

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 5

1. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von \mathbb{R} , die nur ein einziges Element besitzt, abgeschlossen ist! Unterstützen Sie Ihre Argumentation durch eine Skizze!
2. Zeigen Sie, dass die Menge $(-1, 0) \cup (2, 3)$ offen ist! Unterstützen Sie Ihre Argumentation durch eine Skizze!

3. Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) = [-1, 1]$$

gilt! Unterstützen Sie Ihre Argumentation durch eine Skizze!

(Dieses Beispiel zeigt, dass der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen nicht offen sein muss!)

4. Sei $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$.

- (a) Geben Sie eine untere und eine obere Schranke der Menge A an!
- (b) Besitzt A ein kleinstes Element? Falls ja, geben Sie es an!
- (c) Besitzt A ein größtes Element? Falls ja, geben Sie es an!
- (d) Bestimmen Sie $\inf(A)$ und $\sup(A)$!

Unterstützen Sie Ihre Argumentation durch eine Skizze!

5. Zeigen Sie, dass die Menge A von Aufgabe 4 weder offen noch abgeschlossen ist!

6. Ist die Menge $\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[n, n + \frac{1}{2} \right]$

- (a) offen?
- (b) abgeschlossen?
- (c) beschränkt?
- (d) kompakt?

7. Wie viele Funktionen $\{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ gibt es?
8. Wie viele Funktionen $\{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ gibt es?
9. Kann man den Graphen einer Funktion $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ *zeichnen*? Falls ja, geben Sie ein Beispiel!
10. Fassen Sie zusammen, was Sie über die Graphen linearer Funktionen, d.h. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = kx + d$ (wobei $k, d \in \mathbb{R}$) wissen! Insbesondere:
- Welche geometrische Bedeutung haben k und d ?
 - Ist *jede* Gerade der Graph einer linearen Funktion?
 - Wie findet man k und d , wenn zwei Punkte des Graphen ($P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ mit $p_1 \neq q_1$) gegeben sind?
11. Fassen Sie zusammen, was Sie über die Graphen quadratischer Funktionen, d.h. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) wissen! Insbesondere:
- Wie bestimmt man die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen?
 - Wie bestimmt man (ohne Differentialrechnung) die Koordinaten des Scheitelpunkts?
 - Kann eine nach rechts offene Parabel der Graph einer quadratischen Funktion sein? Falls nein – ist sie der Graph einer anderen Funktion?
12. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:
- $x \mapsto |2x - 3|$
 - $x \mapsto x|x|$
 - $x \mapsto \frac{1}{1 + |x|}$