gesprochen. Allgemein wird unter einer Umgebung einer reellen Zahl x eine offene Menge bezeichnet, in der x enthalten ist. Manchmal wird der Begriff auf ein offenes Intervall, in dem x liegt, eingeschränkt. Ein noch engerer Begriff ist die ε -Umgebung, d.h. ein Intervall der Form $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$. Für die Zwecke des Buches ist es gleichgültig, welcher dieser Umgebungsbegriffe zugrundegelegt wird. Der Begriff der ε -Umgebung drückt am besten aus, was mit dem – ebenfalls in diesem Kasten verwendeten – Begriff **lokal** gemeint ist: „in einer Nachbarschaft von x , die durchaus sehr klein sein kann, aber *lückenlos* sein muss“.
- **S. 84, Kasten „Satz: Zwischenwertsatz“:** Achtung: Hier werden *zwei* wichtige Sätze in einem Streich angeführt:
 1. Eine in einem *abgeschlossenen* Intervall $[a, b]$ stetige Funktion besitzt in diesem Intervall eine globale Minimumstelle und eine globale Maximumstelle. Der Zusatz „abgeschlossen“ ist entscheidend, denn die auf dem *offenen* Intervall $(0, 1)$ definierte Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ (verdeutlichen Sie sich ihren Graphen!) besitzt in diesem Intervall weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum!
 2. Eine in einem *abgeschlossenen* Intervall $[a, b]$ stetige Funktion nimmt jeden Wert zwischen dem globalen Minimum und dem globalen Maximum an.⁵
- **S. 85:** Tippfehler: Statt „größte unter Schranke“ muss es „größte untere Schranke“ heißen. Die Begriffe „kleinste obere Schranke“ (*Supremum*) und „größte untere Schranke“ (*Infimum*) wurden weiter oben in diesem Skriptum besprochen.
- **S. 87/88:** Beachten Sie, dass bei der Definition des Grenzwerts einer Funktion, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, nicht vorausgesetzt wurde, dass f an der Stelle x_0 definiert ist! Liegt x_0 nicht in der Definitionsmenge von f , so spricht man von einer *Definitionslücke* (ein Begriff, der im Buch nur im Text zu Bild 3.26 auf Seite 87 vorkommt). Falls in einem solchen Fall der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert, spricht man von einer *stetig hebbaren* (kurz *hebbaren*) Definitionslücke.

⁵ In manchen Lehrbüchern wird als „Zwischenwertsatz“ eine schwächere Form formuliert, etwa diese: Ist f in $[a, b]$ stetig und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt), so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$. Zusammen mit der Existenz der globalen Extrema kann dann daraus die oben angegebene Version gefolgert werden.

Nachdem nun definiert wurde, was der Grenzwert einer Funktion ist, kann die Stetigkeit einer Funktion sehr einfach charakterisiert werden: Liegt x_0 in der Definitionsmenge von f , so ist f genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

- **S. 91:** „Kosinus“ und „Cosinus“ sind zwei gleichberechtigte Schreibweisen. Beachten Sie das, wenn Sie in einem elektronischen Text nach diesem Stichwort suchen!

K Nachbemerkenngen zur Stetigkeit

- Wieso ist für den Begriff der Stetigkeit eine relativ komplizierte Definition nötig? Reicht es nicht aus, zu sagen, dass der Graph einer stetigen Funktion „ohne abzusetzen“ gezeichnet werden kann, d.h. dass er eine zusammenhängende Linie ist? Dass dieses intuitive Bild seine Grenzen hat, zeigt das Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Machen Sie sich bewusst, wie ihr Graph „aussieht“! Sie ist an der Stelle 0 nicht stetig. Hingegen ist die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0 (und somit überall) stetig. Auch ihr Graph kann nicht ohne Weiteres „gezeichnet“ werden.

- Auf S. 81 sind zwei zueinander äquivalente Definitionen der Stetigkeit einer reellen Funktion angegeben. Wir erwähnen noch eine dritte Definition, beschränken uns dabei auf Funktionen, die auf ganz \mathbb{R} definiert sind:

Satz: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann (an jeder Stelle) stetig, wenn das Urbild jeder offene Menge offen ist.

Dabei ist das Urbild einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, meist als $f^{-1}(A)$ bezeichnet, die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x) \in A$ ist. Diese Definition der Stetigkeit kann auf Funktionen von ganz anderen Mengen in ganz andere Mengen verallgemeinert werden, sofern in beiden Mengen der Begriff „offene Menge“ definiert ist.

- Ergänzend sei hier noch ein anderer, restriktiverer Stetigkeitsbegriff erwähnt:

Definition: Wir nennen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ **gleichmäßig stetig**, wenn Folgendes gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, sodass aus $x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta_\varepsilon$ folgt

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Vergleichen Sie diese Definition mit der im Buch angegebenen „ ε - δ -Definition“ der Stetigkeit (S. 81)! Was ist der Unterschied? Der Unterschied liegt darin, dass es bei der gleichmäßigen Stetigkeit zu jedem vorgegebenen (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein einheitliches $\delta_\varepsilon > 0$ geben muss, das für beliebige $x, x' \in D$ die Implikation

$$|x - x'| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

bewirkt. Bei der Stetigkeit in einem gegebenen Punkt x' hingegen darf δ_ε von x' abhängen. Daher ist eine gleichmäßig stetige Funktion stetig (d.h. sie ist an jeder Stelle stetig), aber nicht jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig. Beispiel: Die Funktion $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, denn je weiter man sich von 0 entfernt, umso kleiner müsste δ_ε für ein vorgegebenes ε gewählt werden, so dass es im Endeffekt kein einheitliches δ_ε gibt. Allerdings gilt: Eine in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

- Die Mathematik kennt weitere – für verschiedene, auch physikalische Zwecke benötigte und im Allgemeinen nicht äquivalente – Variationen des Stetigkeitsbegriffs. Die wichtigsten sind die „Lipschitz-Stetigkeit“ und ihre Verallgemeinerung, die „Hölder-Stetigkeit“, die aber über den Horizont dieser Lehrveranstaltung hinausgehen.

