Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 11

1. Berechnen Sie $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx\,!$

2. Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ für $n \in \mathbb{N}\,!$

   Tipps: Ein nützlicher Trick besteht darin, zuerst $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\,dx$ zu berechnen, dann n mal nach k zu differenzieren und zuletzt $k = 1$ zu setzen! Eine andere Methode besteht darin, n mal partiell zu integrieren.

3. Zeigen Sie mit Hilfe des *Majorantenkriteriums für uneigentliche Integrale* (Buch, S. 175) und einer geeigneten Vergleichsfunktion, dass das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{1}{3+x^2-\sin(x)}\,dx$ konvergiert!

4. Zeigen Sie mit Hilfe des *Majorantenkriteriums für uneigentliche Integrale* und einer geeigneten Vergleichsfunktion, dass das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{3+x^2-\sin(x)}}\,dx$ divergiert!
   Tipp: Geben Sie eine divergierende *Minorante* an (vgl. Buch, S. 176)!

5. Zeigen sie, dass das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1}\,d\nu$ konvergiert!

   Tipp: Zerlegen Sie das Integral in eine Summe $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ und argumentieren Sie für beide Anteile getrennt! Zeigen und benutzen Sie: Für genügend kleine ν ist der Integrand ≤ 1, für genügend große ν ist er $\leq 2\nu^3 e^{-\nu}$.
   Anmerkung: Dieses Integral tritt bei der Berechnung der gesamten Strahlungsleistung mit Hilfe des Planckschen Strahlungsgesetzes auf. Es kann übrigens exakt berechnet werden: Sein Wert ist $\frac{\pi^4}{15}$.

6. Wird der Graph einer im Intervall D definierten Funktion f um die x-Achse gedreht, so entsteht die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Dessen Volumen ist durch

$$V = \pi \int\limits_D f(x)^2\,dx$$

gegeben, und der Flächeninhalt der Mantelfläche beträgt

$$A = 2\pi \int\limits_D f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

Nun betrachten Sie den vom Graphen der Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ erzeugten (unendlich langen) Rotationskörper!

(a) Ist sein Volumen endlich oder unendlich? Falls es endlich ist, berechnen Sie es!

(b) Ist der Inhalt seiner Mantelfläche endlich oder unendlich? Falls er endlich ist, berechnen Sie ihn!

Die beiden Fragen könnte man in humoristisch angehauchter Form auch so stellen: (a) Wieviel Flüssigkeit passt in ihn hinein? (b) Wieviel Farbe braucht man, um ihn anzustreichen?

7. Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^{3/2}$.

   (a) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f vom Grad 3 um den Entwicklungspunkt 0!

   (b) Schätzen Sie mit Hilfe des Restglieds den Fehler ab, der bei einer Approximation von $f\left(\frac{1}{2}\right)$ durch das in (a) berechnete Taylorpolynom gemacht wird!

8. Nun betrachten Sie den natürlichen Logarithmus $\ln$:

   (a) Berechnen Sie sein Taylorpolynom vom Grad 3 um den Entwicklungspunkt 1!

   (b) Schätzen Sie mit Hilfe des Restglieds den Fehler ab, der bei einer Approximation von $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ durch das in (a) berechnete Taylorpolynom gemacht wird!

9. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin(x) - 1}{x^2}\,,$$

indem Sie auf den Zähler den Satz von Taylor anwenden! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit der Regel von de l'Hospital!