Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 6

1. Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3x - 1$, wobei D die größtmögliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, so dass $f \circ g$ existiert. Bestimmen Sie D und $f \circ g$!

2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

   (a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 4, 5\}$ mit $f(j) = j + 1$.

   (b) $g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ mit $g(j) = 1 - j$.

   (c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$.

3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

   (a) $u : [0, \pi] \to [0, 1]$ mit $u(x) = \sin(x)$.

   (b) $v : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ mit $v(x) = \sin(x)$.

   (c) $w : (0, \pi) \to (-1, 1)$ mit $w(x) = \cos(x)$.

   Unterstützen Sie Ihre Argumentationen durch geeignete Skizzen!

4. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

   (a) $p : [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = \tan(x)$.

   (b) $q : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ mit $q(x) = \tan(x)$.

   Unterstützen Sie Ihre Argumentationen durch geeignete Skizzen!

5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Beschränktheit! Falls untere/obere Schranken existieren, geben Sie welche an!

   (a) $\psi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = \dfrac{2 + x^2}{x}$.

   (b) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = \dfrac{2 + \sin(x)}{3 + \sin(x)}$.

   Unterstützen Sie Ihre Argumentationen durch geeignete Skizzen!

6. Zeigen Sie unter Verwendung der Folgendefinition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ 1 + x & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0 nicht stetig ist! Unterstützen Sie Ihre Argumentation durch eine Skizze des Graphen von f!

7. Zeigen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion f von Aufgabe 6 an der Stelle 0 nicht stetig ist!

8. Beweisen Sie unter Verwendung des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x - 7$ eine Nullstelle besitzt!

9. Berechnen Sie

   (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$.

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

   Tipp: Adaptieren Sie die Argumentationen der Beispiele 3.18 und 3.20 des Buches in geeigneter Weise!

10. Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^3)}{x^3 + x}$!

    Tipp: Formen Sie um: $\dfrac{\sin(x^3)}{x^3 + x} = \dfrac{\sin(x^3)}{x^3} \dfrac{x^3}{x^3 + x}$.

11. Die Funktion $F(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ ist an der Stelle 2 nicht definiert, da für $x = 2$ Zähler und Nenner gleich 0 sind. Handelt es sich um eine stetig hebbare Definitionslücke? Falls ja, berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 2} F(x)$!

12. Die Funktion F von Aufgabe 11 ist auch an der Stelle -2 nicht definiert. Handelt es sich um eine stetig hebbare Definitionslücke? Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to -2^-} F(x)$ und $\lim\limits_{x \to -2^+} F(x)$!

13. Berechnen Sie:

    (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + x\sin(x)}{3x^2 - 5}$

    (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + x\sin(x)}{3x^3 - 5}$

    (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + x\sin(x)}{3x^4 - 5}$