Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 12

1. Ermitteln Sie die Taylorreihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$ um den Entwicklungspunkt 0! (Sie dürfen dazu Taylorreihen, die im Buch angegeben sind, als bekannt voraussetzen!)

2. Ermitteln Sie die Taylorreihe der Funktion $g : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1 - x^3)$ um den Entwicklungspunkt 0! (Sie dürfen dazu Taylorreihen, die im Buch angegeben sind, als bekannt voraussetzen!)

3. Sei $z = 2e^{i\pi/3}$.

   (a) Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $|z|$!

   (b) Geben Sie $\overline{z}$, $\dfrac{1}{z}$ und z^3 jeweils in Polararstellung und in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an!

4. Für $x \in \mathbb{R}$ drücken Sie $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch e^{ix} und e^{-ix} aus! Nutzen Sie das Ergebnis, um die Identität

   $$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

   zu beweisen! (Sie wird bei der Überlagerung von Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen benötigt).

5. Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^5 = 32$ in Polardarstellung an! Skizzieren Sie die Lage dieser Lösungen in der komplexen Ebene!

6. Für $\Gamma \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(\Gamma) > 0$ betrachten Sie die Funktion

   $$\zeta : [0, 6\pi] \to \mathbb{C}, \qquad \zeta(t) = e^{\Gamma t}.$$

   $\zeta(t)$ stelle den Ort eines Teilchens in der komplexen Ebene zum Zeitpunkt t dar. Diskutieren Sie, wie sich das Teilchen bewegt! Unterscheiden Sie dabei zwischen den Fällen $\mathrm{Re}(\Gamma) > 0$, $\mathrm{Re}(\Gamma) = 0$ und $\mathrm{Re}(\Gamma) < 0$!

7. Aus der Funktion ζ von Aufgabe 6 wird die reelle Funktion

   $$\xi : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}, \qquad \xi(t) = \mathrm{Re}(\zeta(t))$$

   gewonnen. Welche Bewegungsform stellt sie dar, wenn $\mathrm{Re}(\Gamma) < 0$ ist?

8. Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 2\ln(x)$!
9. Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion $p : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sin(1 - x^2)$!
10. Ermitteln Sie alle Wendestellen der Funktion $q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2 \ln(x)$!