3.4 Logarithmus und Exponentialfunktion

- **S. 96, Kasten „Definition: Natürlicher Logarithmus“:** Der natürliche Logarithmus ist durch die beiden Eigenschaften 1) und 2) *eindeutig* festgelegt, d.h. es gibt nur eine einzige Funktion, die diese beiden Eigenschaften besitzt, nämlich \ln . Diese wichtige Tatsache wird erst später im Satz am Ende der Seite formuliert, sollte aber schon hier stehen. Die hier vorgeführte Methode, den natürlichen Logarithmus einzuführen, mag Ihnen seltsam erscheinen, aber sie ist vollkommen legitim.
- **S. 96, oberhalb des Kastens „Satz: Logarithmus als Grenzwert“:** Hier wird gesagt, dass man zur Festlegung der Logarithmusfunktion die n -te Wurzel und den Grenzwertbegriff bei Folgen benötigt. Das stimmt insofern nicht, als der natürliche Logarithmus zuvor (im ersten Kasten auf dieser Seite) ja bereits definiert wurde. Das Wort „Festlegung“ ist hier im Sinn der Angabe einer konkreten („konstruktiven“) Zuordnungsvorschrift, also einer Aussage der Form „ $\ln(x) = \dots$ “ gemeint. Es gibt auch andere Verfahren, den Logarithmus über eine Zuordnungsvorschrift zu charakterisieren, z.B. als Integral oder durch seine Taylorreihe (wie später behandelt).

4 Differenzierbare Funktionen

4.1 Begriff der Ableitung

- **S. 105, Kasten „Definition: Differenzierbarkeit“:** Die Schreibweise $\frac{d}{dx}f(x_0)$ ist missverständlich, da $f(x_0)$ ja konstant ist! Besser sind die ebenfalls dort angegebenen Schreibweisen $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $f'(x_0)$. Erlaubt ist auch $\frac{d}{dx}f(x)$, denn $\frac{d}{dx}$ ist als Anweisung „Differenziere, was jetzt kommt!“ zu lesen, oder $\frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}$, wobei der senkrechte

Strich als „an der Stelle“ zu lesen ist. Wenn klar ist, was gemeint ist, ist auch die etwas saloppe Schreibweise $f(x)'$ zulässig. Sie wird gern verwendet, wenn nur ein Funktionsterm – ohne eigenen Funktionsnamen – differenziert werden soll. Beispiel: $(x^2 \sin(x))'$. In der Physik wird die Ableitung nach einer Zeitvariable (die meist mit t bezeichnet wird) gern mit einem Punkt angeschrieben, also etwa $\dot{x}(t)$ für die Geschwindigkeit eines Teilchens, das sich zum Zeitpunkt t an der Stelle $x(t)$ befindet. (Achtung: In diesem Fall ist x der Funktionsname! Die betrachtete Funktion – Ortskoordinate als Funktion des Zeitpunkts – ist vom Typ $x : t \mapsto x(t)$).

- **S. 106, unterhalb der obersten Formelzeile:** Hier wird gesagt, dass die angegebene Grenzwertbildung auch im linken bzw. rechten Randpunkt des Intervalls (a, b) sinnvoll ist. Um die angegebenen Formeln für $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ anwenden zu können, muss klar sein, was $f(a)$ oder $f(b)$ ist. Nun ist aber f gemäß Voraussetzung (S. 105) nur im *offenen* Intervall (a, b) definiert, so dass zunächst gar nicht klar ist, was $f(a)$ bzw. $f(b)$ bedeuten sollen. Um den angegebenen Formeln auch an den Randpunkten einen Sinn zu geben, muss f dort ebenfalls definiert sein. Die **rechtsseitige** bzw. **linksseitige Ableitung** hat nur dann eine Chance zu existieren, wenn f dort stetig ist, d.h. wenn der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle a bzw. der linksseitige Grenzwert an der Stelle b existiert. Eine Alternative wäre, gleich eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten. Aber auch dann kann die rechts- bzw. linksseitige Differenzierbarkeit gegeben sein oder nicht. (Wie später – auf Seite 111 oben – eher nebenbei erwähnt wird, impliziert die Differenzierbarkeit einer Funktion deren Stetigkeit – aber natürlich nicht umgekehrt).
- **S. 110, 1. Zeile und Kasten darunter:**
 - Obwohl Funktion und Graph hier sprachlich miteinander identifiziert werden, handelt es sich um unterschiedliche Dinge: t ist eine Funktion und keine Gerade! Ihr Graph ist eine Gerade und heißt Tangente. Diese berührt nicht die Funktion, sondern den Funktionsgraphen!
 - Die „Berührungseigenschaft der Tangente“ besagt, dass der Graph einer differenzierbaren Funktion eine wohldefinierte Tangente besitzt. Das führt zu der sehr einprägsamen Vorstellung, dass der Graph einer differenzierbaren Funktion „glatt“ ist, also „keinen Knick“ hat, so dass sich in jedem seiner Punkte eine berührende Gerade „zeichnen“ lässt. Aber Achtung: Wird der (wunderbar glatte) Graph einer Funktion von einer Geraden berührt, die parallel zur zweiten Achse verläuft, so ist die Funktion dort nicht differenzierbar!

Beispiel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{|x|} & \text{wenn } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|} & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

(Wenn Sie festlegen, dass $\sqrt[3]{x}$ auch für negative x definiert sein soll, etwa $\sqrt[3]{-8} = -2$, so ist f einfach durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$ definiert). Sehen sie sich den Graphen dieser Funktion an und berechnen Sie ihre Ableitung! Die Ableitung existiert an der Stelle 0 nicht.

Das bedeutet: Der hier formalisierte Tangentenbegriff schließt „vertikale Tangenten“ aus!

