Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 8

1. Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ auf zwei Arten:

   (a) mit Hilfe der Quotientenregel.

   (b) mit Hilfe der Kettenregel, wenn f als Verkettung $f = g \circ \sin$ mit $g : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ angesehen wird.

2. Die Arcus-Cosinus-Funktion:

   (a) Wie ist sie (als Umkehrfunktion einer geeigneten Einschränkung der Cosinusfunktion) *genau* definiert? Wenn Sie es nicht wissen (im Buch steht es nicht), dann recherchieren Sie!

   (b) Ermitteln Sie die Ableitung der Arcus-Cosinus-Funktion! (Im Buch ist vorgeführt, wie die Ableitungen der Arcus-Sinus-Funktion und der Arcus-Tangens-Funktion ermitteln werden.)

   (c) Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Ableitung der Arcus-Sinus-Funktion! Was fällt Ihnen auf? Wie erklären Sie es?

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Der Graph einer Funktion vom Typ

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b$$

   heißt „Kettenlinie", da er (auf ein geeignetes Invervall eingeschränkt) die Form eines dünnen, durchhängenden Seils beschreibt. Zeigen Sie, dass y die Differentialgleichung

$$(y - b)\, y'' - y'^2 = 1$$

   erfüllt!

4. Gegeben sei die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = x - \operatorname{atan}(x)$.

   (a) Benutzen Sie das *Monotoniekriterium*, um zu zeigen, dass ψ überall monoton wachsend ist! Beachten Sie, dass das Monotoniekriterium im Buch (S. 124) für Funktionen formuliert ist, deren Definitionsmenge ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist! Wie lässt es sich dennoch für die Lösung der Aufgabe nutzen?

   (b) Ist ψ streng monoton wachsend? Falls ja, beweisen Sie es! Falls nein, geben Sie größtmögliche Intervalle an, in denen ψ streng monoton wachsend ist!

Unterstützen Sie Ihre Argumentation durch geeignete Skizzen oder Plots!

5. Die Ortskoordinate eines Teilchens, das sich in einer Dimension bewegen kann, in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ beschrieben. Dabei wird angenommen, dass x differenzierbar ist.

   (a) Was besagt der *Mittelwertsatz* für die Funktion x, in physikalischen Begriffen ausgedrückt?

   (b) Gilt $x(t_0) = x(t_1)$, so sind die Voraussetzungen für den *Satz von Rolle* erfüllt. Was besagt dieser Satz für die Funktion x, in physikalischen Begriffen ausgedrückt?

6. Die Bewegungen zweier Teilchen (in einer Dimension) werden beschrieben wie in Aufgabe 5, nun mit den Funktionen

   $x_1 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ für Teilchen 1 und
   $x_2 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ für Teilchen 2.

   Dabei wird angenommen, dass x_1 und x_2 differenzierbar sind, und dass ${x_2}'(t) \neq 0$ für alle $t \in (t_0, t_1)$. Was besagt der *Verallgemeinerte Mittelwertsatz* für diese beiden Funktionen, in physikalischen Begriffen ausgedrückt?

7. Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hospital:

   (a) $\lim\limits_{v \to 0} \frac{1}{v^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$, wobei $c > 0$.

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{\cos(cx) - 1}$, wobei $c \neq 0$.

8. Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hospital (Terme dieses Typs treten im Planckschen Strahlungsgesetz auf):

   (a) $\lim\limits_{\nu \to 0} \frac{\nu^3}{e^{k\nu} - 1}$, wobei $k \neq 0$.

   (b) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^5 \left(\exp\left(\frac{k}{\lambda}\right) - 1 \right)}$, wobei $k \neq 0$.

9. Sei $\alpha > 0$. Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hospital:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x)$.

   (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)}$.

   Was besagen uns die Ergebnisse über das Wachstumsverhalten des natürlichen Logarithmus? Um (a) zu verdeutlichen, plotten Sie die Funktionen $x \mapsto -\ln(x)$ und $x \mapsto x^{-1/4}$ einmal im Intervall $(0, 1]$ und einmal im Intervall $(0, 0.001]$! Um (b) zu verdeutlichen, plotten Sie die Funktionen $x \mapsto \ln(x)$ und $x \mapsto x^{1/4}$ einmal im Intervall $(0, 10]$ und einmal im Intervall $(0, 10000]$!