Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 13

1. Zeigen Sie mit Hilfe des *Majorantenkriteriums für Reihen*, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ divergiert! Tipp: Ziehen Sie zum Vergleich die harmonische Reihe heran!

2. Zeigen Sie mit Hilfe des *Quotientenkriteriums*, dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu!}}$ konvergiert!

3. Zeigen Sie mit Hilfe des *Wurzelkriteriums*, dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu^2}$ konvergiert!

4. Zeigen Sie
   (a) mit Hilfe des *Integralkriteriums für Reihen*
   (b) mit Hilfe des *Majorantenkriteriums für Reihen*,

   dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\nu^3+1}$ konvergiert!

5. Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\sqrt{\nu}}$!

6. Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\sqrt{\nu!}}$!
   Tipp: Die im Buch angegebene Formel zur Berechnung des Konvergenzradius ist für diese Potenzreihe etwas unhandlich. Einfacher ist es, mit Hilfe des *Quotientenkriteriums* zu untersuchen, für welche x die Reihe konvergiert.

7. Entwickeln Sie $\frac{1}{(1-x)^2}$ in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0, indem Sie das Cauchy-Produkt der Taylorreihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$ mit sich selbst bilden!

8. Zeigen Sie, dass die gliedweise Ableitung der Taylorreihe von e^x wieder auf die Taylorreihe von e^x führt!

9. Zeigen Sie, dass die gliedweise Ableitung der Taylorreihe der Sinusfunktion auf die Taylorreihe der Cosinusfunktion führt!

10. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt\,,$$

lässt sich nicht mit Hilfe eines geschlossenen Terms darstellen.

(a) Entwickeln Sie sie in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0!
Tipp: Entwickeln Sie den Integranden und benutzen Sie die im Buch auf S. 221 angegebene Methode der gliedweisen Integration!

(b) Bestimmen Sie deren Konvergenzradius!