- **S. 110, unterhalb des Kastens:** Hier wird eine Formulierung der Differenzierbarkeit angegeben, von der dazugesagt wird, dass sie sofort auf den mehrdimensionalen Fall übertragen werden kann. Das ist ein wichtiger Punkt! Der angesprochene Sachverhalt kann auch in einer Form ausgedrückt werden, die eine Division durch $|x - x_0|$ vermeidet:

Satz: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, wenn es eine Funktion t der Form $t(x) = kx + d$ gibt, für die Folgendes gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung U_ε von x_0 , so dass

$$|f(x) - t(x)| \leq \varepsilon |x - x_0| \quad \text{für alle } x \in U.$$

Der Satz funktioniert auch, wenn U_ε auf eine Umgebung der Form $(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ eingeschränkt wird. Er lautet dann:

Satz: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, wenn es eine Funktion t mit $t(x) = kx + d$ gibt, für die Folgendes gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass aus $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ folgt

$$|f(x) - t(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|.$$

Wird $t(x)$ in der Form $k(x - x_0) + f(x_0)$ geschrieben, so erhalten wir eine weitere Formulierung:

Satz: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, für das Folgendes gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass aus $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ folgt

$$|f(x) - f(x_0) - k \cdot (x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|.$$

Etwas salopp formuliert, sagen alle diese Varianten aus, dass eine Funktion an einer gegebenen Stelle differenzierbar ist, wenn sie in der Nähe dieser Stelle durch eine Funktion der Form $x \mapsto kx + d$ approximiert werden kann.

Anmerkung: Wir haben es hier vermieden, t eine *lineare Funktion* zu nennen, denn mit dieser Bezeichnung kann zweierlei gemeint sein: Im Sinn der linearen Algebra ist eine lineare Funktion $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der Form $t(x) = kx$. In Ihrem Mathematikunterricht wurde eine Funktion t mit $t(x) = kx + d$ ebenfalls als linear bezeichnet. In diesem Punkt ist auch die wissenschaftliche Literatur nicht einheitlich.

- **S. 111, 1. Zeile:** Bitte beachten Sie diese nicht eigens hervorgehobene Stelle: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit! Der Beweis ist einfach: Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left((x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)}_0 \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} = 0$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

was nichts anderes besagt, als dass f an der Stelle x_0 stetig ist.

- Nun ist noch ein kleiner Nachtrag zu diesem Abschnitt angebracht: Eine auf einem Intervall definierte Funktion f heißt **differenzierbar** (ohne Verweis auf eine bestimmte Stelle), wenn sie an *jeder* Stelle differenzierbar ist. Es existiert dann also die Ableitungsfunktion f' . Ist darüber hinaus die Ableitungsfunktion stetig, so nennen wir f **stetig differenzierbar**. Dieser Begriff wird im Buch nicht definiert, aber an späteren Stellen verwendet. Er ist nicht überflüssig, denn es gibt Funktionen, die differenzierbar, aber *nicht* stetig differenzierbar sind. Hier ein Beispiel:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Die Ableitung $f'(x)$ existiert an jeder Stelle x , d.h. f ist differenzierbar, aber die Ableitungsfunktion f' ist an der Stelle 0 unstetig. (Übungen!)

- Abschließend erwähnen wir, dass es Funktionen gibt, die an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereichs stetig, aber *nirgends differenzierbar* sind. Sie illustrieren, dass intuitive Vorstellungen über Funktionen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit ihre Grenzen haben. Wenn Sie nicht bereits einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion begegnet sind, überlegen Sie zuerst selbst, wie eine solche Funktion „aussehen“ könnte! Danach sehen Sie sich zwei Beispiele unter <http://www.mathe-online.at/mathint/diff2/i.html#Nirgdiffbar> an!

4.2 Ableitungsregeln

- **S. 114, „Satz: Kettenregel“:** Die Kettenregel ist so wichtig für die Physik, dass wir sie hier beweisen:

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Der zweite Grenzwert ist $f'(x_0)$. Um den ersten Grenzwert zu berechnen, wählen wir eine Folge (x_n) von Zahlen $\neq x_0$, die gegen x_0 konvergiert, und setzen $f(x_n) = y_n$ und

$f(x_0) = y_0$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt $y_n \rightarrow y_0$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = g'(y_0) = g'(f(x_0)). \end{aligned}$$

Da g als differenzierbar vorausgesetzt wurde, genügt es hier, den Grenzübergang mit einer einzigen Folge (y_n) durchzuführen. Es gilt dann automatisch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = g'(y_0)$$

für *jede* Folge (y_n) mit $y_n \neq y_0$, die gegen y_0 konvergiert. Damit ist die Kettenregel bewiesen. Was hinter dieser Argumentation steckt, kann man in heuristischer Weise („quick and dirty“) so begründen:

$$\begin{array}{lll} \text{Funktion } f: & y = f(x) & \text{Ableitung: } f' = \frac{dy}{dx} \\ \text{Funktion } g: & z = g(y) & \text{Ableitung: } g' = \frac{dz}{dy} \\ \text{Funktion } g \circ f: & z = g(f(x)) & \text{Ableitung: } (g \circ f)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = g' \cdot f' \end{array}$$

wobei die korrekte Version erhalten wird, indem die richtigen Argumente hingeschrieben werden: g' wird an der Stelle $f(x)$ ausgewertet und f' an der Stelle x . Im Kern besteht diese Kurzversion einfach darin, ein $1 = \frac{dy}{dy}$ einzuschieben!

