Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 7

1. Beweisen Sie mit Hilfe der definierenden Eigenschaften des natürlichen Logarithmus, wie sie im Buch auf S. 96 angegeben sind:

   (a) $\frac{1}{2} \leq \ln(2) \leq 1$.

   (b) $\frac{2}{3} \leq \ln(3) \leq 2$.

2. Zeigen Sie, dass der natürliche Logarithmus folgende Eigenschaft besitzt:

$$|\ln(x_1) - \ln(x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{\min(x_1, x_2)} \quad \text{für alle } x_1, x_2 > 0.$$

   Tipp: Verwenden Sie dabei die definierenden Eigenschaften des natürlichen Logarithmus, wie sie im Buch angegeben sind, sowie die auf S. 97 formulierten (und in der Folge bewiesenen) Eigenschaften 2.) und 4.)! Damit zeigen Sie zunächst $\frac{x_1 - x_2}{x_1} \leq \ln(x_1) - \ln(x_2) \leq \frac{x_1 - x_2}{x_2}$ und daraus die obige Identität.

3. Zeigen Sie, dass der natürliche Logarithmus in seinem gesamten Definitionsbereich stetig ist! Tipp: Verwenden Sie dabei die in Aufgabe 2 angegebene Eigenschaft!

4. Leiten Sie mit Hilfe der im Kasten auf S. 100 des Lehrbuchs angegebenen Eigenschaften 1) – 3) der Exponentialfunktion die Darstellung der Eulerschen Zahl $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ her!
   Anmerkung: Wird die Exponentialfunktion $\exp$ wie im Buch auf S. 99 eingeführt, so ist die Eulersche Zahl als $e = \exp(1)$ definiert, also als e^1.
   Tipp: Setzen Sie $x = \frac{1}{n}$ in $1 + x \leq e^x$ und $x = \frac{1}{n+1}$ in $e^x \leq \frac{1}{1-x}$, um – mit Hilfe der Identität $(e^m)^{1/m} = e$ für alle $m \in \mathbb{N}$, die aus Eigenschaft 1) folgt – die Aussage

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

   zu erhalten. Damit sind Sie fast schon am Ziel!

5. Im Buch wird die Ableitungsregel $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ mit Hilfe des binomischen Satzes begründet. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten, sie herzuleiten: Zeigen Sie, dass aus der geometrischen Summenformel (= Teilsumme der geometrischen Reihe, siehe Buch S. 60), in der Form

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

angeschrieben, mit $q = \dfrac{x}{x_0}$ die Identität

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \left(1 + \frac{x}{x_0} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}\right) x_0^{n-1} \qquad \text{für } x \neq x_0$$

folgt (ganz kurze Rechnung!) und nutzen Sie sie, um zu zeigen, dass $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

6. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

(wie sieht ihr Graph aus?) an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist!

7. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

(wie sieht ihr Graph aus?) an der Stelle 0 differenzierbar ist!

8. Die in Aufgabe 7 betrachtete Funktion g ist überall differenzierbar. Zeigen Sie, dass ihre Ableitungsfunktion $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle 0 nicht stetig ist!

9. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{|x|} & \text{wenn } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|} & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

(Wenn festgelegt wird, dass $\sqrt[3]{x}$ auch für negative x definiert ist, etwa $\sqrt[3]{-8} = -2$, so ist f einfach durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$ gegeben). Plotten Sie den Graphen von f! Er ist wunderbar „glatt", besitzt keine Ecken. Zeigen Sie, dass dennoch f an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist!