Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 4

1. Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_ε, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

   (b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_ε, so dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

   (c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_ε, so dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Sei $a_n = \dfrac{3n-1}{5-2n}$.

   (a) Berechnen Sie den Grenzwert: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   (b) Für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ geben Sie einen Index n_ε an, so dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

3. Sei $b_n = \dfrac{7n^2+2n-3}{4n^2-9}$. Besitzt die Folge (b_n) einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie ihn!

4. Sei $c_n = \dfrac{n^3-2n^2+1}{5-n^2}$. Besitzt die Folge (c_n) einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie ihn!

5. Sei $d_n = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n^3+4}$. Besitzt die Folge (d_n) einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie ihn!

6. Sei $h_n = \dfrac{3n+2(-1)^n}{4n+1}$. Besitzt die Folge (h_n) einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie ihn!

7. Sei $k_n = \dfrac{3(-1)^n n+2}{4n+1}$. Besitzt die Folge (k_n) einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie ihn!

8. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass dann die Folge $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert! Tipp: Unterscheiden Sie die zwei Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$. Der erste Fall ist sehr leicht zu behandeln. Für den zweiten Fall beweisen und verwenden Sie die Beziehung

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \qquad \text{für alle } x, y > 0.$$

9. Sei $p_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Besitzt die Folge (p_n) einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie ihn! Tipp: Benutzen Sie die in Aufgabe 8 angegebene Gleichung!

10. Sei $q_n = \sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n^2+1}$. Besitzt die Folge (p_n) einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie ihn! Tipp: Benutzen Sie die in Aufgabe 8 angegebene Gleichung!

11. Gibt es eine reelle Folge,

    (a) die nach unten beschränkt, streng monoton wachsend und divergent ist?
    (b) die nach oben beschränkt, streng monoton wachsend und divergent ist?
    (c) die konvergiert, aber eine divergierende Teilfolge besitzt?
    (d) die konvergiert, deren Folge der Teilsummen aber divergiert?

    Geben Sie Begründungen! Wo die Antwort „ja“ lautet, geben Sie ein Beispiel!

12. In der Vorlesung wurde (ohne Beweis) gesagt, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert und mit e bezeichnet wird. Zeigen Sie, dass daraus folgt:

    $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}\,.$$

    Tipp: Formen Sie um

    $$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

    und verwenden Sie den in Aufgabe 8 gezeigten Sachverhalt!