- **S. 115:** Tipp zur Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß: Wird konsequent das Gradzeichen $^\circ$ geschrieben, wenn es sich um eine Winkelangabe im Gradmaß handelt, so müssen für die Darstellung eines Winkels in Grad- und Bogenmaß nicht zwei verschiedene Symbole verwendet werden. Mit $360^\circ = 2\pi$ und den daraus folgenden Umrechnungsformeln

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \quad \text{und} \quad 1 = \frac{180^\circ}{\pi}$$

gestaltet sich eine konkrete Umrechnung wie eine Umrechnung von Einheiten, beispielsweise

$$30^\circ = 30 \cdot 1^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}.$$

Dann können auch die etwas unschönen Symbole wie \sin_G und \sin_B , die Sie im Buch finden, umgangen werden, und es ist beispielsweise

$$\sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Auch die Bezeichnung rad für „Radiant“ ist dann unnötig. Wo immer Sie sie sehen, können Sie $\text{rad} = 1$ setzen.

- **S. 116/117:** Für die **Arkusfunktionen** \arcsin , \arccos und \arctan sind auch die Bezeichnungen asin , acos und atan gebräuchlich. Ihr Name (von *arcus* = Bogen) rührt daher, dass sie einen Winkel im Bogenmaß (also die Länge eines Bogens am Einheitskreis) zurückliefern. Aber Achtung: Es gibt mehrere Winkel x zu einem gegebenen Wert von $\sin(x)$, und das Gleiche gilt für $\cos(x)$ und $\tan(x)$! Das ist insbesondere bei der Berechnung von Polarkoordinaten bei gegebenen kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi)\end{aligned}$$

zu beachten! (Erinnern Sie sich an die komplexen Zahlen!) Die oft angegebene Formel

$$\varphi = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

gilt nur, wenn $x > 0$ ist, d.h. wenn der Punkt (x, y) im ersten oder vierten Quadranten liegt. Ist $x < 0$, d.h. liegt der Punkt (x, y) im zweiten oder dritten Quadranten, so gilt

$$\varphi = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi.$$

- **S. 116, Kasten „Satz: Ableitung der Umkehrfunktion“:** Die hier angegebenen Ausdrücke für $(f^{-1})'$ kann man in heuristischer Weise („quick and dirty“) so begründen:

$$\begin{array}{ll} \text{Funktion:} & y = f(x) \quad \text{Ableitung:} \quad f' = \frac{dy}{dx} \\ \text{Umkehrfunktion:} & x = f^{-1}(y) \quad \text{Ableitung:} \quad (f^{-1})' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'} \end{array}$$

- **S. 119:** Die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen \sinh und \cosh werden oft kurz mit asinh und acosh bezeichnet. Sie werden auch **Areafunktionen** genannt. Dieser Name (von *area* = Fläche) rührt daher, dass sie den Flächeninhalt eines Sektors der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ darstellen.⁶

4.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

- **S. 121:** „Relative Maximalstelle“ ist – wie bereits erwähnt – ein Synonym für „lokale Maximalstelle“.
- **S. 124, Kasten „Satz: Monotoniekriterium“:** Genau genommen ist nicht $f(x)$ monoton fallend/steigend, sondern f . Trotz der weit verbreiteten sprachlicher Laxheit, die dazu neigt, den Unterschied zwischen Funktionen und Funktionswerten nicht genau zuzunehmen, sollte man diesen Unterschied kennen!
- **S. 125:** Auf dieser Seite werden an zwei Stellen die *Regeln von de l'Hospital* erwähnt, sie werden aber erst später im Buch (S. 126 und S. 127) besprochen.

⁶ Konkret funktioniert das so: Durch $x(t) = \cosh(t)$ und $y(t) = \sinh(t)$ ist, wenn t die Menge \mathbb{R} durchläuft, eine Parameterdarstellung des rechten Astes der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ festgelegt. Der Flächeninhalt des durch die drei Punkte $(x(t), y(t))$, $(0, 0)$ und $(x(-t), y(-t))$ definierten Hyperbelsektors ist gleich $|t|$.

- **S. 126/127:** Beachten Sie, dass die *Regeln von de l'Hospital* nur angewandt werden dürfen, wenn die auf Zähler und Nenner separat angewandte Grenzwertbildung auf eine *unbestimmte Form* $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ (oder, wenn $\frac{f(x)}{g(x)}$ in der Form $\frac{1}{g(x)} \cdot f(x)$ geschrieben wird, auf eine *unbestimmte Form* $0 \cdot \infty$) führt, wobei ∞ in dieser saloppen Formulierung auch für $-\infty$ stehen kann (mit der kleinen Ausnahme, dass in der allgemeinen Form auf Seite 127 neben $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \mp \infty$ keine entsprechende Bedingung für f nötig ist, wengleich üblicherweise zusätzlich $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ verlangt wird).

Im Buch wird (in den beiden Kästen) verlangt, dass f und g in einem Umgebung von a differenzierbar sind. Tatsächlich genügt es, wenn f und g in einer Menge der Form $(b, a) \cup (a, c)$ definiert und jeweils zu einer auch an der Stelle a definierten differenzierbaren Funktion erweiterbar sind.

5 Integration

5.1 Riemannsche Summen

In den Definitionen und Sätzen dieses Abschnitts im Buch wird vorausgesetzt, dass $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion ist. Wie auf Seite 132 erwähnt, geht es auch etwas allgemeiner: Wird lediglich vorausgesetzt, dass f beschränkt ist, so können alle Aussagen übernommen werden, wenn die Begriffe Minimum und Maximum durch Infimum und Supremum (siehe oben) ersetzt werden, wobei hier das Infimum und das Supremum des Bildes $f([a, b])$ gemeint sind. Aufgrund der Beschränktheit von f existieren diese beiden Größen.

