Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 10

1. Zur Berechnung der Integrale $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx$ und $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$ kann man so vorgehen:

   - Es gilt die Identität $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, daher $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx + \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = 2\pi$.
   - Aus $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ und der Periodizität der Sinus- und der Cosinusfunktion folgt $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$.
   - Daraus ergeben sich unmittelbar die gesuchten Integrale.

   Führen Sie die hier angedeutete Argumentation im Detail aus!

2. Die umgesetzte elektrische Leistung in einem ohmschen Wechselstromkreis mit Spannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ und Stromstärke $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ ist gegeben durch $P(t) = U(t)I(t)$. Berechnen Sie ihren zeitlichen Mittelwert über eine Periode!
   Tipp: Verwenden Sie für den Mittelwert der Leistung die Definition, die in Aufgabe 4 des vorigen Übungstermins gegeben wurde!

3. Geben Sie für die folgenden Funktionen F jeweils eine Funktion V mit der Eigenschaft $F = -V'$ an! (F bezeichnet eine ortsabhängige *Kraft*, V die zugehörige *potentielle Energie*. Zwei potentielle Energien, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden, sind physikalisch äquivalent).

   (a) $F(x) = -k\,x$ mit $k > 0$ (harmonische Kraft, $x \in \mathbb{R}$).

   (b) $F(r) = -\dfrac{GMm}{r^2}$ mit $G, M, m > 0$ (Newtonsche Gravitationskraft, $r > 0$).

   (c) $F(r) = \dfrac{6C}{a}\left(2\left(\dfrac{a}{r}\right)^{13} - \left(\dfrac{a}{r}\right)^{7}\right)$ mit $C, a > 0$ (Kraft zwischen zwei neutralen, chemisch nicht aneinander gebundenen Atomen, $r > 0$).

4. Berechnen Sie $\displaystyle\int f(\sin\theta)\cos\theta\,d\theta$ und $\displaystyle\int f(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$ für den Fall, dass eine Stammfunktion von f bekannt ist!

5. Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl: $\displaystyle\int x\,\sinh(ax)\,dx$ für $a \neq 0$.

6. Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl: $\displaystyle\int t^3 e^{t^2}\, dt\,.$

7. Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl: $\displaystyle\int e^{ku} \cos(e^{ku})\, du$ für $k \neq 0\,.$

8. Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl: $\displaystyle\int \tan(z)\, dz\,.$

9. Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$

10. Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\xi)}{2+\sin(\xi)}\, d\xi\,.$

11. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\sin\theta)\cos\theta\, d\theta$ und $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$ für den Fall, dass eine Stammfunktion von f bekannt ist! Verwenden Sie dabei die Ergebnisse von Aufgabe 4!