Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 9

1. Berechnen Sie $\int\limits_0^b x^2\,dx$ für $b > 0$ mit Hilfe von Riemannschen Summen!

   Tipp: Im Buch ist vorgeführt, wie $\int\limits_0^1 e^x\,dx$ und $\int\limits_0^b \sqrt{x}\,dx$ mit Riemannschen Summen berechnet werden können. Adaptieren Sie die Vorgangsweise entsprechend!

2. Ein großer praktischer Wert der Riemannschen Summen besteht darin, für Integrale, die nicht geschlossen berechnet werden können, Näherungswerte darzustellen. Um das zu üben, wird das Integral $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ herangezogen.

   (a) Drücken Sie das Integral durch einen Grenzwert Riemannscher Summen aus! Zerlegen Sie dazu das Intervall $[0, 1]$ in n gleich große Teilintervalle und wählen Sie als Zwischenpunkte die linken Randpunkte der Teilintervalle! Berechnen Sie mit einem geeigneten Computerwerkzeug (z.B. *Mathematica*) die Riemannsche Summe für $n = 10$, $n = 100$ und $n = 1000$!

   (b) Überlegen Sie, wie die Genauigkeit verbessert werden könnte, ohne n in ungeahnte Höhen treiben zu müssen!

   Die Dezimaldarstellung des genauen Werts beginnt übrigens mit $0.7468241328...$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe der auf S. 140 des Buches angegebenen Abschätzung von Integralen, dass für eine im Intervall $[a, b]$ definierte stetige[1] Funktion f gilt:

   (a) Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

   (b) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (b-a)\,\max|f|$.

   Dabei bezeichnet $\max|f|$ das Maximum von $|f|$ im Intervall $[a, b]$.

[1] Stetigkeit wird hier nur verlangt, weil die zu verwendenden Abschätzungen im Buch für stetige Funktionen formuliert sind. Tatsächlich gelten diese Aussagen ganz allgemein für integrierbare Funktionen.

4. Der Mittelwert einer stetigen[2] Funktion f im Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass eine Näherung von $\overline{f}$ durch eine Riemannsche Summe mit äquidistanten Teilungspunkten ein ganz „normaler" Mittelwert endlich vieler Zahlen, also von der Form „Summe dividiert durch Anzahl" ist! Geben Sie eine Formel dafür an!

   (b) Zeigen Sie, dass stets

$$\min(f) \leq \overline{f} \leq \max(f)$$

   gilt! Dabei bezeichnen $\min(f)$ und $\max(f)$ das Minimum und das Maximum von f im Intervall $[a, b]$. Tipp: Gehen Sie aus von $\min(f) \leq f(x) \leq \max(f)$ für alle $x \in [a, b]$ und führen Sie eine geeignete Abschätzung durch!

5. Stellen Sie eine Formel für π als Grenzwert Riemannscher Summen auf! Tipp: Wählen Sie eine Funktion, deren Graph ein Halb- oder Viertelkreis ist, drücken Sie den Flächeninhalt unter diesem Graphen durch ein Integral aus und geben Sie für dieses eine Riemannsche Summe mit n Teilintervallen an! Testen Sie Ihre Formel mit einem geeigneten Computerwerkzeug!

[2] Hier gilt das Gleiche wie in Fußnote 1.