- **S. 132 – 137:** Die im Buch vorgeführte Argumentation, die schließlich zur Definition des Riemannsches Integrals führt, verläuft über Riemannsche Summen. Sie ist von großem praktischen Wert, da sie einen „konstruktiven“ Weg aufzeigt, wie Integrale näherungsweise numerisch berechnet werden können. Es gibt aber eine kürzere, dazu äquivalente Variante, zum Begriff des Integrals zu gelangen: Ausgehend von der Definition von Unter- und Obersummen (S. 132) und der Tatsache, dass für eine beschränkte Funktion f jede Untersumme kleiner-gleich jeder Obersumme ist⁷, d.h. $\underline{S}(f, P_1) \leq \overline{S}(f, P_2)$ für beliebige Partitionen P_1 und P_2 , kann definiert werden:

Definition: f heißt Riemann-integrierbar (kurz integrierbar), wenn es *genau* eine Zahl c gibt mit der Eigenschaft

$$\underline{S}(f, P_1) \leq c \leq \overline{S}(f, P_2) \text{ für beliebige Partitionen } P_1 \text{ und } P_2,$$

d.h. wenn Unter- und Obersummen einander beliebig nahe kommen. Die Zahl c heißt dann das Riemannsche Integral (kurz Integral) von f über das Intervall $[a, b]$. Es heißt auch **bestimmtes Integral**, da es für bestimmte Grenzen (a und b) definiert ist (im Gegensatz zum später zu besprechenden „unbestimmten“ Integral).

⁷ Auf S. 135 steht, „dass Untersummen stets kleiner als Obersummen sind“. Hier muss es „kleiner-gleich“ heißen.

- **S. 136, Kasten „Satz: Riemannsche Summen, Untersummen und Obersummen“:** Tippfehler! \tilde{P} ist durch P zu ersetzen! Der Satz besagt: Zu einer gegebenen Partition P ist die Untersumme \leq jeder Riemannschen Summe \leq der Obersumme.
- **S. 137, Kasten „Satz: Riemannsches Integral“:** Da im Buch die Stetigkeit von f vorausgesetzt ist, besagt der Satz, dass jede in einem abgeschlossenen Intervall *stetige* Funktion Riemann-integrierbar ist. Wird die Voraussetzung der Stetigkeit fallen gelassen, so gibt der folgende Satz Auskunft über die Menge *aller* Riemann-integrierbaren Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall:

Lebesgue-Kriterium: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie *beschränkt* und *fast überall stetig* ist.

„Fast überall“ bedeutet: „überall außer auf einer Nullmenge“, wobei eine *Nullmenge* eine Menge „vom Maß Null“ ist, d.h. eine Menge, deren „Inhalt“ („Länge“) nach dem Riemannschen Integralbegriff gleich 0 ist. Wir gehen auf diesen Begriff nicht genauer ein, sondern erwähnen lediglich, dass jede endliche Menge eine Nullmenge ist. Daraus folgt, d.h. dass jede Funktion, die beschränkt und überall außer an endlich vielen Stellen (Sprungstellen) stetig ist, Riemann-integrierbar ist. Diese Tatsache wird im Buch etwas später auf S. 142 (unterhalb des Kastens) erwähnt.

- **S. 141/142:** Hier wird von der „Fläche unter einer Kurve“ (genauer: der Fläche unter dem Graphen einer Funktion) gesprochen. Beachten Sie, dass im Kasten auf S. 141 $f(x) \geq 0$ vorausgesetzt ist! Ein Begriff, der diese Einschränkung nicht benötigt, ist der **orientierte Flächeninhalt**: Für ihn zählt eine Fläche „oberhalb“ der x -Achse positiv, eine Fläche „unterhalb“ der x -Achse negativ. Damit kann formuliert werden: Das bestimmte Integral gibt den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x -Achse an.

Zur **Schreibweise des bestimmten Integrals**: Neben der im Buch verwendeten Schreibweise

$$\int_a^b f(x) dx$$

ist auch die Schreibweise

$$\int_a^b dx f(x)$$

gebräuchlich. Die erste hat den Vorteil, dass der **Integrand** $f(x)$ zwischen den Symbolen \int_a^b und dx steht. Die zweite hat den Vorteil, dass die **Integralgrenzen** a und b und die **Integrationsvariable** x gemeinsam in der Form $\int_a^b dx$ angeschrieben werden, was es insbesondere erleichtert, den Überblick über Mehrfachintegrale, in denen es mehrere Integrationsvariable und daher mehrere Integrationssymbole gibt, zu bewahren. In dieser zweiten Schreibweise ist $\int_a^b dx \dots$ als „Integral über das Folgende“ zu verstehen, ähnlich wie $\frac{d}{dx} \dots$ als „Ableitung des Folgenden“ verstanden wird.

Ergänzend sei hier noch angemerkt, dass es neben dem Riemannschen einen allgemeineren Integralbegriff gibt, das **Lebesgue-Integral**, das insbesondere dann, wenn ganze „Räume von

integrierbaren Funktionen“ benötigt werden (wie etwa in der Quantenphysik) von Vorteil ist, auf das aber in dieser Lehrveranstaltung nicht näher eingegangen wird. Nur soviel sei gesagt: Jede Riemann-integrierbare Funktion ist Lebesgue-integrierbar, und für diese Funktionen stimmen die beiden Integralbegriffe überein.

5.2 Der Hauptsatz

- **S. 143, Kasten „Mittelwertsatz der Integralrechnung“:** Die hier angegebene Formel kann in der Form

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

geschrieben werden. Die rechte Seite kann als „Mittelwert“ der Funktion im Intervall $[a, b]$ angesehen werden (und wird manchmal mit \bar{f} bezeichnet). Machen Sie sich klar, dass dieser Ausdruck eine Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels von Zahlen („Summe dividiert durch Anzahl“) darstellt! Eine physikalische Anwendung ist diese: Ist eine Wechselspannung durch $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ und die zugehörige Stromstärke (im ohmschen Fall) durch $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ gegeben, so ist der Mittelwert der umgesetzten elektrischen Leistung $P(t) = U(t)I(t)$ über eine Periodendauer, d.h. im Intervall $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$, durch

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} U_0 I_0 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

gegeben. Das ist der Grund, warum $\frac{U_0}{\sqrt{2}}$ und $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ als *Effektivwerte* von Spannung und Stromstärke bezeichnet werden: Die mittlere Leistung des Wechselstroms ist gleich der Leistung eines Gleichstroms mit diesen Effektivwerten von Spannung und Stromstärke.

5.3 Unbestimmte Integration

- **S. 155, Kasten „Satz: Substitutionsregel (zweite Form)“:** Tippfehler! In der Formel muss $t = \phi^{-1}(x)$ stehen statt $t = \phi^{-1}(t)$!

5.4 Gebrochen rationale Funktionen

- **S. 163, Kasten „Satz: Integration eines Pols“:** Wir nennen x_0 eine **Polstelle** (kurz **Pol**) n -ter Ordnung ($n \in \mathbb{N}$) der differenzierbaren Funktion $f : (a, x_0) \cup (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^n f(x) = K \neq 0.$$

Die Funktion f kann in der Nähe der Polstelle daher in der Form $f(x) \approx \frac{K}{(x-x_0)^n}$ approximiert werden.

Dass hier ein „+c“ fehlt, ist nicht schlimm, da klar ist, was gemeint ist. Auch an einigen anderen Stellen im Buch wird das „+c“ bei unbestimmten Integralen weggelassen.

- **S. 165, Kasten „Satz: Partialbruchzerlegung“:** Spätestens an dieser Stelle ist es angebracht, klarzustellen, dass in der täglichen Arbeit des Physikers und der Physikerin

nichts dagegen spricht, bei der Berechnung komplizierter Integrale den Computer zu Hilfe zu nehmen! **Computeralgebra-Systeme** (wie *Mathematica*) erledigen das Integrieren sehr zuverlässig. Zur Probe, um ganz sicher zu gehen, kann man die von einem derartigen Programm ausgegebene Stammfunktion händisch differenzieren und sollte wieder den Integranden erhalten. Im Licht der technologischen Entwicklung der letzten Jahrzehnte ist es vertretbar, wenn auf die Partialbruchzerlegung in der hier formulierten Allgemeinheit nicht im Detail eingegangen wird.

5.5 Uneigentliche Integrale

Keine Ergänzung zu diesem Abschnitt.

6 Taylorentwicklung

6.1 Der Satz von Taylor

- **S. 179, Kasten „Satz: Satz von Taylor“:** Um diesem Satz seinen Schrecken zu nehmen, betrachten Sie ihn für den Fall $n = 1$. Er behauptet dann die Existenz einer Zwischenstelle ξ_x , so dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_x)(x - x_0)$$

gilt. In der Form

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

angeschrieben, wird klar, dass die Existenz von ξ_x eine Konsequenz des Mittelwertsatzes (S. 122) ist! Wie im Text oberhalb des Kastens erwähnt, ist der Satz von Taylor eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

- **S. 179, Kasten „Definition: Taylorpolynom“:** Der *Entwicklungspunkt* wird auch *Entwicklungsstelle* oder *Mittelpunkt* genannt. Man spricht von der *Entwicklung um den Punkt x_0* (oder *um die Stelle x_0*).

6.2 Die Taylorreihe

- **S. 188, Kasten „Definition: Taylorreihe“:** Beachten Sie, dass die Taylorreihe („formal“) immer hingeschrieben werden kann, d.h. in diesem Sinn immer „existiert“. (Eine Reihe ist ja als Folge der Teilsummen definiert). Eine andere Frage ist, für welche x sie konvergiert und – wiederum eine andere Frage – für welche x ihre Summe mit $f(x)$ übereinstimmt.
- **S. 188, Kasten „Satz: Konvergenz der Taylorreihe“ und der Text darunter:** Wie das Beispiel unterhalb des Kastens zeigt, ist auch für eine unendlich oft differenzierbare Funktion nicht garantiert, dass sie mit ihrer Taylorreihe übereinstimmt. Daher ist ein neuer Name angebracht: Wir nennen eine auf einem offenen Intervall D definierte, unendlich oft differenzierbare Funktion f **analytisch** (oder **reell-analytisch**), wenn jede

Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 \in D$ in einer Umgebung von x_0 konvergiert und dort mit f übereinstimmt.

L Komplexe Exponentialfunktion

Für dieses – im Buch nicht enthaltene – Kapitel wird das Lehrbuch *Franz Embacher: Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik* (Kapitel 4), <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/grundlagen/>, das auch als eBook der Universitätsbibliothek zur Verfügung steht, zugrunde gelegt.

6.3 Extremalstellen

- **S. 195, Kasten „Definition: Wendestelle“ und der Text darunter:** Die Begriffe *Wendestelle*, *konvex* und *konkav* können mit sparsameren Voraussetzungen definiert werden: Sei f eine auf einem Intervall D definierte reelle Funktion f .

- Wir nennen f **konvex**, wenn

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2 \in D \text{ und } \lambda \in [0, 1].$$

Das ist dann der Fall, wenn jede Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten des Graphen von f nirgends unterhalb des Graphen liegt. Ist die Funktion f zusätzlich zweimal differenzierbar, so nennen wir sie auch **linksgekrümmt**, was dann gleichbedeutend ist mit $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

- Wir nennen f **konkav**, wenn

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2 \in D \text{ und } \lambda \in [0, 1].$$

Das ist dann der Fall, wenn jede Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten des Graphen von f nirgends oberhalb des Graphen liegt. Ist die Funktion f zusätzlich zweimal differenzierbar, so nennen wir sie auch **rechtsgekrümmt**, was dann gleichbedeutend ist mit $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.

- Nun sei f zusätzlich stetig. Eine Stelle x_0 im Inneren von D heißt **Wendestelle**, wenn es Intervalle $(c, x_0) \subseteq D$ und $(x_0, d) \subseteq D$ gibt, so dass f in (c, x_0) konvex und in (x_0, d) konkav oder in (c, x_0) konkav und in (x_0, d) konvex ist. Der zu einer Wendestelle gehörende **Wendepunkt** ist der Punkt $(x_0, f(x_0))$ am Graphen von f . Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt an jeder Wendestelle $f''(x_0) = 0$. (Das ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung, wie das Beispiel $f(x) = x^4$ für $x \in \mathbb{R}$ zeigt).

7 Reihen

7.1 Konvergenzkriterien

- **S. 206, Kasten „Satz: Quotientenkriterium“:** Mit schwächeren Voraussetzungen kommt die folgende Variante des Quotientenkriteriums aus: Gibt es ein $q < 1$, so dass ab irgendeinem Index

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| \leq q$$

gilt, so ist die Reihe absolut konvergent. Gilt hingegen für unendlich viele Indizes

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| \geq 1,$$

so ist die Reihe divergent. Für diese Version des Kriteriums muss der im Buch mit g bezeichnete Grenzwert nicht existieren.

- **S. 206, Kasten „Satz: Wurzelkriterium“:** Mit schwächeren Voraussetzungen kommt die folgende Variante des Wurzelkriteriums aus: Gibt es ein $q < 1$, so dass ab irgendeinem Index

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq q$$

gilt, so ist die Reihe absolut konvergent. Gilt hingegen für unendlich viele Indizes

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \geq 1,$$

so ist die Reihe divergent. Für diese Version des Kriteriums muss der im Buch mit g bezeichnete Grenzwert nicht existieren.

- **S. 210, Kasten „Integralkriterium für Reihen“:** Tippfehler! Es muss heißen „für alle $x \in [1, \infty)$ “ statt „für alle $x \in [1, \infty]$ “.

7.2 Potenzreihen

- **S. 216, Kasten „Satz: Konvergenz einer Potenzreihe“:** Allgemein ist der Konvergenzradius durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$$

gegeben, wobei \limsup der *Limes superior* (der „größte Häufungspunkt einer Folge“) ist, auf den wir aber nicht näher eingehen. Um ρ auf diese Weise zu berechnen, muss der im Buch mit g bezeichnete Grenzwert nicht existieren.

- Wir erwähnen, dass es Potenzreihen gibt, die nur an ihrem Entwicklungspunkt x_0 konvergieren. Ein Beispiel ist die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^\nu x^\nu = 1 + 4x^2 + 27x^3 + 256x^4 + \dots$$

Ihr Konvergenzradius ist gleich 0.

7.3 Rechnen mit Potenzreihen

- **S. 221, Kasten „Satz: Addition und Multiplikation von Potenzreihen“:** Hier heißt es „entstehen Potenzreihen mit demselben Konvergenzradius“. Tatsächlich kann der Konvergenzradius einer so konstruierten Reihe größer sein als jener der ursprünglichen Reihen. Weiters kann die (oberhalb des Kastens formulierte) Bedingung, dass die beiden Ausgangsreihen den gleichen Konvergenzradius haben, abgeschwächt werden. Wichtig ist die Aussage, dass in jedem offenen Intervall, in dem zwei Potenzreihen konvergieren, auch die hier definierten Reihen, die deren Summe und Produkt darstellen, konvergieren.

M Rechnen mit Näherungen, O -Symbol, o -Symbol

Wird eine Potenzreihe ab einem gewissen Glied angebrochen, so wird der weggelassene Teil üblicherweise mit dem O -Symbol gekennzeichnet. Um beispielsweise von der Reihe

$$e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu!}$$

nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung in x zu berücksichtigen, schreibt man

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Das Symbol $O(x^3)$ steht hier für eine Potenzreihe, deren Koeffizienten aller Potenzen x^{ν} mit $\nu \leq 2$ verschwinden. Diese Schreibweise wird insbesondere dann verwendet, wenn der mit $O(x^3)$, oder allgemein mit $O(x^n)$ bzw. $O((x - x_0)^n)$ bezeichnete Anteil nicht relevant oder nicht bekannt ist. Mit derartigen Objekten kann durchaus gerechnet werden, wie dieses Beispiel zeigt:

$$(1 + 2x - 3x^2 + O(x^3)) (2 - 7x + O(x^4)) = 2 - 3x - 20x^2 + O(x^3).$$

Rechnerisch werden dabei auf der Hand liegende Umformungsregeln wie

$$\begin{aligned} 2 O(x^3) &= O(x^3) \\ 2 x^2 O(x^4) &= O(x^6) \\ O(x^3) O(x^4) &= O(x^7) \\ O(x^3) + O(x^4) &= O(x^3) \end{aligned}$$

verwendet. Ein schönes, in der Speziellen Relativitätstheorie auftretendes Beispiel ist

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + c^2 O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^6\right).$$

Als Variable ist hier das Verhältnis $\frac{v}{c}$ gewählt.

Allgemeiner kann das O -Symbol verwendet werden, um auszudrücken, dass eine Funktion f für $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$ oder $x \rightarrow \infty$ (oder $x \rightarrow -\infty$) betragsmäßig nicht schneller wächst als eine Vergleichsfunktion g . Mit der Schreibweise $f = O(g)$, oder auch $f \in O(g)$, wird ausgedrückt, dass $|f/g|$ beim betreffenden Grenzübergang beschränkt bleibt. Beispiele:

- Für $x \rightarrow 0$ ist $x^2 \sin(x) = O(x^3)$.
- Für $x \rightarrow 0$ ist $\frac{3 \sin(x)}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Für $x \rightarrow \infty$ ist $\frac{3 \sin(x)}{x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Mit der Schreibweise $f = o(g)$ oder $f \in o(g)$ wird ausgedrückt, dass f betragsmäßig *langsamer* wächst als eine Vergleichsfunktion g , d.h. dass $f/g \rightarrow 0$ gilt. Beispiele:

- Für $x \rightarrow 0$ ist $x^{5/2} = o(x)$.
- Für $x \rightarrow 0$ ist $x^{5/2} = o(x^2)$.
- Für $x \rightarrow \infty$ ist $\frac{5}{x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Für den Grenzübergang $x \rightarrow 0$ könnte mit $x \cos(x) + O(x^2)$ beispielsweise $x \cos(x) + 3x^2$ oder $x \cos(x) - 2x^3$ gemeint sein. Mit $x \cos(x) + o(x^2)$ hingegen könnte $x \cos(x) - 2x^3$ gemeint sein, *nicht* aber $x \cos(x) + 3x^2$.

N Zwei Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen

In den physikalischen Anwendungen der Analysis (etwa in der Quantenmechanik) werden nicht nur Folgen von Zahlen, sondern auch Folgen von Funktionen benötigt. Ist eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so stellt sich die Frage, ob man auch dann von Konvergenz sprechen kann. Ja, das kann man, aber es gibt unterschiedliche – nicht-äquivalente – Konvergenzbegriffe, deren wichtigste zwei die folgenden sind:

- **Punktweise Konvergenz:** Wir sagen, dass eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ punktweise gegen die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, wenn für jedes $x \in D$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Das ist gleichbedeutend damit, dass für jedes $x \in D$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

- **Gleichmäßige Konvergenz:** Wir sagen, dass eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$

wobei $\|g\|_\infty = \sup_{x \in D} |g(x)|$ die so genannte *Supremumsnorm (Unendlichnorm)* von g ist. (Ist D ein abgeschlossenes Intervall und g auf D stetig, so ist $\|g\|_\infty$ einfach das Maximum von $|g|$ in D).

- Ist eine Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f , so ist sie auch punktweise konvergent gegen f . Die Umkehrung gilt nicht. Beispiel: Die Folge (f_n) der Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise gegen die durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 1 \\ 1 & \text{wenn } x = 1 \end{cases}$$

definierte Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Da aber $\|f_n - f\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert die Folge nicht gleichmäßig gegen f .

- Die in Kapitel 6 betrachteten Taylorreihen und die in Kapitel 7 diskutierten Potenzreihen können als Funktionenfolgen (d.h. Folgen ihrer Partialsummen) aufgefasst werden. Dabei wurde stets von Konvergenz für festgehaltenes x , d.h. von *punktweiser Konvergenz* gesprochen. Wir tragen an dieser Stelle nach, dass eine Potenzreihe in jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, das ganz innerhalb des Konvergenzbereichs liegt, gleichmäßig konvergiert.

O Komplexe Potenzreihen, analytische Funktionen

Viele der für reelle Folgen, Reihen und Potenzreihen besprochenen Begriffe und Sätze gelten in entsprechend adaptierter Form auch im Komplexen:

- An die Stelle der ε -Umgebung einer reellen Zahl x_0 (also die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt, ein offenes Intervall) tritt die ε -Umgebung einer komplexen Zahl z_0 , die formal genauso definiert ist, nämlich als Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $|z - z_0| < \varepsilon$ gilt, also eine *Kreisscheibe* ohne Rand.
- Eine **komplexe Folge** (z_n) konvergiert gegen $c \in \mathbb{C}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index n_ε gibt, so dass für jeden Index $n > n_\varepsilon$ gilt: $|z_n - c| < \varepsilon$.
- Eine **komplexe Reihe** wird – ganz analog wie eine Reihe im Reellen – als Folge der Teilsummen aufgefasst.
- Damit können **komplexe Potenzreihen**, d.h. Reihen der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

mit $a_\nu \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ betrachtet werden. Eine besonders interessante Eigenschaft komplexer Potenzreihen betrifft ihre Konvergenzbereiche. Es können drei Fälle auftreten:

- Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
- Es existiert eine reelle Zahl $\rho > 0$, so dass die Reihe innerhalb der Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius ρ konvergiert und außerhalb dieser Kreisscheibe divergiert. (Über die Konvergenz für z auf der Kreislinie lässt sich allgemein nichts aussagen, außer dass es zumindest ein solches z gibt, an dem die Reihe divergiert). Man spricht auch vom **Konvergenzkreis**.

- Die Reihe konvergiert nur für $z = z_0$.

Im ersten Fall kann $\rho = \infty$ gesetzt werden, im letzten Fall $\rho = 0$. Wie im Reellen heißt ρ **Konvergenzradius**, und hier wird klar, woher er seinen Namen hat! Es klärt sich auch auf, warum die Konvergenzbereiche reeller Potenzreihen von der Entwicklungsstelle aus gleich weit in beide Richtungen reichen: Sind x_0 und alle a_ν reell, so kann die reelle Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x - x_0)^\nu$ auch als komplexe Potenzreihe aufgefasst werden, indem $x \in \mathbb{C}$ zugelassen wird. Ihr Konvergenzbereich ist eine Kreisscheibe, deren Durchschnitt mit der reellen Achse (abgesehen von den Randpunkten, die zum Konvergenzbereich gehören können oder auch nicht) ein bezüglich x_0 symmetrisches Intervall ist!

- Auch die **Taylorreihe einer reellen Funktion** kann als komplexe Potenzreihe aufgefasst werden (wieder, indem für x auch komplexe Werte zugelassen werden). Auf diese Weise können reell-analytische Funktionen *ins Komplexe fortgesetzt* werden – eine Technik, die in der Physik des Öfteren benötigt wird. (Ein Beispiel einer derartigen „Fortsetzung ins Komplexe“ ist die **komplexe Exponentialfunktion**, die bereits besprochen wurde).
- Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch Potenzreihen definiert werden, also in der Form

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu,$$

heißen **analytisch**. Sie lassen sich in der Regel über den ursprünglichen Konvergenzbereich hinaus ausdehnen. Diese Funktionen und ihre Eigenschaften, sowie die komplexen Varianten des Differenzierens und Integrierens, werden im mathematischen Teilgebiet der *komplexen Analysis* oder *Funktionentheorie* studiert. Viele Eigenschaften reeller Funktionen können vor diesem Hintergrund besser verstanden werden als von einem rein reellen Standpunkt aus.